This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

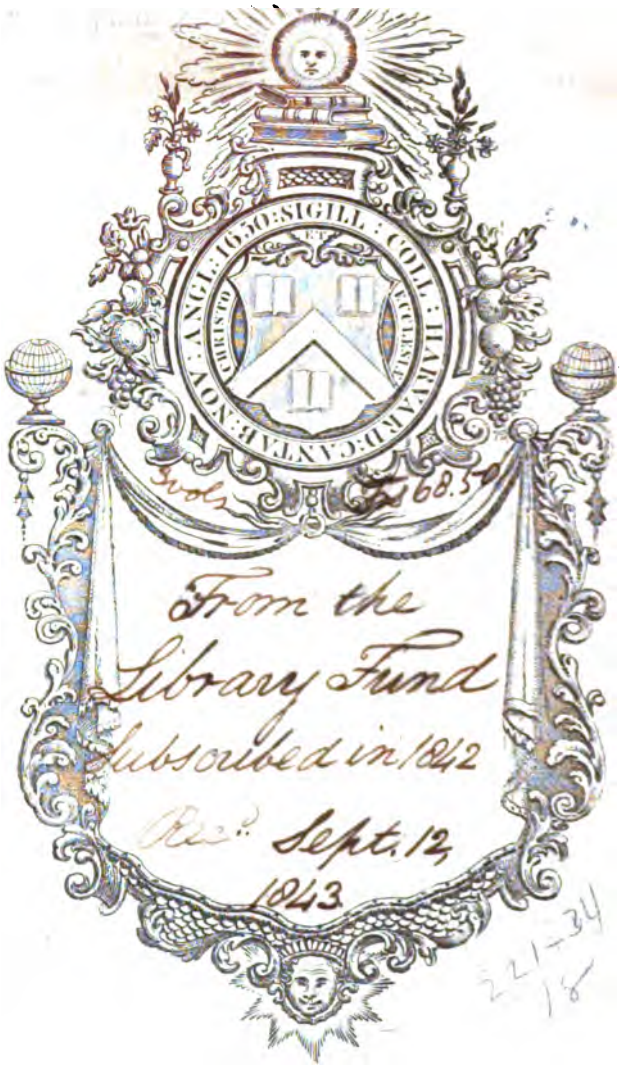
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

M Ch 3708.25


NOV: ANGL: 1650: SIGILL: COLL: HARV: CANTAB:
CHRISTO ET ECCLESIAE
From the
Library Fund
Subscribed in 1842
Rec.d Sept. 12
1843

TRAITÉ

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

TRAITÉ

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES

ET DES INTÉGRALES EULÉRIENNES,

Avec des Tables pour en faciliter le calcul numérique;

Adrien Marie

PAR A. M. LEGENDRE, MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES, DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DE LONDRES ET DE CELLE D'ÉDIMBOURG, DE LA SOCIÉTÉ ITALIENNE, etc.

TOME PREMIER,

Contenant la théorie des Fonctions elliptiques et son application à différens problèmes de Géométrie et de Mécanique.

PARIS,

IMPRIMERIE DE HUZARD-COURCIER,

RUE DU JARDINET, N° 12.

1825

Math 3708.25

221-34
1

AVERTISSEMENT.

La partie la plus étendue et en même temps la plus importante de l'ouvrage que l'Auteur a publié sous le nom d'*Exercices de Calcul intégral*, est, comme on sait, celle qui traite des fonctions elliptiques, de leur application à différens problèmes de Géométrie et de Mécanique, et de la construction des tables nécessaires pour l'usage de ces fonctions. Cette partie, ainsi que celle qui concerne les intégrales définies, auxquelles l'Auteur a donné le nom d'*intégrales Eulériennes*, sont reproduites dans ce nouveau Traité avec un grand nombre d'additions dont l'objet est de perfectionner la théorie de ces transcendantes et d'en étendre les applications. D'ailleurs l'ordre nouveau dans lequel les matières sont présentées, et le soin qu'a pris l'Auteur de faire disparaître en beaucoup de points les imperfections qu'il avait remarquées lui-même dans son précédent ouvrage, assurent à celui-ci des avantages que l'opinion générale ne pourra manquer de confirmer.

Il serait trop long d'indiquer ici, même sommairement, en quoi consistent les changemens et améliorations que l'on remarquera dans la première partie, intitulée *Théorie des fonctions elliptiques;* nous nous bornerons à citer comme présentant de nouveaux résultats, les chapitres XXVIII, XXIX, XXX, et surtout le chapitre XXXI qui contient la découverte d'une nouvelle échelle de modules, différente de l'échelle connue, et qui donne une explication simple de plusieurs formules, contenant des réductions très remarquables auxquelles l'Auteur n'était parvenu précédemment que par des voies très laborieuses; cette seconde échelle combinée avec la première donne lieu à la formation d'une sorte de damier analytique, dont les cases correspondent aux transformations infiniment multipliées que peut

subir la plus simple des fonctions elliptiques, sans cesser d'être semblable à elle-même.

Les applications de la théorie à différens problèmes de Géométrie et de Mécanique, forment la seconde partie du tome I : on y remarquera de nouveaux développemens très étendus sur la surface du cône oblique, et une section entièrement nouvelle sur l'orbite décrite en vertu d'une force centrale donnée. C'est surtout dans cette partie que se manifestent les avantages des méthodes proposées par l'Auteur, soit pour faire découvrir de nouvelles solutions, soit pour perfectionner et compléter des solutions que les méthodes ordinaires avaient laissées imparfaites : celle, par exemple, qui se rapporte au grand problème du mouvement d'un corps attiré vers deux centres.

Une troisième partie qui sert de complément au Traité des fonctions elliptiques, est uniquement destinée à la construction des tables. Cette partie, placée en tête du tome II, ne diffère que par quelques suppressions devenues nécessaires, de ce qu'elle était dans le 3e volume des *Exercices*. On y trouve non-seulement l'exposition des méthodes qui peuvent servir à construire les tables elliptiques dans différentes hypothèses sur leur forme et sur leur étendue, mais en général tous les détails de pratique nécessaires pour calculer les valeurs des fonctions dites de première et de seconde espèce, avec tout le degré d'approximation que peuvent donner les grandes tables trigonométriques de Briggs. Peut-être ne trouverait-on dans aucun autre ouvrage des exemples de calculs numériques, dirigés par des formules aussi propres à abréger le travail et exécutés avec un aussi grand degré de précision. Cette partie est terminée par le recueil des tables, tant auxiliaires que principales, calculées avec assez d'étendue pour tenir lieu pendant long-temps de tout autre secours dans l'application de la nouvelle théorie.

Il ne sera pas inutile pour l'histoire de la Science, de faire remarquer ici que cette nouvelle branche d'analyse à laquelle l'Au-

teur a donné le nom de *Théorie des fonctions elliptiques*, est fondée en grande partie sur les bases établies dans le chap. V, concernant la forme la plus simple de ces fonctions et leur division en trois espèces; d'où est résulté un système de nomenclature et de notation, propre à représenter ces fonctions dans les usages ordinaires de l'analyse, et à faciliter la recherche de leurs propriétés. Euler avait prévu qu'à l'aide d'une notation convenable, le calcul des arcs d'ellipse et autres transcendantes analogues, pourrait devenir d'un usage presque aussi général que celui des arcs de cercle et des logarithmes (*); mais si on excepte *Landen*, qui, par la découverte de son théorème, aurait pu s'ouvrir des routes nouvelles, personne ne s'est mis en devoir de réaliser la prédiction d'Euler, et on peut dire que l'Auteur de ce Traité est resté seul à s'en occuper, depuis l'année 1786 où il a fait paraître ses premières recherches sur les arcs d'ellipse, jusqu'à l'époque actuelle. Cette espèce de délaissement a retardé sans doute les progrès de la Théorie des fonctions elliptiques; mais l'Auteur par des efforts renouvelés à de grands intervalles de temps, est parvenu enfin à compléter presque entièrement cette théorie, et à en rendre l'application facile par des tables fort étendues dont il a exécuté lui-même tous les calculs.

Le reste du tome II traite de ces deux sortes d'intégrales définies dont Euler s'est beaucoup occupé dans plusieurs de ses ouvrages, et auxquelles, par cette raison, l'Auteur a cru pouvoir donner le nom d'*intégrales Eulériennes*. Des recherches pour compléter la théorie de ces intégrales avaient produit les parties II et IV des *Exercices;* l'Auteur les présente maintenant sous une forme plus simple à quelques égards et exempte de

(*) Voici les paroles d'Euler (Novi Com. Petrop, tom. X, pag. 4).

« *Imprimis autem hîc idoneus signandi modus desiderari videtur, cujus ope arcus* » *elliptici æque commode in calculo exprimi queant ac jam logarithmi et arcus cir-* » *culares, ad insigne analyseos incrementum, in calculum sunt introducti. Talia signa* » *novam quamdam calculi speciem suppeditabunt....* »

doubles emplois. Il y a joint, à cause de l'affinité des matières, les résultats contenus dans d'autres parties du même ouvrage, sur une sorte d'intégrales qu'on peut rapporter aux intégrales Eulériennes indéfinies de la seconde espèce, et qui se calculent par différentes méthodes suivant les limites dans lesquelles ces intégrales doivent être prises. C'est ce genre de transcendantes qui a offert à l'Auteur le moyen de trouver l'intégrale complète d'une équation différentielle analogue à l'équation de *Riccati*, mais beaucoup plus générale.

Enfin, pour que ce nouvel ouvrage pût être considéré comme un traité à peu près complet des transcendantes les plus connues ou les plus utiles après les arcs de cercle et les logarithmes, l'Auteur a cru devoir terminer le second volume par le chapitre de son précédent ouvrage, qui traite du développement de la fonction $(1 - 2a\cos\varphi + a^2)^{-n}$, n étant un exposant fractionnaire. On sait que les coefficiens de cette fonction sont des transcendantes qui ont en général beaucoup d'analogie avec les fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce, et qui coïncident avec elles toutes les fois que $2n$ est un nombre entier, ce qui a lieu dans le calcul des perturbations des planètes. Ainsi rien n'a été négligé pour que cet ouvrage devînt utile dans différens genres de recherches, soit par les nombreuses formules qu'il contient, soit par les tables dont il offre un recueil aussi varié qu'étendu.

TABLE DES MATIÈRES.

THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

INTRODUCTION, pag. 1

CHAP. Ier. Idée générale des différentes sortes de transcendantes contenues dans la formule intégrale $\int \frac{P dx}{R}$, 4

CHAP. II. Manière de faire disparaître les puissances impaires de la variable sous le radical, 6

CHAP. III. Réduction de la différentielle $\frac{P dx}{R}$ à la forme $\frac{Q d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}}$, 9

CHAP. IV. Développement de la formule $\int \frac{Q d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}}$, 11

CHAP. V. Définition des fonctions elliptiques et leur division en trois espèces, 14

CHAP. VI. Comparaison des fonctions elliptiques de la première espèce, 19

CHAP. VII. De la Lemniscate et d'une autre courbe algébrique dont les arcs représentent généralement la fonction F, 35

CHAP. VIII. Expression du temps dans le mouvement du pendule simple, 41

CHAP. IX. Comparaison des fonctions elliptiques de la seconde espèce, 43

CHAP. X. Comparaison des arcs d'Hyperbole, 53

CHAP. XI. Développement particulier de la formule $\int \frac{(f + gx^2) dx}{\sqrt{(a^2 + 2abx^2 \cos\theta + b^2 x^4)}}$, 55

CHAP. XII. Théorème sur les fonctions complètes de première et seconde espèce, dont les modules sont complémens l'un de l'autre, 60

CHAP. XIII. Équations différentielles qui expriment la nature des fonctions E et F. Intégrales complètes de ces équations, 62

CHAP. XIV. Développement des fonctions complètes F' et E' en séries, 65

CHAP. XV. Changemens qu'on peut faire subir au paramètre dans les fonctions elliptiques de la troisième espèce, pag. 68

CHAP. XVI. Comparaison des fonctions elliptiques de la troisième espèce, 74

CHAP. XVII. Formation d'une suite infinie de fonctions elliptiques de la première espèce, liées entre elles par des rapports constans, 79

CHAP. XVIII. Application de la même loi aux fonctions elliptiques de la seconde espèce, 83

CHAP. XIX. Méthode d'approximation appliquée aux fonctions elliptiques de la première espèce, 89

CHAP. XX. Considérations générales sur l'échelle des modules et sur les propriétés des fonctions F rapportées à différens termes de cette échelle, 97

CHAP. XXI. Méthode d'approximation appliquée aux fonctions elliptiques de la seconde espèce, 108

CHAP. XXII. Méthode d'approximation appliquée aux fonctions elliptiques de la troisième espèce, 118

CHAP. XXIII. Réduction générale des fonctions elliptiques de la troisième espèce. On en conclut que les fonctions complètes de la troisième espèce peuvent toujours s'exprimer par des fonctions de la première et de la seconde espèce, 132

CHAP. XXIV. Réduction générale des fonctions elliptiques dont le paramètre est imaginaire, 143

CHAP. XXV. D'un symptôme général pour reconnaître si deux fonctions données de troisième espèce, qui ne diffèrent que par les paramètres, peuvent se réduire l'une à l'autre, 163

CHAP. XXVI. De l'intégrale $\int \frac{dz}{(1+pz^2)\sqrt[3]{(1+qz^2)}}$, 165

CHAP. XXVII. De quelques autres intégrales qui conduisent à des résultats remarquables, 175

CHAP. XXVIII. Exemple de réduction dans lequel les modules des fonctions comparées, sont complémens l'un de l'autre, 185

CHAP. XXIX. Exemple de réduction dans lequel les fonctions F et E sont rap-

portées à deux modules qui n'appartiennent ni à la même échelle, ni à l'échelle complémentaire, pag. 190

CHAP. XXX. Autre exemple de réduction dans lequel les modules des fonctions comparées n'appartiennent ni à la même échelle, ni à des échelles complémentaires, 201

CHAP. XXXI. Sur une nouvelle échelle de modules qui conduit directement aux théorèmes des trois chapitres précédens et à une infinité d'autres semblables, 222

CHAP. XXXII. De quelques formules générales qui peuvent se ramener aux fonctions elliptiques, 252

CHAP. XXXIII. Développement des différens cas compris dans l'intégrale $Z = \int \frac{P dx}{\sqrt{Q}}$, P étant une fonction rationnelle de x et Q un polynome de la forme $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta x^6$, 259

CHAP. XXXIV. Sur le développement des fonctions elliptiques en séries, 273

CHAP. XXXV. Sur diverses suites d'intégrales définies, dont les valeurs peuvent être assignées par les fonctions elliptiques, 279

TABLE GÉNÉRALE DES FORMULES, 308

ADDITION AU CHAPITRE XXII, 322

ADDITION AU CHAPITRE XXXI, 325

APPLICATION A LA GÉOMÉTRIE.

SECT. Ire. Surface du cône oblique, 329

SECT. II. Détermination de l'aire de l'ellipsoïde, 350

SECT. III. De la ligne la plus courte sur la surface du sphéroïde, 360

APPLICATION A LA MÉCANIQUE.

SECT. Ire. Du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, 366

SECT. II. Du mouvement d'un corps attiré vers deux centres fixes, 411

Tableau général des cas principaux du problème, 449

Solution du problème général, lorsque la courbe décrite est à double courbure, pag. 518

Du mouvement rectiligne d'un corps attiré vers deux centres fixes, 531

SECT. III. Sur l'attraction des ellipsoïdes homogènes, 539

SECT. IV. Sur l'orbite décrite en vertu d'une force centrale donnée, 557

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

THÉORIE
DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

INTRODUCTION.

Si on pouvait ranger dans un ordre méthodique les diverses transcendantes qui n'ont été connues et employées jusqu'ici que sous le nom de *quadratures;* si en étudiant leurs propriétés on trouvait les moyens de les réduire aux expressions les plus simples dont elles sont susceptibles dans l'état de généralité, et d'en calculer avec facilité les valeurs approchées lorsqu'elles deviennent entièrement déterminées; alors les transcendantes dont il s'agit, désignées chacune par un caractère particulier et soumises à un algorithme convenable, pourraient être employées dans l'analyse à peu près comme le sont les arcs de cercle et les logarithmes; les applications du calcul intégral ne seraient plus arrêtées, comme elles l'ont été jusqu'ici, par cette espèce de barrière qu'on ne tente plus de franchir, lorsque le problème est ramené aux quadratures, et les solutions, à peine commencées par cette réduction, recevraient tous les développemens que comporte la nature de la question.

Ce qu'il serait comme impossible d'exécuter dans un plan aussi vaste que celui qui vient d'être tracé, on peut au moins le réaliser à l'égard des transcendantes qui se rapprochent le plus des fonctions circulaires et logarithmiques, telles que les arcs d'ellipse et d'hyperbole, et en général les transcendantes auxquelles nous avons donné le nom de *fonctions elliptiques.*

La théorie que nous allons exposer de ces fonctions prouvera qu'elles méritent d'occuper une place distinguée dans l'analyse, et qu'elles peuvent être employées utilement dans les applications du calcul intégral; mais avant d'entrer en matière, il ne sera pas inutile d'indiquer succinctement les époques de l'origine de cette théorie et de ses accroissemens progressifs.

Maclaurin et d'Alembert [1] sont les premiers qui se soient occupés des intégrales qui peuvent être exprimées par des arcs d'ellipse ou par des arcs d'hyperbole; ils trouvèrent un grand nombre de formules susceptibles de

[1] *Maclaurin.* Traité des Fluxions. — *D'Alembert.* Mém. de Berlin, 1746.

cette réduction, mais les différens résultats n'étaient point liés entre eux et ne pouvaient former aucune théorie.

Un Géomètre italien d'une grande sagacité, ouvrit la route à des spéculations plus profondes [1]. Il prouva que sur toute ellipse ou sur toute hyperbole donnée, on peut assigner, d'une infinité de manières, deux arcs dont la différence soit égale à une quantité algébrique. Il démontra en même temps que la courbe nommée *lemniscate* jouit de cette singulière propriété, que ses arcs peuvent être multipliés ou divisés algébriquement, comme les arcs de cercle, quoique chacun d'eux soit une transcendante d'un ordre supérieur; c'est le premier exemple où l'on ait montré l'usage de la plus simple des fonctions elliptiques, qui est en quelque sorte la régulatrice de toutes les autres et qui peut se transformer d'une infinité de manières sans cesser d'être semblable à elle-même.

Euler, par une combinaison qu'on peut regarder comme fort heureuse, quoique ces hazards n'arrivent qu'à ceux qui savent les faire naître, trouva l'intégrale algébrique complète d'une équation différentielle composée de deux termes séparés, mais semblables, dont chacun n'est intégrable que par des arcs de sections coniques [2].

Cette découverte importante donna lieu à son auteur de comparer d'une manière plus générale qu'on ne l'avait fait avant lui, non-seulement les arcs d'une même ellipse, d'une même hyperbole, ou d'une même lemniscate, mais en général toutes les transcendantes contenues dans la formule $\int \frac{P dx}{R}$, où P est une fonction rationnelle de x, et R la racine quarrée d'un polynome en x du quatrième degré.

Lagrange voulut faire rentrer dans les procédés ordinaires de l'analyse l'intégrale trouvée par Euler [3]; il y parvint par une méthode fort ingénieuse dont l'application s'élève graduellement des transcendantes inférieures aux transcendantes Eulériennes, mais il essaya inutilement de parvenir à un résultat plus général que celui d'Euler.

Peu de temps après, Landen, géomètre anglais, démontra que tout arc d'hyperbole peut être mesuré par deux arcs d'ellipse [4]; découverte mémorable qui simplifie la théorie de ces transcendantes, et qui aurait pu conduire l'auteur à d'autres résultats plus importans.

---

(1) *Fagnani*. Produzioni matematiche, tom. II, 1750.

(2) *Euler*. Novi Com. Petrop., tom. VI et VII, 1761.

(3) Mém. de Turin, tom. IV, 1768.

(4) Philosophical Transactions, 1775, Mathematical Memoirs, by John *Landen*, 1780.

Enfin Lagrange se signala de nouveau dans la même carrière [1] en donnant une méthode générale pour trouver par approximation les intégrales de la forme $\int \frac{P dx}{R}$.

Telles étaient les principales découvertes des Géomètres dans la théorie de ces intégrales, lorsque je publiai mes recherches sur l'intégration par arcs d'ellipse [2], où après avoir démontré la plupart des théorèmes connus jusqu'à cette époque, je fis voir que dans une suite infinie d'ellipses formées d'après une même loi, on peut réduire la rectification d'une de ces ellipses à celle de deux autres prises à volonté dans la même suite. C'était un pas de plus dans une carrière difficile.

Mais cette matière et en général la théorie des transcendantes désignées par $\int \frac{P dx}{R}$, demandait à être traitée d'une manière plus méthodique et plus approfondie. C'est ce que j'essayai de faire dans un *Mémoire sur les Transcendantes elliptiques*, publié en 1793. Je me proposai dans cet ouvrage, de comparer entre elles toutes les fonctions comprises sous cette dénomination, de les classer en différentes espèces, de réduire chacune à la forme la plus simple dont elle est susceptible, de les évaluer par les approximations les plus promptes et les plus faciles; enfin de former de l'ensemble de cette théorie une sorte d'algorithme qui pût servir à étendre le domaine de l'analyse.

Des recherches ultérieures ayant eu pour résultat de perfectionner de plus en plus la théorie des fonctions elliptiques, il est devenu nécessaire de présenter cette nouvelle branche d'analyse avec de plus grands développemens, et d'en montrer l'application à différens problèmes choisis de Géométrie et de Mécanique. Mais pour rendre cette théorie tout-à-fait usuelle, il restait à construire une série de tables au moyen desquelles on pût, dans chaque cas proposé, trouver la valeur numérique des fonctions de la première et de la seconde espèce. Ces tables ont été enfin construites, après une multitude de recherches entreprises dans la vue de découvrir les méthodes et les formules les plus propres à diminuer la longueur et la difficulté des calculs.

Ainsi la théorie que nous allons exposer, agrandie et à peu près complétée par un grand nombre de travaux successifs, pourra être appliquée avec presque autant de facilité que celle des fonctions circulaires et logarithmiques, ce qui était l'objet des vœux et des espérances d'Euler.

---

[1] Nouveaux Mémoires de Turin, ann. 1784 et 1785, tom. II.

[2] Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, ann. 1786.

CHAPITRE PREMIER.

Idée générale des différentes sortes de transcendantes contenues dans la formule intégrale $\int\frac{Pdx}{R}$.

1. Nous représentons par P une fonction rationnelle quelconque de x, et par R le radical $\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}$: ce radical restant le même, on peut donner une infinité de valeurs à P; mais il n'en résulte pas pour cela une infinité de transcendantes de nature différente. On peut toujours, par des intégrations partielles, réduire l'intégrale $\int\frac{Pdx}{R}$ à une partie algébrique, plus un certain nombre de transcendantes, qui sont toujours de la même forme et de la même nature. C'est ce qu'il s'agit de développer.

Supposons d'abord que P soit une fonction entière de x, en sorte qu'on ait $P=A+Bx+Cx^2+\ldots+Kx^k$. Si l'on représente, pour abréger l'intégrale $\int\frac{x^m dx}{R}$ par Π^m, il est clair qu'on aura

$$\int\frac{Pdx}{R}=A\Pi^0+B\Pi^1+C\Pi^2+\ldots+K\Pi^k:$$

or, en différenciant la quantité $x^{m-3}R$, et revenant de la différentielle à l'intégrale, on trouve cette formule

$$x^{m-3}R=(m-3)\alpha\Pi^{m-4}+(m-\tfrac{5}{2})\beta\Pi^{m-3}+(m-2)\gamma\Pi^{m-2}$$
$$+(m-\tfrac{3}{2})\delta\Pi^{m-1}+(m-1)\varepsilon\Pi^m;$$

d'où il suit que Π^m, Π^{m-1}, etc., peuvent s'abaisser successivement à des degrés inférieurs, et qu'on peut continuer la réduction jusqu'à ce qu'on n'ait que des quantités au-dessous de Π^3; car la réduction de Π^3 est encore possible, parce que, dans le cas de $m=3$, le terme qui semblerait devoir contenir Π^{-1} s'évanouit. Donc P étant une fonction entière de x, l'intégrale $\int\frac{Pdx}{R}$ pourra toujours se réduire à une quantité algébrique, plus une transcendante qui sera constamment de la forme

$$\int(A+Bx+Cx^2)\frac{dx}{R}.$$

2. Considérons maintenant la formule dans toute sa généralité, et soit P une fonction rationnelle quelconque de x : on fera comme s'il était question d'intégrer la fraction rationnelle Pdx; on extraira d'abord la partie entière qui peut y être contenue, et cette partie sera traitée comme il vient d'être dit. On décomposera ensuite le reste en plusieurs fractions partielles, selon le nombre des facteurs du dénominateur; de là résulteront autant de termes dans l'intégrale totale, et chacun de ces termes pourra être représenté par l'expression générale $N\int\frac{dx}{(1+nx)^k R}$. Or, il est facile de réduire tous les termes de cette espèce à des termes semblables, où $k=1$; c'est ce que nous allons prouver dans un instant. Observons auparavant que si le dénominateur, au lieu d'être complexe, était simplement x^2, l'intégrale $\int\frac{dx}{x^k R}$, et toutes les semblables où $k>1$, pourraient se déterminer par le moyen de l'intégrale $\int\left(\frac{A}{x}+B+Cx+Dx^2\right)\frac{dx}{R}$, il suffirait pour cela de donner à $m-4$ des valeurs négatives dans la formule de l'article (1).

Revenons au terme général $\int\frac{dx}{(1+nx)^k R}$ que nous appellerons Γ^k. Si l'on fait $1+nx=\omega$, et qu'on prenne les coefficiens α', β', etc., de manière qu'on ait l'équation identique

$$\alpha+\beta\left(\frac{\omega-1}{n}\right)+\gamma\left(\frac{\omega-1}{n}\right)^2+\delta\left(\frac{\omega-1}{n}\right)^3+\varepsilon\left(\frac{\omega-1}{n}\right)^4$$
$$=\alpha'+\beta'\omega+\gamma'\omega^2+\delta'\omega^3+\varepsilon'\omega^4,$$

on trouvera, par la différenciation de la quantité $\omega^{-k+1}R$ cette formule générale :

$$\frac{-R}{n(1+nx)^{k-1}}=(k-1)\alpha'\Gamma^k+(k-\tfrac{3}{2})\beta'\Gamma^{k-1}+(k-2)\gamma'\Gamma^{k-2}$$
$$+(k-\tfrac{5}{2})\delta'\Gamma^{k-3}+(k-3)\varepsilon'\Gamma^{k-4}.$$

D'où il suit que les quantités Γ, Γ^3, etc., peuvent se déterminer au moyen de Γ^1, Γ^0, Γ^{-1}, Γ^{-2}; or, $\Gamma^0=\int\frac{dx}{R}$, $\Gamma^{-1}=\int(1+nx)\frac{dx}{R}$, $\Gamma^{-2}=\int(1+nx)^2\frac{dx}{R}$.

Donc en général la formule $\int\frac{dx}{(1+nx)^k R}$, et toutes les formules semblables dans lesquelles k est plus grand que l'unité, se réduiront toujours à une partie algébrique, plus une intégrale de la forme

$$\int\left(\frac{A}{1+nx}+B+Cx+Dx^2\right)\frac{dx}{R}.$$

3. Nous conclurons de là que, quelle que soit la fonction rationnelle de x représentée par P, l'intégrale $\int \frac{P dx}{R}$ sera toujours décomposable en trois parties principales, la première algébrique, la seconde de la forme $\int (A + Bx + Cx^2) \frac{dx}{R}$, et la troisième renfermant un ou plusieurs termes de la forme $N \int \frac{dx}{(1+nx)R}$, où le coefficient n peut être réel ou imaginaire.

On voit, par cette analyse, que le nombre des transcendantes comprises dans la formule $\int \frac{P dx}{R}$ est très limité. Il n'en existe que de deux espèces principales, l'une de la forme $\int (A + Bx + Cx^2) \frac{dx}{R}$, l'autre de la forme $\int \frac{dx}{(1+nx)R}$. J'observe même que tant que n est réel, cette seconde espèce est comprise dans la première, et s'y ramène immédiatement, en faisant $1 + nx = \frac{1}{z}$.

Ces réductions générales une fois aperçues, nous allons suivre une autre route pour parvenir à une connaissance plus précise des mêmes transcendantes.

CHAPITRE II.

Manière de faire disparaître les puissances impaires de la variable sous le radical.

4. Le radical étant toujours $\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4)}$, supposons que la quantité sous le signe soit décomposée en deux facteurs réels $\zeta + 2\eta x + \theta x^2$, $\lambda + 2\mu x + \nu x^2$. Ces facteurs doivent être de même signe pour que le radical soit réel; ainsi on peut supposer

$$\zeta + 2\eta x + \theta x^2 = (\lambda + 2\mu x + \nu x^2) y^2.$$

De là on tire

$$x = \frac{\mu y^2 - \eta + \sqrt{[(\mu y^2 - \eta)^2 + (\lambda y^2 - \zeta)(\theta - \nu y^2)]}}{\theta - \nu y^2};$$

et si l'on appelle, pour abréger, Y le radical de cette expression, on aura $\frac{dx}{R} = \frac{dy}{Y}$. La valeur de x étant substituée dans P, on voit que la différentielle $\frac{Pdx}{R}$ ou $\frac{Pdy}{Y}$ se décomposera toujours en deux parties, l'un rationnelle et intégrable par les règles ordinaires, l'autre affectée du radical Y, mais telle, qu'il n'y aura que des puissances paires de y sous le radical et hors du radical. Ainsi l'intégration de la formule $\frac{Pdx}{R}$ se réduit toujours à celle d'une formule de la même nature, dans laquelle P et R ne contiennent que des puissances paires de x.

5. Cette méthode est générale; cependant, comme la valeur de x, qui doit être substituée dans P, est un peu compliquée, il ne sera pas inutile de faire voir qu'on peut parvenir au même but par une substitution beaucoup plus simple, qui consiste à faire $x = \frac{p+qy}{1+y}$, p et q étant deux constantes indéterminées.

Reprenons les facteurs $\zeta + 2\eta x + \theta x^2$, $\lambda + 2\mu x + \nu x^2$, et substituons dans chacun d'eux la valeur de x, on pourra faire abstraction du dénominateur commun qui sort du radical, et pour que les puissances impaires de y disparaissent dans les numérateurs, il faudra qu'on ait

$$\zeta + \eta(p+q) + \theta pq = 0,$$
$$\lambda + \mu(p+q) + \nu pq = 0.$$

Ces deux équations donneront des valeurs rationnelles de $p+q$ et de pq; mais pour que p et q soient réels, il faut encore que $(p+q)^2 - 4pq$, ou $(p-q)^2$ soit positif. Or, on peut distinguer deux cas :

1°. Si la quantité $\alpha + \beta x + \gamma x^2 +$ etc. n'a pas tous ses facteurs réels, on pourra supposer que $\lambda + 2\mu x + \nu x^2$ en contient deux imaginaires, et qu'on a en conséquence $\lambda\nu > \mu^2$. Mais la seconde des équations en p et q donne

$$(p-q)^2 = \left(\frac{\lambda + \nu pq}{\mu} - \frac{2\mu}{\nu}\right)^2 + \frac{4\lambda\nu - 4\mu^2}{\nu^2};$$

donc, dans ce premier cas, le second membre est positif, et les valeurs de p et q seront réelles.

2°. Si la quantité $\alpha + \beta x +$ etc. a tous ses facteurs réels, et qu'en la décomposant en deux facteurs du second degré, comme on vient de faire, il n'en résulte pas des valeurs réelles pour p et q; alors on observera qu'il

y a deux autres manières de décomposer la quantité du quatrième degré en deux facteurs du second, et l'on peut être assuré que ces deux nouvelles combinaisons donneront des valeurs réelles pour p et q. En voici la démonstration.

Soient a, b, c, d les quatre valeurs de x qu'on a en faisant $R = 0$, les équations qui déterminent p et q pourront s'écrire ainsi :

$$ab - \tfrac{1}{2}(a+b)(p+q) + pq = 0,$$
$$cd - \tfrac{1}{2}(c+d)(p+q) + pq = 0,$$

et il en résulte

$$\frac{p+q}{2} = \frac{ab-cd}{a+b-c-d},$$
$$\left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = \frac{a-c.a-d.b-c.b-d}{(a+b-c-d)^2}.$$

Or, on est maître de rendre positif le numérateur de cette dernière quantité; car, supposons que a, b, c, d, soient écrites dans l'ordre de leur grandeur, les racines négatives venant après les positives; alors les différences $a-b$, $a-c$, etc., seront toutes positives, et $p-q$ sera réel. On aura encore $p-q$ réel, si on prend pour a et b les extrêmes en grandeur des racines a, b, c, d. Enfin, la troisième combinaison donnerait $p-q$ imaginaire.

Donc par la substitution de $x = \frac{p+qy}{1+y}$, il est toujours possible de faire disparaître les puissances impaires de la variable sous le radical, et en même temps on obtient cet avantage, que les deux facteurs, sous le nouveau radical, sont réels et de la forme $f + gy^2$, ce qui est un point essentiel, et qu'on n'obtiendrait pas toujours par la première méthode.

Remarquons qu'il y a deux cas particuliers à examiner.

1°. Lorsque deux des racines a, b, c, d sont égales entre elles, le radical R se simplifie, et l'intégrale ne dépend plus que des arcs de cercle et des logarithmes.

2°. Si l'on a $a+b=c+d$, il suffit d'une simple permutation pour cesser d'avoir $a+b=c+d$; mais on peut aussi profiter de cette circonstance pour faciliter la transformation. En effet, les deux facteurs de la quantité sous le radical étant alors de la forme $\lambda + \nu(x^2 + 2mx)$, $\zeta + \theta(x^2 + 2mx)$, il est clair que si on fait $x + m = y$, les puissances impaires de la variable disparaîtront.

CHAPITRE III.

Réduction de la différentielle $\frac{Pdx}{R}$ *à la forme* $\frac{Qd\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}$.

6. Puisque, par une première préparation, on peut faire en sorte qu'il n'y ait pas de puissances impaires de la variable sous le radical, nous ferons désormais $R=\sqrt{(\alpha+\beta x^2+\gamma x^4)}$. Nous supposerons aussi que P est une fonction paire de x; car quelle que soit la fonction rationnelle P, on peut toujours faire $P=M+Nx$, M et N étant des fonctions paires de x : or la partie $\frac{Nxdx}{R}$ se ramène aux règles ordinaires en faisant $x^2=y$; ainsi toute la difficulté se réduit à intégrer la formule $\frac{Mdx}{R}$, dans laquelle M est une fonction paire de x.

Cela posé, nous allons prouver, par l'énumération des différens cas, que la différentielle $\frac{dx}{R}$ peut toujours se ramener à la forme $\frac{md\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}$, où l'on a c plus petit que l'unité.

Premier cas. Supposons les facteurs de $\alpha+\beta x^2+\gamma x^4$ imaginaires, et représentons cette quantité par $\lambda^2+2\lambda\mu x^2\cos\theta+\mu^2x^4$, λ et μ étant positifs, et $\cos\theta$ pouvant être positif ou négatif. On fera $x=\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}.\tang\frac{1}{2}\varphi$, et prenant $c=\sin\frac{1}{2}\theta$, on aura la transformée

$$\frac{dx}{R}=\frac{1}{2\sqrt{\lambda\mu}}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}.$$

Second cas. Soit $\alpha+\beta x^2+\gamma x^4=m^2(1+p^2x^2)(1-q^2x^2)$; la limite de x étant $\frac{1}{q}$, on fera $x=\frac{1}{q}\cos\psi$ et $\frac{p^2}{p^2+q^2}=c^2$, ce qui donnera

$$\frac{dx}{R}=\frac{c}{pm}\cdot\frac{-d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}.$$

Si l'on voulait que la transformée fût positive, il faudrait faire..... $\cot\psi=\sqrt{(1-c^2)}\tang\varphi$, ce qui donne directement

$$x^2=\frac{\sin^2\varphi}{q^2+p^2\cos^2\varphi},$$

et la transformée serait

$$\frac{dx}{R} = \frac{c}{mp} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}}.$$

Troisième cas. Soit $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 = m^2 (1 + p^2 x^2)(x^2 - q^2)$, on fera $x = \frac{q}{\cos \varphi}$, $\frac{1}{1 + p^2 q^2} = c^2$, et l'on aura

$$\frac{dx}{R} = \frac{c}{m} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}}.$$

Quatrième cas. Soit $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 = m^2 (1 + p^2 x^2)(1 + q^2 x^2)$, on supposera $p > q$, et faisant $x = \frac{\tang \varphi}{p}$, $\frac{p^2 - q^2}{p^2} = c^2$, on aura

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{mp} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}}.$$

Cinquième cas. Soit $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 = m^2 (1 - p^2 x^2)(1 - q^2 x^2)$, on supposera $p > q$, et faisant $px = \sin \varphi$, $\frac{q}{p} = c$, la transformée sera

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{mp} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}}.$$

Cette formule servira depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{p}$; le radical R serait imaginaire depuis $x = \frac{1}{p}$ jusqu'à $x = \frac{1}{q}$; mais il redevient réel depuis $x = \frac{1}{q}$ jusqu'à $x = \infty$. Dans ce dernier cas, il faut écrire $R^2 = m^2 (p^2 x^2 - 1)(q^2 x^2 - 1)$, et faisant $qx = \frac{1}{\sin \phi}$, $\frac{q}{p} = c$, la transformée sera $\frac{-d\varphi}{mp\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \phi)}}$. Si l'on veut qu'elle soit positive, il faudra, comme ci-dessus, faire..... $\cot \varphi = \sqrt{(1 - c^2)} \cdot \tang \Psi$, ce qui donnera directement $x^2 = \frac{1 - c^2 \sin^2 \Psi}{q^2 \cos^2 \Psi}$, et la transformée sera

$$\frac{dx}{R} = \frac{c}{mp} \cdot \frac{d\Psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \Psi)}},$$

formule absolument semblable à la première; d'où il suit que l'intégrale de $\frac{dx}{R}$ pour le cas de $x > \frac{1}{q}$, se déduira toujours de la même intégrale, prise en supposant $x < \frac{1}{p}$.

Sixième cas. Enfin, soit $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 = m^2 (x^2 - q^2)(p^2 - x^2)$, alors x doit être compris entre p et q. Soit $p > q$, et soit fait $x = \frac{q}{\cos \Psi}$, on aura d'abord

$\frac{dx}{R} = \frac{d\Psi}{m\sqrt{(p^2-q^2-p^2\sin^2\Psi)}}$. Dans cette formule, l'angle Ψ a une limite; pour en introduire un indéfini, soit $\sin\Psi = c\sin\varphi$ et $c^2 = \frac{p^2-q^2}{p^2}$, on aura la transformée

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{mp}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}},$$

à laquelle on serait parvenu directement en faisant

$$x^2 = \frac{q^2}{1-c^2\sin^2\varphi}.$$

7. On peut remarquer maintenant, qu'abstraction faite du premier cas, les valeurs de x^2 qui opèrent la réduction cherchée, sont toujours de la forme $\frac{A+B\sin^2\varphi}{C+D\sin^2\varphi}$, où les coefficiens sont constans. Il ne s'agit plus que de substituer cette valeur de x^2 dans P, et la formule $\int\frac{Pdx}{R}$ sera transformée en une autre $\int\frac{Qd\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}$, dans laquelle c sera plus petit que l'unité, et Q sera une fonction rationnelle paire de $\sin\varphi$, laquelle contiendra $\sin\varphi$ au même degré que P contient x.

CHAPITRE IV.

Développement de la formule $\int\frac{Qd\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}$.

8. Nous représenterons dorénavant le radical $\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}$ par Δ, et aussi par $\Delta(\varphi)$ et $\Delta(c, \varphi)$, lorsqu'on le regardera comme fonction de φ, ou comme fonction de c et φ.

Considérons d'abord le cas où Q serait une fonction entière, et soit $Q = A + B\sin^2\varphi + C\sin^4\varphi + \text{etc.}$; si l'on représente pour abréger, l'intégrale $\int\frac{\sin^{2k}\varphi\,.\,d\varphi}{\Delta}$ par Z^{2k}, on aura

$$\int\frac{Qd\varphi}{\Delta} = AZ^0 + BZ^2 + CZ^4 + \text{etc.}$$

Mais en différenciant la quantité $\Delta\cos\varphi\sin^{2k-3}\varphi$, on trouve aisément la

formule

$$\Delta\cos\varphi\sin^{2k-3}\varphi=(2k-3)Z^{2k-4}-(1+c^2)(2k-2)Z^{2k-2}+c^2(2k-1)Z^{2k};$$

d'où il suit que Z^4, Z^6, etc., peuvent s'exprimer au moyen de Z^0 et Z^2, et qu'ainsi dans le cas où Q est une fonction entière, l'intégrale $\int\frac{Qd\varphi}{\Delta}$ est égale à une quantité algébrique, plus une intégrale de la forme $\int(A+B\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta}$.

9. Soit maintenant Q une fonction quelconque rationnelle de $\sin^2\varphi$; après avoir extrait la partie entière, et l'avoir traitée comme il vient d'être dit, le développement de la partie fractionnaire pourra toujours se faire de manière que chaque fraction partielle soit de la forme $\frac{N}{(1+n\sin^2\varphi)^k}$, n et N étant des coefficiens constans, réels ou imaginaires. Il s'agira donc de réduire la formule $\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^k\Delta}$, et toutes les semblables, aux formules les plus simples de la même espèce. Or, si l'on fait pour un moment $\sin\varphi=x$, cette formule deviendra

$$\int\frac{dx}{(1+nx^2)^k\sqrt{[1-(1+c^2)x^2+c^2x^4]}}.$$

Considérons, pour plus de généralité, la formule

$$\Pi^k=\int\frac{dx}{(1+nx^2)^k R},$$

dans laquelle R représente le radical $\sqrt{(\alpha+\beta x^2+\gamma x^4)}$, on trouvera, par les moyens déjà indiqués,

$$\frac{xR}{(1+nx^2)^{k-1}}=(2k-2)\left(\alpha-\frac{\beta}{n}+\frac{\gamma}{n^2}\right)\Pi^k-(2k-3)\left(\alpha-\frac{2\beta}{n}+\frac{3\gamma}{n^2}\right)\Pi^{k-1}$$
$$+(2k-4)\left(-\frac{\beta}{n}+\frac{3\gamma}{n^2}\right)\Pi^{k-2}-(2k-5)\frac{\gamma}{n^2}\Pi^{k-3}.$$

De là il résulte que le terme Π^k, et tous les semblables où k est plus grand que l'unité, peuvent s'exprimer en partie algébriquement, en partie par les quantités Π^1, Π^0, Π^{-1}, qui sont les plus simples de leur espèce. On peut même observer que si $1+nx^2$ était diviseur de la quantité sous le radical, auquel cas on aurait $\alpha-\frac{\beta}{n}+\frac{\gamma}{n^2}=0$, alors la formule précédente aurait un terme de moins; ainsi la quantité Π^k ne dépendrait plus que des deux Π^0 et Π^{-1}.

Donc la détermination de Π^k dépendra en général de la formule

$$\int\left(\frac{A}{1+nx^2}+B+Cx^2\right)\frac{dx}{R},$$

et en particulier lorsque $1+nx^2$ sera diviseur de R^2, on pourra faire disparaître ce dénominateur, et la détermination de Π^k ne dépendra plus que de la formule $\int(B+Cx^2)\frac{dx}{R}$.

10. L'application de ce résultat à l'intégrale $\int\frac{d\phi}{(1+n\sin^2\phi)^k\Delta}$ fait voir qu'en général cette intégrale dépendra de la suivante,

$$\int\left(\frac{A}{1+n\sin^2\phi}+B+C\sin^2\varphi\right)\frac{d\phi}{\Delta}.$$

Et dans le cas particulier où $1+n\sin^2\varphi$ sera facteur de $\cos^2\varphi.\Delta^2$, l'intégrale pourra être débarrassée du dénominateur, et ne dépendra plus que de la formule entière

$$\int(B+C\sin^2\varphi)\frac{d\phi}{\Delta}.$$

Ce cas particulier aura lieu si $n=-1$, et si $n=-c^2$, alors les formules sont $\int\frac{d\phi}{\cos^{2k}\varphi.\Delta}$, et $\int\frac{d\phi}{\Delta^{2k+1}}$; il est facile en effet de réduire l'une et l'autre à une partie algébrique, plus une intégrale de la forme $\int(A+B\sin^2\varphi)\frac{dx}{\Delta}$. On peut ajouter à ces deux cas celui de $\int\frac{d\phi}{\sin^{2k}\varphi.\Delta}$, qui est susceptible d'une semblable réduction, et qu'on effectuera par la formule de l'article 8.

Il résulte de cette analyse, que la formule générale $\int\frac{Qd\phi}{\Delta}$, réduite convenablement, contiendra, 1°. une partie algébrique; 2°. une intégrale de la forme $\int(A+B\sin^2\varphi)\frac{d\phi}{\Delta}$; 3°. une ou plusieurs parties de la forme... $\int\frac{N}{1+n\sin^2\varphi}.\frac{d\phi}{\Delta}$, dans chacune desquelles les coefficiens N et n auront des valeurs quelconques, réelles ou imaginaires.

CHAPITRE V.

Définition des fonctions elliptiques, et leur division en trois espèces.

11. Puisque les transcendantes que nous avons considérées, se réduisent toujours à ces deux formes $\int(A+B\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta}$, $\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta}$, il est clair qu'elles sont comprises dans la formule générale

$$H=\int\frac{A+B\sin^2\varphi}{1+n\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Nous appellerons désormais *fonctions* ou *transcendantes elliptiques*, les intégrales comprises dans cette formule. La transcendante H sera supposée s'évanouir ou commencer lorsque $\varphi=0$; son étendue sera déterminée par la variable φ, qu'on appellera *l'amplitude*; la constante c, toujours plus petite que l'unité, s'appellera *le module*; on pourra toujours représenter c par $\sin\theta$, et θ sera ce que nous appellons *l'angle du module*; en même temps $\sqrt{(1-c^2)}$ que nous désignerons constamment par b, pourra s'appeler *le complément du module*.

La quantité H, lorsqu'on ne considère que la variabilité de φ, peut se désigner par $H(\varphi)$; si l'on considère à la fois la variation du module et de l'amplitude, on peut la représenter par $H(c,\varphi)$, et ainsi de suite, si l'on voulait avoir égard à l'inégalité des coefficiens.

12. Il suffit de connaître toutes les valeurs de H, depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=90^\circ=\frac{\pi}{2}$, et l'on connaîtra facilement la valeur de cette transcendante pour une amplitude quelconque. En effet, soit $\varphi=i\pi\pm\alpha$, i étant un entier, et α un arc plus petit que $\frac{\pi}{2}$, alors on aura

$$H(\varphi)=2iH\left(\frac{\pi}{2}\right)\pm H(\alpha).$$

Il en est à cet égard de la fonction H comme des arcs d'ellipse, et en général

des arcs de toutes les courbes composées de quatre parties égales et semblables : un arc, quelque grand qu'il soit, et renfermant, si l'on veut, plusieurs circonférences, s'exprime toujours sans difficulté par le quart de la courbe et une portion de ce quart. La fonction déterminée $H\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est en quelque sorte l'unité des fonctions H, ou la fonction devenue complète : nous la désignerons par H^1.

Il ne paraît pas que la fonction H, prise dans toute sa généralité, puisse se réduire à des arcs d'ellipse; cela n'a lieu que lorsque $n=0$, ou lorsque quelque substitution peut faire disparaître le dénominateur $1+n\sin^2\varphi$, ce que nous ne croyons pas possible en général. Ainsi, la dénomination de fonction elliptique est impropre à quelques égards; nous l'adoptons néanmoins à cause de la grande analogie qu'on trouvera entre les propriétés de cette fonction et celles des arcs d'ellipse.

13. Puisque toute intégrale désignée par $\int\frac{Pdx}{R}$, se réduit à une partie algébrique, plus un certain nombre de termes qui peuvent chacun être assimilés à la fonction H, il s'ensuit qu'on pourrait n'admettre, pour les intégrales dont il s'agit, qu'une seule espèce de transcendantes, représentée par la fonction H, et dans laquelle les coefficiens A, B, n, seraient à volonté réels ou imaginaires. Mais pour bien pénétrer la nature de ces intégrales, et pouvoir établir entre elles les comparaisons et les réductions dont elles sont susceptibles, il est nécessaire de diviser la fonction H en plusieurs espèces distinctes, dont les propriétés deviendront plus sensibles, lorsqu'on les considérera chacune isolément.

J'observe d'abord que les arcs d'ellipse sont contenus dans la formule H. En effet, l'équation de l'ellipse étant $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, si l'on fait $x=a\sin\varphi$, on aura

$$y=b\cos\varphi,\quad \text{et}\quad \sqrt{(dx^2+dy^2)}=d\varphi\sqrt{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)},$$

formule qui se réduit à $d\varphi\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}$, en faisant $a=1$, et $c^2=1-b^2$.

Soit donc le demi-grand axe $CA=1$, le demi-petit axe $CB=b$; si, sur le cercle circonscrit DM'A, on prend l'arc $DM'=\varphi$, et qu'on abaisse du point M' la perpendiculaire M'P sur le grand axe, on déterminera sur l'ellipse un arc $BM=E$, dont la valeur sera Fig. 1.

$$E=\int\Delta d\varphi.$$

Cette fonction ou transcendante E constitue l'une des espèces dans les-

quelles nous diviserons la fonction H; elle se déduit de la formule générale en faisant $n=0$, $A=1$, $B=-c^2$.

L'équation de l'hyperbole étant $y^2=\frac{\beta^2}{\alpha^2}(x^2-\alpha^2)$, si l'on fait semblablement $x=\frac{\alpha}{\cos\varphi}$, on aura

$$y=\frac{\beta\sin\varphi}{\cos\varphi},\quad \text{et}\quad \sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{(\beta^2+\alpha^2\sin^2\varphi)};$$

mais pour avoir un radical entièrement semblable à celui de l'arc d'ellipse, il faut prendre d'autres dénominations. Soit donc le demi-axe transverse
Fig. 2. $CA=c$, son conjugué $CB=b$, la distance du centre au foyer $CF=1$, l'ordonnée $y=b^2\tang\varphi$, on aura l'abscisse $x=\frac{c}{\cos\varphi}\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}$, d'où résulte $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\int\frac{b^2d\varphi}{\Delta\cos^2\varphi}$. Mais en différenciant la quantité $\Delta\tang\varphi$, on a

$$d(\Delta\tang\varphi)=\frac{b^2d\varphi}{\Delta\cos^2\varphi}-\frac{b^2d\varphi}{\Delta}+\Delta d\varphi.$$

Donc, si l'on appelle Υ l'arc d'hyperbole AM qui répond à l'amplitude φ, ou dont l'ordonnée extrême $PM=b^2\tang\varphi$, on aura

$$\Upsilon=\Delta\tang\varphi-\int\Delta d\varphi+b^2\int\frac{d\varphi}{\Delta},$$

où l'on peut remarquer que la partie algébrique $\Delta\tang\varphi$ n'est autre chose que la tangente MZ terminée par la perpendiculaire CZ abaissée du centre sur cette tangente.

La fonction Υ est comprise dans la formule H, puisqu'elle s'en déduit en faisant $A=b^2$, $B=-b^2c^2$, $n=-1$; si l'on prend cette fonction pour la seconde espèce des transcendantes contenues dans la formule H, l'intégrale $\int\frac{d\varphi}{\Delta}$ pourra s'exprimer par les arcs E et Υ au moyen de l'équation

$$b^2\int\frac{d\varphi}{\Delta}=E+\Upsilon-\Delta\tang\varphi.$$

Enfin, comme on peut mettre H sous la forme

$$H=A'\int\frac{d\varphi}{\Delta}+B'\int\Delta d\varphi+C'\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta},$$

il ne restera plus à considérer qu'une troisième espèce de transcendantes,

représentée par la formule

$$\Pi = \int \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)\,\Delta}.$$

Telle serait donc la division des fonctions elliptiques en trois espèces, si l'on admettait les arcs E et Υ comme constituant les deux premières espèces, et c'est en effet la première idée qui se présente dans ce genre de recherches.

14. Mais, par un examen plus approfondi des propriétés de ces fonctions, on trouve que la fonction $F = \int \frac{d\varphi}{\Delta}$ doit être préférée à l'arc d'hyperbole Υ, pour en faire l'une des trois espèces de fonctions elliptiques, et que même cette fonction $\int \frac{d\varphi}{\Delta}$ doit être considérée comme plus simple que l'arc d'ellipse $\int \Delta d\varphi$.

En effet, on prouvera ci-après que la fonction F peut s'exprimer par deux arcs d'ellipse; mais l'inverse n'a pas lieu, et un arc d'ellipse ne peut pas s'exprimer par deux fonctions telles que F, ce qui indique déjà que la fonction E est d'une nature plus composée que la fonction F. Mais cette conséquence se manifeste plus clairement encore par l'examen des propriétés respectives de ces fonctions.

La propriété la plus remarquable des fonctions F, est qu'on peut déterminer, par des opérations purement algébriques, une fonction égale à la somme ou à la différence de deux autres fonctions; d'où il suit qu'on peut déterminer algébriquement une fonction multiple, sous-multiple ou en général qui soit dans un rapport rationnel avec une fonction donnée; propriété que les fonctions F partagent avec les arcs de cercle et les logarithmes, et qui a lieu quand même ces fonctions, considérées comme des intégrales ou des arcs de courbe, n'auraient pas l'origine commune $\varphi = 0$, et commenceraient à des points quelconques.

Les arcs d'ellipse et les arcs d'hyperbole sont de toutes les autres transcendantes, celles qui approchent le plus de jouir de la même propriété, mais elles n'en jouissent pas d'une manière absolue. Ainsi, deux arcs étant donnés sur l'une de ces courbes, à compter du même point où $\varphi = 0$, on peut trouver algébriquement, non pas un arc égal à leur somme, mais un arc égal à cette somme, plus ou moins une quantité algébrique, ce qui prouve que les arcs Υ et E sont d'une nature plus composée que les fonctions F. On doit donc regarder ces dernières comme tenant le premier rang après les arcs de cercle et les logarithmes.

Enfin, un motif qui suffirait seul pour faire préférer les fonctions F aux fonctions T dans le classement des fonctions elliptiques, c'est qu'on ne peut supposer $\varphi > \frac{1}{2}\pi$ dans la fonction T, tandis qu'on peut supposer φ d'une grandeur quelconque dans les fonctions F et E qui, en général, croissent presque proportionnellement à l'angle φ. Or, les applications du calcul intégral, principalement celles qui concernent la mécanique, donnent souvent lieu d'attribuer à la variable principale φ des valeurs quelconques, composées, si l'on veut, de plusieurs circonférences. L'emploi des fonctions T ferait donc naître des embarras ou même des erreurs, ce qui n'est jamais à craindre dans celui des fonctions F.

15. Cela posé, les fonctions ou transcendantes elliptiques comprises dans la formule H, seront divisées en trois espèces :

La première et la plus simple est représentée par la formule $F = \int \frac{d\varphi}{\Delta}$;

La seconde est l'arc d'ellipse, compté depuis le petit axe, et dont l'expression est $E = \int \Delta d\varphi$;

Enfin, la troisième espèce est représentée par la formule..... $\Pi = \int \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2\varphi)\Delta}$; elle contient, outre le module c commun aux deux autres espèces, un paramètre n qui peut être à volonté positif ou négatif, réel ou imaginaire.

On pourrait croire que le cas où n est imaginaire, diffère essentiellement du cas où n est réel, et qu'il exige la formation d'une quatrième espèce de fonctions elliptiques; mais, par des réductions et des transformations que nous exposerons ci-après, on verra que cette quatrième espèce est inutile à considérer, et qu'on peut ainsi restreindre la troisième espèce aux seuls cas où n est réel. Nous regarderons seulement comme conditions nécessaires et communes aux trois espèces de fonctions, que l'amplitude φ et le module c soient réels, et qu'en même temps c soit plus petit que l'unité. Dans cette supposition, le radical $\Delta = \sqrt{(1 - c^2 \sin^2\varphi)}$ est toujours positif, parce qu'il ne se réduit jamais à zéro.

CHAPITRE VI.

Comparaison des fonctions elliptiques de la première espèce.

16. Tous les Géomètres connaissent l'intégrale algébrique complète qu'Euler a donnée de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\iota x^4)}}+\frac{dy}{\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\iota y^4)}}=0.$$

D'après les réductions indiquées dans l'article 6, cette équation peut, sans perdre de sa généralité, être mise sous la forme

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}+\frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}=0;$$

et alors son intégrale est $F(\varphi)+F(\psi)=F(\mu)$, μ étant une constante arbitraire. Mais la même intégrale trouvée par la méthode d'Euler, s'exprime ainsi :

$$\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\sqrt{(1-c^2\sin^2\mu)}=\cos\mu\ldots(a'),$$

et voici comment on peut vérifier ce résultat *a posteriori*.

J'observe d'abord que l'équation (a') peut être mise sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}\cos\mu\cos\varphi+\sin\mu\sin\varphi\,\Delta(\psi)=\cos\psi\\ \cos\mu\cos\psi+\sin\mu\sin\psi\,\Delta(\varphi)=\cos\varphi\end{array}\right\}\ldots(b');$$

car ces équations, dégagées chacune du radical qu'elles contiennent, conduisent au même résultat que l'équation (a') dégagée de son radical. Ce résultat est $1=\cos^2\varphi+\cos^2\psi+\cos^2\mu-2\cos\varphi\cos\psi\cos\mu+c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi\sin^2\mu$.

Cela posé, si l'on différencie l'équation (a') après avoir divisé chaque membre par $\sin\varphi\sin\psi$, afin de faire disparaître le radical, on aura

$$\frac{d\varphi}{\sin\varphi}(\cos\psi-\cos\mu\cos\varphi)+\frac{d\psi}{\sin\psi}(\cos\varphi-\cos\mu\cos\psi)=0.$$

Substituant dans celle-ci les valeurs de $\cos\psi-\cos\mu\cos\varphi$ et $\cos\varphi-\cos\mu\cos\psi$, données par les équations (b'), on aura

$$\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = 0.$$

De là on voit que l'équation transcendante $F(\varphi) + F(\psi) = F(\mu)$ est satisfaite, soit par l'équation algébrique (a'), soit par l'une des équations (b'); car ces trois équations peuvent être employées indistinctement l'une pour l'autre.

Si l'on avait $c = 0$, la fonction $F(\varphi)$ se réduirait à l'arc φ, et alors ayant $\varphi + \psi = \mu$, on en conclurait

$$\begin{aligned} \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi &= \cos\mu, \\ \cos\mu \cos\varphi + \sin\mu \sin\varphi &= \cos\psi, \\ \cos\mu \cos\psi + \sin\mu \sin\psi &= \cos\varphi. \end{aligned}$$

C'est en effet ce que donnent les équations (a') et (b') dans le cas de $c = 0$, qui réduit à l'unité les radicaux $\Delta(\mu)$, $\Delta(\varphi)$, $\Delta(\psi)$.

17. C'est ici le lieu de faire observer, d'après Lagrange [1], que si l'on
Fig. 3. construit un triangle sphérique dont les côtés AB, AC, BC soient respectivement égaux aux amplitudes μ, φ, ψ, alors les angles opposés C, B, A, seront tels, qu'on aura

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{\cos\mu - \cos\varphi\cos\psi}{\sin\varphi\sin\psi} = -\sqrt{(1 - c^2\sin^2\mu)}, \\ \cos B &= \frac{\cos\varphi - \cos\mu\cos\psi}{\sin\mu\sin\psi} = \sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}, \\ \cos A &= \frac{\cos\psi - \cos\mu\cos\varphi}{\sin\mu\sin\varphi} = \sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\sin^2 C = c^2\sin^2\mu, \quad \sin^2 B = c^2\sin^2\varphi, \quad \sin^2 A = c^2\sin^2\psi,$$

ou

$$c = \frac{\sin C}{\sin\mu} = \frac{\sin B}{\sin\varphi} = \frac{\sin A}{\sin\psi}.$$

Ces équations s'accordent avec les propriétés connues des triangles sphériques; elles prouvent en même temps que, dans tout triangle sphérique formé par trois côtés φ, ψ, μ, qui satisfont à l'équation transcendante $F(\varphi) + F(\psi) = F(\mu)$, le rapport du sinus de chaque angle au sinus du côté opposé, sera égal au module [2]. On voit de plus que dans le triangle

---

[1] *Théorie des Fonct. analyt.*, pag. 85.

[2] Le triangle polaire formé par les trois côtés $\pi - \varphi$, $\pi - \psi$, $\pi - \mu$ et par les trois côtés $\pi - B$, $\pi - A$, $\pi - C$, ou bien encore le triangle sphérique formé par les trois angles φ, ψ, $\pi - \mu$ et par les trois côtés B, A, $\pi - C$, satisferait également à l'équation

ABC, les deux angles A et B sont toujours aigus, et l'angle C toujours obtus.

Si l'on fait ensuite $F(\mu) + F(\theta) = F(\nu)$, il faudra observer que, dans le nouveau triangle sphérique qui aura pour côtés μ, θ, ν, l'angle opposé au côté μ devra être aigu et avoir le même sinus que l'angle opposé au côté μ dans le premier triangle, pour que son rapport avec $\sin\mu$ soit égal à c dans les deux triangles; ainsi il faudra que l'angle opposé au côté μ dans le second triangle, soit supplément de l'angle opposé au côté μ dans le premier; d'où naît cette construction.

Prolongez le côté AC vers E, faites $CD = \theta$; du point D et d'un intervalle $DE = \mu$, décrivez un arc qui rencontrera CE en E, et déterminera le second triangle CDE, dans lequel on aura $CE = \nu$, et le côté ν satisfera à l'équation $F(\nu) = F(\varphi) + F(\psi) + F(\theta)$. Fig. 3.

Cette construction peut être continuée aussi loin que les limites des côtés des triangles sphériques peuvent le permettre, c'est-à-dire tant que le grand côté n'est pas plus grand qu'une demi-circonférence. Et il est évident qu'on pourrait se servir de la même construction pour trouver successivement les angles φ_2, φ_3, φ_4, etc., tels qu'on eût $F(\varphi_2) = 2F(\varphi)$, $F(\varphi_3) = 3F(\varphi)$, etc., ce qui servirait à la multiplication de la fonction F. Mais, nous le répétons, ces constructions ne peuvent s'étendre que jusqu'aux limites des triangles sphériques, tandis que l'analyse ne connaît aucune borne.

Il est bon de remarquer que la considération du triangle sphérique ABC offre un moyen fort simple de vérifier l'intégrale (a'). En effet, si, en regardant μ et C comme constans, on fait varier infiniment peu les côtés φ et ψ, on aura $Aa = Cb$, ou $-d\varphi \cos A = d\psi \cos B$; mais on a trouvé $\cos A = \Delta(\psi)$ et $\cos B = \Delta(\varphi)$; donc $\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = 0$.

Ainsi, une application fort simple de la trigonométrie sphérique aurait suffi pour trouver l'intégrale algébrique complète de l'équation transcendante $\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = 0$.

18. Étant données deux fonctions elliptiques de première espèce $F(\varphi)$, $F(\psi)$, si l'on veut trouver une troisième fonction $F(\mu)$ égale à leur

---

$F(\varphi) + F(\psi) = F(\mu)$. Mais le rapport qui était c dans le premier triangle, deviendrait $\frac{1}{c}$ dans ceux-ci.

somme, il faut déterminer μ par l'équation (a'), ce qui donnera les formules

$$\sin\mu = \frac{\sin\varphi\cos\psi\Delta(\psi) + \sin\psi\cos\varphi\Delta(\varphi)}{1 - c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

$$\cos\mu = \frac{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\Delta(\varphi)\Delta(\psi)}{1 - c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

$$\Delta(\mu) = \frac{\Delta(\varphi)\Delta(\psi) - c^2\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\psi}{1 - c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{\operatorname{tang}\varphi\Delta(\psi) + \operatorname{tang}\psi\Delta(\varphi)}{1 - \operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi\Delta(\varphi)\Delta(\psi)}.$$

D'après cette dernière formule, si l'on prenait deux angles auxiliaires φ', ψ', tels que

$$\operatorname{tang}\varphi' = \operatorname{tang}\varphi\Delta(\psi), \quad \operatorname{tang}\psi' = \operatorname{tang}\psi\Delta(\varphi),$$

il en résulterait

$$\mu = \varphi' + \psi',$$

ce qui est un moyen de calculer aisément l'angle μ par les tables des sinus.

Si l'on fait $\mu = \frac{1}{2}\pi$, c'est-à-dire, si l'on a $F(\varphi) + F(\psi) = F'$, les deux fonctions $F(\varphi)$, $F(\psi)$ seront en quelque sorte complémens l'une de l'autre, puisque leur somme est égale à la fonction complète F', alors on aura immédiatement par l'équation (a'),

$$b\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi = 1:$$

c'est la relation nécessaire entre les angles φ et ψ, pour qu'on ait $F(\varphi) + F(\psi) = F(\frac{1}{2}\pi) = F'$. On en déduit, pour l'expression de ψ en φ,

$$\sin\psi = \frac{\cos\varphi}{\Delta(\varphi)}, \quad \cos\psi = \frac{b\sin\varphi}{\Delta(\varphi)}, \quad \Delta(\psi) = \frac{b}{\Delta(\varphi)}.$$

19. Étant données deux fonctions $F(\varphi)$, $F(\psi)$, si l'on veut connaître une troisième fonction $F(\mu)$ qui soit égale à leur différence, en sorte qu'on ait

$$F(\varphi) - F(\psi) = F(\mu),$$

la solution de ce problème se déduira aisément de celle du problème précédent, et l'on aura pour résultat les formules

$$\sin\mu = \frac{\sin\varphi\cos\psi\Delta(\psi) - \sin\psi\cos\varphi\Delta(\varphi)}{1 - c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

$$\cos\mu = \frac{\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\Delta(\varphi)\Delta(\psi)}{1 - c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

$$\Delta(\mu) = \frac{\Delta(\varphi)\Delta(\psi) + c^2\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\psi}{1 - c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{\operatorname{tang}\varphi\Delta(\psi) - \operatorname{tang}\psi\Delta(\varphi)}{1 + \operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi\Delta(\varphi)\Delta(\psi)}.$$

Si, dans cette dernière formule on fait $\tang \varphi' = \tang \varphi \Delta(\psi)$, et $\tang \psi' = \tang \psi \Delta(\varphi)$, on aura $\mu = \varphi' - \psi'$.

Ces formules pour la différence se déduiraient des formules pour la somme, en changeant simplement dans celles-ci le signe de ψ, et conservant $\Delta(\psi)$ positive. Il est inutile d'ailleurs de faire observer l'analogie qui règne entre les valeurs de $\sin\mu$, $\cos\mu$, et celles de $\sin(\varphi \pm \psi)$, $\cos(\varphi \pm \psi)$; elles coïncideraient entièrement si l'on avait $c = 0$.

20. Puisqu'on connaît algébriquement l'amplitude de la fonction égale à la somme ou à la différence de deux fonctions données, il est clair qu'on peut trouver algébriquement une fonction multiple d'une fonction donnée, et qu'en général on peut résoudre sur la multiplication et la division des fonctions elliptiques de la première espèce, les mêmes problèmes qu'on résout sur la multiplication et la division des arcs de cercle. Désignons par φ_n l'amplitude de la fonction qui contient n fois la fonction dont l'amplitude est φ, en sorte qu'on ait $F(\varphi_n) = nF(\varphi)$; il s'agirait d'avoir l'expression générale de $\sin$ et $\cos\varphi_n$, par le moyen de $\sin$ et $\cos\varphi$.

Les cas extrêmes n'ont aucune difficulté. Si l'on a $c = 0$, alors $\varphi_n = n\varphi$, et l'expression de $\sin\varphi_n$, ainsi que celle de $\cos\varphi_n$, se déduisent de la formule connue

$$\cos\varphi_n + \sqrt{-1}\sin\varphi_n = (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^n.$$

Si l'on a $c = 1$, alors la fonction $F(\varphi)$ devient $\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$, de sorte qu'on a $F(\varphi) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right)$, et la formule pour la multiplication des fonctions est

$$\frac{1+\sin\varphi_n}{1-\sin\varphi_n} = \left(\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right)^n.$$

La difficulté est de trouver l'expression générale de $\sin\varphi_n$, lorsque c a une valeur quelconque entre 0 et 1.

21. Considérons d'abord le cas le plus simple, qui est celui de la duplication; il suffira de faire $\psi = \varphi$ dans les formules de l'article 18, ce qui donnera

$$\sin\varphi_2 = \frac{2\sin\varphi\cos\varphi\Delta(\varphi)}{1 - c^2\sin^4\varphi},$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{1 - 2\sin^2\varphi + c^2\sin^4\varphi}{1 - c^2\sin^4\varphi},$$

$$\Delta(\varphi_2) = \frac{1 - 2c^2\sin^2\varphi + c^2\sin^4\varphi}{1 - c^2\sin^4\varphi},$$

$$\tang\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \tang\varphi\Delta(\varphi).$$

La dernière de ces formules se déduirait immédiatement de la considéra-
Fig. 3. tion du triangle sphérique ABC qui, étant isoscèle dans le cas dont il s'agit, donne $\tang \frac{1}{2} BA = \cos B \tang BC = \tang \varphi \Delta(\varphi)$.

Ainsi, en prenant l'auxiliaire B, telle que $\sin B = c \sin \varphi$, on aura φ_2, par l'équation $\tang \frac{1}{2} \varphi_2 = \cos B \tang \varphi$, on trouvera semblablement φ_4 au moyen de φ_2, φ_8 au moyen de φ_4, etc., de sorte que la fonction F sera multipliée par 2, 4, 8, 16, etc.

Réciproquement, étant donné φ_2, on trouvera φ par l'équation

$$\sin \varphi = \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi_2}{\sqrt{[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Delta(\varphi_2)]}},$$

ou bien, appelant, par analogie $\varphi_{\frac{1}{2}}$ l'amplitude de la fonction qui est égale à la moitié de $F(\varphi)$, on aura

$$\sin \varphi_{\frac{1}{2}} = \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi}{\sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Delta)}}.$$

Si l'on fait $c \sin \varphi = \sin \mathcal{C}$, ce qui donne $\Delta = \cos \mathcal{C}$, on aura plus simplement

$$\sin \varphi_{\frac{1}{2}} = \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi}{\cos \frac{1}{2} \mathcal{C}},$$

et l'on satisfera ainsi à l'équation $F(\varphi_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} F(\varphi)$.

On trouvera semblablement les amplitudes $\varphi_{\frac{1}{4}}$, $\varphi_{\frac{1}{8}}$, etc., par lesquelles la bisection de la fonction $F(\varphi)$ peut être continuée indéfiniment.

22. Venons à la multiplication par un nombre quelconque. Pour cela, considérons trois amplitudes consécutives φ_{n-1}, φ_n, φ_{n+1}, qui, suivant l'indication, répondent aux fonctions multiples $(n-1)F$, nF, $(n+1)F$. Les formules pour la somme et la différence de deux fonctions, s'appliqueront aux équations $F(\varphi_{n+1}) = F(\varphi_n) + F(\varphi)$, $F(\varphi_{n-1}) = F(\varphi_n) - F(\varphi)$, et il en résultera

$$\sin \varphi_{n+1} + \sin \varphi_{n-1} = \frac{2\Delta \cos\varphi \sin\varphi_n}{1 - c^2 \sin^2\varphi \sin^2\varphi_n},$$

$$\cos \varphi_{n+1} + \cos \varphi_{n-1} = \frac{2 \cos\varphi \cos\varphi_n}{1 - c^2 \sin^2\varphi \sin^2\varphi_n}.$$

Ces formules où Δ et φ restent constamment les mêmes tandis que n varie, paraissent aussi commodes qu'il est possible pour en tirer les valeurs successives de $\sin \varphi_2$, $\sin \varphi_3$, $\cos \varphi_2$, $\cos \varphi_3$, etc.

Soit, pour abréger, $2\Delta \cos\varphi = p$, $1 - c^2 \sin^4\varphi = q$, $c^2 \sin^4\varphi = r$, on trouvera pour la suite des sinus,

$$\sin\varphi_2 = \frac{p}{q}\sin\varphi,$$

$$\sin\varphi_3 = \frac{p^2-q^2}{q^2-rq^2}\sin\varphi,$$

$$\sin\varphi_4 = \frac{(1+r)p^2-2q^2}{q^4-rp^4}\,pq\sin\varphi,$$

$$\sin\varphi_5 = \frac{q^6-3p^2q^4+(1+2r)p^4q^2-r^2p^6}{q^6-3rp^2q^4+r(r+2)p^4q^2-rp^6}\sin\varphi,$$

etc.,

et pour celle des cosinus, on a, en faisant de plus $s = 1 - 2\sin^2\varphi + r = 2\cos^2\varphi - q$,

$$\cos\varphi_2 = \frac{1-2\sin^2\varphi+r}{q} = \frac{s}{q},$$

$$\cos\varphi_3 = \frac{2sq-q^2+p^2r}{q^2-rp^2}\cos\varphi,$$

$$\cos\varphi_4 = \frac{q^4-2q^2p^2\sin^2\varphi+rp^4}{q^4-rp^4},$$

$$\cos\varphi_5 = \left(\frac{2sq(q^2-rp^2)(2sq-q^2+rp^2)}{q^6-3rp^2q^4+(r^2+2r)p^4q^2-rp^6}-1\right)\cos\varphi,$$

etc.

Mais ces expressions étant entièrement développées, deviennent fort prolixes, et leur loi est très difficile à apercevoir.

Lorsqu'il s'agira de calculer trigonométriquement φ_n par le moyen de φ, on y parviendra aisément de cette manière. Les deux formules générales étant divisées l'une par l'autre, donneront

$$\frac{\sin\varphi_{n+1}+\sin\varphi_{n-1}}{\cos\varphi_{n+1}+\cos\varphi_{n-1}} = \Delta\,\mathrm{tang}\,\varphi_n,$$

ce qui se réduit à cette formule très simple,

$$\mathrm{tang}\left(\tfrac{1}{2}\varphi_{n+1}+\tfrac{1}{2}\varphi_{n-1}\right) = \Delta\,\mathrm{tang}\,\varphi_n;$$

d'où l'on tire successivement

$$\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \Delta\,\mathrm{tang}\,\varphi,$$

$$\mathrm{tang}\left(\tfrac{1}{2}\varphi_3+\tfrac{1}{2}\varphi\right) = \Delta\,\mathrm{tang}\,\varphi_2,$$

$$\mathrm{tang}\left(\tfrac{1}{2}\varphi_4+\tfrac{1}{2}\varphi_2\right) = \Delta\,\mathrm{tang}\,\varphi_3,$$

etc.

On connaîtra ainsi successivement par un calcul fort simple, les valeurs de φ_2, φ_3, etc. On pourrait aussi procéder par de plus grands intervalles pour arriver plus tôt à un terme éloigné; car on a semblablement

$$\tang\left(\tfrac{1}{2}\varphi_{n+i}+\tfrac{1}{2}\varphi_{n-i}\right)=\Delta i \tang \varphi_i,$$

Δi étant le Δ qui répond à l'amplitude φ_i.

23. La division d'une fonction elliptique donnée de première espèce en un certain nombre de parties égales, est un problème algébrique qu'on résoudra par le développement des formules qui servent à la multiplication. On a déjà vu les formules pour diviser par 2 ou par une puissance de 2. Supposons qu'on veuille diviser en trois parties égales la fonction F; on appellera φ_3 l'amplitude de la fonction donnée, et φ celle de la fonction qui en est le tiers. Faisant donc $\sin\varphi_3 = a$ et $\sin\varphi = x$, on aura, pour déterminer x, l'équation

$$a=\frac{3x-4(1+c^2)x^3+6c^2x^5-c^4x^9}{1-6c^2x^4+4c^2(1+c^2)x^6-3c^4x^8},$$

équation qui est du neuvième degré. Elle serait du degré vingt-cinquième pour la quintisection, et ainsi de suite.

Les équations sont moins élevées de moitié lorsqu'il s'agit de diviser la fonction complète F^1 en un nombre impair de parties; il en est à cet égard de la division des fonctions F, comme de celle des arcs de cercle; tandis que la division d'un arc quelconque en n parties égales, exige la résolution d'une équation du $n^{ième}$ degré, celle du quart de circonférence n'exige que la résolution d'une équation du degré $\frac{n-1}{2}$.

Supposons en général $\varphi_n = \frac{1}{2}\pi$, afin qu'on ait $F(\varphi) = \frac{1}{n}F^1$, on aura donc aussi $F(\varphi_{n-i}) + F(\varphi_i) = nF(\varphi) = F^1$; ce qui donne la formule $\tang(\varphi_{n-i}) = \frac{1}{b}\cot\varphi_i$, d'où l'on déduit

$$\tang\varphi_{n-1}=\frac{1}{b}\cot\varphi,$$
$$\tang\varphi_{n-2}=\frac{1}{b}\cot\varphi_2,$$
$$\tang\varphi_{n-3}=\frac{1}{b}\cot\varphi_3,$$
$$\text{etc.}$$

Mais à cause de $\varphi_n = \frac{1}{2}\pi$, on a

$$\tang\left(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}\varphi_{n-2}\right)=\Delta\tang\varphi_{n-1}=\frac{\Delta}{b}\cot\varphi,$$
$$\tang\left(\tfrac{1}{2}\varphi_{n-1}+\tfrac{1}{2}\varphi_{n-3}\right)=\Delta\tang\varphi_{n-3},$$
$$\text{etc.}$$

De là résultent des formules assez simples pour déterminer φ_{n-1}, φ_{n-2}, etc.; développant celles qui donnent φ_2, φ_3, etc., on aura par la rencontre de

ces deux suites, l'équation qui doit déterminer φ, et le calcul sera moins compliqué que par le développement de $\sin\varphi_2$ ou de $\cos\varphi_2$.

Lorsque $n=3$, on aura immédiatement $\tang(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\varphi)=\frac{\Delta}{b}\cot\varphi$, ou $b\sin\varphi=\Delta(1-\sin\varphi)$. Soit $\sin\varphi=x$, et l'équation pour déterminer x sera

$$0=1-2x+2c^2x^3-c^2x^4:$$

c'est l'équation qui donne la trisection de la fonction F^1, et l'on voit que son degré $=\frac{9-1}{2}$.

Lorsque $n=5$, il faudra éliminer φ_3 des deux équations

$$\tang(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}\varphi_3)=\frac{\Delta}{b}\cot\varphi$$
$$\tang(\tfrac{1}{2}\varphi_3+\tfrac{1}{2}\varphi)=\Delta\tang\varphi_2,$$

et ensuite mettre au lieu de $\tang\varphi_2$ sa valeur $\frac{2\Delta\sin\varphi\cos\varphi}{1-2\Delta\sin^2\varphi+c^2\sin^4\varphi}$; on obtiendra ainsi, en faisant $\sin\varphi=x$,

$$\frac{1+x}{bx}\sqrt{(1-c^2x^2)}=\frac{1+2x-2c^2x^3-c^2x^4}{1-2x+2c^2x^3-c^2x^4},$$

équation pour la quintisection de la fonction F^1, laquelle étant entièrement développée, montera au degré $12=\frac{25-1}{2}$.

24. Revenons à l'équation de la trisection; elle offre, dans sa résolution, quelques particularités qui méritent d'être remarquées.

Soit d'abord $x=y+\frac{1}{2}$, cette équation deviendra

$$y^4-\tfrac{3}{2}y^2+\left(\frac{2}{c^2}-1\right)y-\tfrac{3}{16}=0.$$

Supposons que le premier membre soit le produit des deux facteurs y^2-py+q, y^2+py-r, on aura, pour déterminer p, q, r, les équations $q-r=p^2-\frac{3}{2}$, $qr=\frac{3}{16}$, $p(q+r)=\frac{2}{c^2}-1$. Des deux premières on tire $(q+r)^2=p^4-3p^2+3$, et cette valeur étant substituée dans la troisième, il en résulte $p^6-3p^4+3p^2=\left(\frac{2}{c^2}-1\right)^2$, ou $(p^2-1)^3=\frac{4b^2}{c^4}$. Soit donc

$$k=\sqrt[3]{\left(\frac{4b^2}{c^4}\right)},$$

et l'on aura $p^2-1=k$, ou $p=\sqrt{(1+k)}$; d'où résulte

$$q=\tfrac{1}{2}k-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\sqrt{(k^2-k+1)},$$
$$r=\tfrac{1}{2}k-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}\sqrt{(k^2-k+1)}.$$

Ainsi les quatre valeurs de y seront

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+k)} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{[2-k-2\sqrt{(1-k+k^2)}]}$$
$$y = -\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+k)} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{[2-k+2\sqrt{(1-k+k^2)}]}.$$

Les deux premières sont imaginaires, et des deux autres, il n'y a que la racine positive qui convienne à la question; ainsi l'on aura $y + \frac{1}{2}$, ou

$$\sin\varphi = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+k)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{[2-k+2\sqrt{(1-k+k^2)}]};$$

de sorte que cette valeur pourra se construire géométriquement, lorsque k sera donné. Or, quel que soit k, on a

$$c^2 = \frac{2}{1+\sqrt{(1+k^2)}},$$

valeur qui est toujours comprise entre les limites 1 et 0.

Soit $k = 1$, on aura $c^2 = \frac{2}{1+\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2}-1)$ et

$$\sin\varphi = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Soit $k = 2$, on aura $c^2 = \frac{1}{2} = b^2$ et

$$\sin\varphi = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sqrt{3})}$$
$$\cos^2\varphi = (\sqrt{3}-1)\sqrt{(\tfrac{1}{2}\sqrt{3})} = \sqrt{(2\sqrt{3}-3)}.$$

Voilà deux cas dans lesquels la trisection de la fonction F^1 se fait par de simples extractions de racines carrées.

Pour troisième exemple de trisection, prenons le module $c = \sqrt{2}-1$, nous aurons $b^2 = 2c$, $k = \frac{2}{c} = 2\sqrt{2}+2$, d'où $\sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) = 2\sin 15°$.

Les applications que nous aurons occasion de faire par la suite exigent que nous considérions encore le cas de $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})} = \cos\frac{\pi}{12}$, et celui de $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})} = \sin\frac{\pi}{12}$.

Soit d'abord $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$, on aura $k^2 = \frac{4b^2}{c^4} = \frac{4b^2c^2}{c^6} = \frac{1}{4c^6}$; donc $k = \frac{1}{2c^2}\sqrt[3]{2}$; d'après cette valeur, on trouvera

$$\sin\varphi = \sqrt{3}-1.$$

Mais comme les réductions pour parvenir à ce résultat seraient fort pénibles, il est plus simple de revenir à l'équation primitive

$$0 = 1 - 2x + \frac{2+\sqrt{3}}{4}(2x^9 - x^4),$$

et on vérifiera facilement que cette équation est satisfaite en faisant $x = \sqrt{3}-1$;

alors on a $\sin^2\varphi = 4 - 2\sqrt{3}$, $\cos^2\varphi = 2\sqrt{3} - 3$, et $\tang^2\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}}$, ou $\tang\varphi = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}$. C'est la valeur de φ qui donne $F(\varphi) = \frac{1}{3}F^1$, lorsque $c = \cos\frac{\pi}{12} = \sin 75^\circ$.

Soit maintenant $c = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)} = \sin\frac{\pi}{12}$, on aura encore $k = \frac{1}{2c^2}.\sqrt[3]{2}$, et il faudra substituer cette valeur dans la formule générale pour connaître $\sin\varphi$; mais comme les réductions seraient encore fort pénibles, il sera plus simple de résoudre directement l'équation particulière à ce cas, laquelle est

$$0 = 1 - 2x + \frac{2-\sqrt{3}}{4}(2x^3 - x^4).$$

Or, d'après le cas précédent, cette équation doit être divisible par $x + 1 + \sqrt{3}$; supprimant donc ce facteur qui est inutile dans le cas présent, et faisant $\sqrt{3} + 1 = h$, on aura l'équation à résoudre

$$x^3 - h\sqrt{3}.x^2 + h^2\sqrt{3}.x - 2h = 0.$$

Soit $x = \frac{y+h}{\sqrt{3}}$, on aura la transformée

$$y^3 + 6hy + 12h + 4 = 0,$$

d'où l'on tire, par les formules connues $y = \sqrt[3]{4} - h\sqrt[3]{2}$. Faisant donc $\sqrt[3]{2} = m$, on aura cette valeur de x ou de $\sin\varphi$:

$$\sin\varphi = 1 - m + \frac{1 - m + m^2}{\sqrt{3}}.$$

Je remarque que l'équation $m^3 = 2$ donne $1 - m + m^2 = \frac{3}{1+m}$, et $(m+1)^2(m-1) = 3$, ou $(m+1)\sqrt{(m^2-1)} = \sqrt{3}$; on aura donc plus simplement,

$$\sin\varphi = 1 - m + \sqrt{(m^2-1)};$$

De là $\cos^2\varphi = (m-1)(m^2-1)^{\frac{1}{2}}(2+\sqrt{3}) = (m^2-1)^2\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$; donc enfin

$$\cos\varphi = (m^2-1)\sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)} = (m^2-1)\frac{2b}{\sqrt[4]{3}} = \frac{2b\sqrt[4]{27}}{(m+1)^2},$$

b étant mis à la place de $\sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)}$ ou $\cos\frac{\pi}{12}$. C'est l'expression la plus simple pour déterminer la valeur de φ qui satisfait à l'équation $F(\varphi) = \frac{1}{3}F^1$, dans le cas de $c = \sin\frac{\pi}{12}$.

Pour effectuer entièrement la trisection de la fonction F^2, il faut encore avoir la valeur de φ_2 qui donne $F(\varphi_2) = 2F(\varphi) = \frac{2}{3}F^1$. Or, φ_2 est facile à déduire de φ, soit par les formules de la duplication, soit par celles des fonctions complémentaires (art. 18), puisqu'on a $F(\varphi_2) + F(\varphi) = F^1$. On trouve ainsi

$$\cot\varphi_2 = b \operatorname{tang}\varphi,$$
$$\cos\varphi_2 = 1 - \sin\varphi:$$

la dernière est remarquable en ce qu'elle est indépendante du module.

Dans le dernier exemple où $c = \sin\frac{\pi}{12}$, on aura donc $\cos\varphi_2 = m - \sqrt{(m^2-1)}$, d'où l'on tire

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \frac{1-m+\sqrt{(m^2-1)}}{1+m-\sqrt{(m^2-1)}} = \sqrt{\left(\frac{m-1}{m+1}\right)} = \frac{\sqrt[4]{3}}{(m+1)^2},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \frac{\sqrt[4]{3}}{m+1} = \frac{\sqrt{(m^2-1)}}{\sqrt[4]{3}}.$$

La valeur de $\sin\varphi_2$ pourrait être déterminée directement par la trisection de la fonction $F(\pi)$, car il est évident qu'on a $F(\varphi_2) = \frac{2}{3}F^1 = \frac{1}{3}F(\pi)$. Soit donc $\sin\varphi_2 = y$, et en faisant dans la formule de la triplication (n° 23) $a = \sin\pi = 0$, on aura, pour déterminer y, l'équation

$$0 = 3 - 4(1+c^2)y^2 + 6c^2y^4 - c^4y^6,$$

qui n'a que la difficulté du quatrième degré.

25. Occupons-nous maintenant de l'équation pour la quintisection, qui étant entièrement développée, devient

$$0 = 1 - 4x^2 + 5c^2x^4 + 4b^2c^2x^6 - 5c^4x^8 + 4c^6x^{10} - c^6x^{12}$$
$$- 2x[1 - 5c^2x^2 + (6c^2+4c^4)x^4 - (4c^2+6c^4)x^6 + 5c^4x^8 - c^6x^{10}].$$

Pour donner au moins quelques exemples particuliers de la résolution de cette équation, on pourrait attribuer une valeur à x (en ayant soin qu'elle fût plus grande que la racine de l'équation $0 = 1 - 2x - 4x^2$); et d'après la valeur supposée de x, on voit que c^2 se déterminerait par une équation du troisième degré.

Mais la recherche des cas particuliers de solution, est une question d'analyse indéterminée qu'on peut résoudre plus facilement de la manière suivante.

Soit $p = 1 - c^2x^4$, $q = 2x(1 - c^2x^2)$, et l'équation de l'article 23 sera

$$\frac{p+q}{p-q} = \frac{(1+x)\sqrt{(1-c^2x^2)}}{bx}.$$

Élevant chaque membre au quarré, et retranchant de part et d'autre l'unité, on aura

$$\frac{4pq}{(p-q)^2} = \frac{p+q}{b^2x^2}.$$

Soit $p = mq$, cette équation donnera $b^2x^2 = \frac{(m+1)(m-1)^2}{4m} q$; soit donc encore

$$n = \frac{(m+1)(m-1)^2}{2m},$$

et l'on aura, en remettant la valeur de q, $b^2x = n(1 - c^2x^2)$, ce qui donne

$$c^2 = \frac{x-n}{x-nx^2}.$$

Mais de l'équation $p = mq$, ou $1 - c^2x^4 = 2mx(1 - c^2x^2)$, on tire

$$c^2 = \frac{2mx-1}{2mx^3-x^4}.$$

Égalant ces deux valeurs de c^2, il viendra $0 = 1 - (2m+n)x + x^2$.

De là se déduit une solution générale fort simple du problème que nous nous sommes proposé. Ayant pris pour m une valeur quelconque comprise entre 1 et $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618$ (car ces valeurs répondent aux limites $c = 1$ et $c = 0$), on en déduit $n = \frac{(m+1)(m-1)^2}{2m}$; ensuite

$$x = m + \tfrac{1}{2}n - \sqrt{[(m+\tfrac{1}{2}n)^2 - 1]},$$

$$c^2 = \frac{1 - n(m+\frac{1}{2}n) - n\sqrt{[(m+\frac{1}{2}n)^2-1]}}{1 - n(m+\frac{1}{2}n) + n\sqrt{[(m+\frac{1}{2}n)^2-1]}}.$$

Soit, par exemple, $m = \frac{3}{2}$, on aura $n = \frac{5}{24}$, de là

$$x = \frac{77 - 5\sqrt{145}}{48},$$

$$c^2 = \frac{767 - 25\sqrt{145}}{767 + 25\sqrt{145}}.$$

D'après cette valeur du module c et celle de $x = \sin\varphi$, on satisfera à l'équation $F(\varphi) = \frac{1}{5}F^1$; ensuite il sera facile d'avoir les valeurs de φ_2, φ_3, φ_4, par lesquelles on achèvera de diviser en cinq parties égales la fonction complète F^1.

26. Nous avons fait voir comment on trouve la relation entre φ_n et φ, pour que $F(\varphi_n) = nF(\varphi)$, n étant un nombre entier. S'il fallait trouver la relation entre φ et ψ pour que $F(\psi) = \frac{m}{n} F(\varphi)$, m et n étant des en-

tiers, on prendrait un angle auxiliaire ω, tel qu'on eût à la fois $n\mathrm{F}(\psi)=\mathrm{F}(\omega)$ et $m\mathrm{F}(\varphi)=\mathrm{F}(\omega)$. La première condition donnerait une équation algébrique entre les sinus des angles ψ et ω, la seconde en donnerait une entre ceux des angles φ et ω; d'où, éliminant ω, on aura la relation cherchée entre φ et ψ.

En général, on voit qu'il sera toujours possible de satisfaire par une équation algébrique à l'équation transcendante

$$0=m\mathrm{F}(\varphi)+n\mathrm{F}(\psi)+p\mathrm{F}(\omega)+\text{etc.},$$

les coefficiens m, n, p, etc. étant des nombres entiers à volonté, qui n'aient pas tous le même signe. C'est une conséquence toute simple de ce que l'équation transcendante $\mathrm{F}(\varphi)+\mathrm{F}(\psi)=\mathrm{F}(\mu)$ est représentée par une équation algébrique.

27. De là il résulte qu'on peut toujours trouver l'intégrale algébrique complète de l'équation différentielle

$$\frac{md\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}\pm\frac{nd\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}=0,$$

m et n étant des nombres entiers; car l'intégrale est d'abord $m\mathrm{F}(\varphi)\pm n\mathrm{F}(\psi)$ $=$ const. Et si l'on suppose que lorsque $\psi=0$, on ait $\varphi=\mu$, la constante sera $m\mathrm{F}(\mu)$, et l'on aura l'intégrale

$$m\mathrm{F}(\varphi)\pm n\mathrm{F}(\psi)=m\mathrm{F}(\mu).$$

Soit ω une auxiliaire telle que $\mathrm{F}(\mu)=\mathrm{F}(\varphi)\pm\mathrm{F}(\omega)$, on aura en même temps $m\mathrm{F}(\omega)=n\mathrm{F}(\psi)$; si l'on exprime ensuite ces deux équations en termes algébriques, et qu'on élimine ω, on aura l'intégrale algébrique cherchée dans laquelle μ sera la constante arbitraire.

En général, si l'on avait l'équation suivante, dans laquelle m, n, p, etc. sont des entiers positifs ou négatifs,

$$0=\frac{md\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}+\frac{nd\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}+\frac{pd\omega}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}}+\text{etc.},$$

l'intégrale complète sera $\mathrm{F}(\mu)=m\mathrm{F}(\varphi)+n\mathrm{F}(\psi)+p\mathrm{F}(\omega)+\text{etc.}$, μ étant la constante arbitraire, et cette intégrale pourra toujours être représentée par une équation algébrique, quel que soit le nombre des termes, pourvu qu'il ne soit pas infini.

Si l'on désigne par $\mathrm{R}(x)$ le radical $\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}$, et par $\mathrm{R}(y)$, $\mathrm{R}(z)$, etc. des radicaux semblables en y, z, etc.; si de plus m, n, p, etc. désignent des nombres entiers positifs ou négatifs, il est clair

que l'équation

$$0 = \frac{mdx}{R(x)} + \frac{ndy}{R(y)} + \frac{pdz}{R(z)} + \text{etc.},$$

pourra toujours être réduite à la forme précédente, et qu'ainsi elle aura toujours une intégrale algébrique complète.

Rien n'empêcherait de supposer que z et les variables suivantes fussent des fonctions algébriques données de x et y; alors l'équation précédente ne renfermerait que deux variables, et malgré l'infinité de formes dont elle est susceptible, elle admettrait toujours une intégrale algébrique complète. C'est peut-être la seule manière de généraliser le résultat d'Euler, concernant l'équation $\frac{dx}{R(x)} + \frac{dy}{R(y)} = 0$. Lagrange s'est proposé de trouver des cas d'intégrabilité de l'équation $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$, sans supposer que les deux polynomes X et Y sont entièrement semblables [1]; mais il ne paraît pas que les recherches de ce grand Géomètre l'aient conduit au-delà de l'équation d'Euler, car l'équation qu'il donne page 119, comme étant plus générale, s'y ramène immédiatement en faisant $v = ky$, et donnant au coefficient k une valeur convenable. Ainsi, il est très douteux qu'avec deux termes seulement, l'équation d'Euler puisse être généralisée; mais, avec un plus grand nombre, on voit qu'elle admet une grande extension.

28. Puisque les fonctions F peuvent être multipliées ou divisées à volonté, cette propriété fournit un moyen assez simple de les évaluer par approximation. D'abord nous supposerons que φ ne surpasse pas $\frac{1}{2}\pi$, car, suivant l'article 12, tous les cas se réduisent à celui-là.

Cela posé, on déterminera $\varphi_{\frac{1}{2}}$ par l'art. 21, de manière que $F(\varphi_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}F(\varphi)$, et l'intégrale $\int \frac{d\varphi_{\frac{1}{2}}}{\Delta(\varphi_{\frac{1}{2}})}$ aura une étendue moindre que $\int \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}$, de près de moitié, si c n'est pas trop près de l'unité. Par une seconde bisection, on peut faire en sorte que $F(\varphi_{\frac{1}{4}}) = \frac{1}{4}F(\varphi)$, et l'intégrale que représente $F(\varphi_{\frac{1}{4}})$ aura encore une étendue près de deux fois moindre, ainsi de suite. Mais lorsque l'amplitude ψ de la formule qu'on considère est devenue très petite, la fonction $F(\psi)$ se réduit sensiblement à l'arc ψ. Donc, quelle que soit la première valeur de φ, la fonction correspondante $F(\varphi)$ sera égale au dernier terme de la suite φ, $2\varphi_{\frac{1}{2}}$, $4\varphi_{\frac{1}{4}}$, $8\varphi_{\frac{1}{8}}$, etc.; et, dans la plupart des cas, on obtiendra cette limite par un calcul assez court.

---

[1] Mémoires de Turin, tome IV.

EXEMPLE.

Soit proposé de trouver la valeur de F lorsque $c = \sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)} = \sin 75°$ et $\tang \varphi = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}$; on trouvera, par les formules de l'art. 21, ce qui suit:

$$\begin{array}{ll}
\varphi = 47°\ 4'\ 30''91 & \epsilon = 45°\ 0'\ 0''00 \\
\varphi_{\frac{1}{2}} = 25.36.\ 5,64 & \epsilon_{\frac{1}{2}} = 24.40.10,94 \\
\varphi_{\frac{1}{4}} = 13.\ 6.30,98 & \epsilon_{\frac{1}{4}} = 12.39.15,83 \\
\varphi_{\frac{1}{8}} = 6.35.40,74 & \epsilon_{\frac{1}{8}} = 6.22.\ 8,40, \\
\varphi_{\frac{1}{16}} = 3.18.\ 8,75, & \text{etc.} \\
\text{etc.} &
\end{array}$$

Les deux dernières valeurs donnent

$$8\varphi_{\frac{1}{8}} = 52°45'25''92$$
$$16\varphi_{\frac{1}{16}} = 52.50.20,00.$$

Leur différence est 4'54'',08; et comme, par la nature de ces approximations, un résultat doit approcher de la limite environ quatre fois plus que le précédent, nous ajouterons au dernier résultat le tiers de la différence 4'54'',08, qui est 1'38'',03, et nous aurons ainsi, pour la valeur de F, l'arc très approché

$$52°51'58'',03,$$

qui en parties du rayon $= \frac{\pi}{2} \times 0.5874013 = 0.9226878$.

Cette méthode pourrait devenir très longue lorsque c est fort près de l'unité, et φ peu différent de 90°. Nous en donnerons ci-après une plus expéditive.

CHAPITRE VII.

De la Lemniscate et d'une autre Courbe algébrique dont les arcs représentent généralement la fonction F.

29. La fonction E est représentée très simplement par un arc d'ellipse dont l'origine est fixée à l'extrémité du petit axe; si l'on se proposait de représenter semblablement la fonction F par un arc de courbe algébrique, ce problème paraîtrait d'abord assez difficile; cependant nous sommes parvenu à en trouver une solution générale et satisfaisante par les moyens que nous allons exposer.

Le cas qui se rencontre le plus souvent et qui mérite une attention particulière, est celui où l'on a $c = b = \sqrt{\frac{1}{2}}$; alors l'angle du module qui est de 45°, tient le milieu entre toutes les valeurs qu'il peut avoir depuis 0° jusqu'à 90°. Dans ce cas, la fonction $F(c, \varphi)$ peut être représentée généralement par un arc de la courbe algébrique, nommée *lemniscate*.

On sait que l'équation de cette courbe est $(y^2 + x^2)^2 = k^2(x^2 - y^2)$, Fig. 4. en supposant le demi-axe $CA = k$, l'abscisse $CP = x$ et l'ordonnée $PM = y$. On satisfait à cette équation en faisant $x = k \cos\varphi \,.\, \sqrt{(1 - c^2 \sin^2\varphi)}$, $y = \frac{k}{\sqrt{2}} \sin\varphi \cos\varphi$, et il en résulte l'élément de la courbe $ds = \ldots \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\varphi)}}$; intégrant et faisant $k = \sqrt{2}$, on aura $s = F(c, \varphi)$, de sorte que la fonction $F(c, \varphi)$ est représentée dans toute sa généralité par l'arc de lemniscate AM compté depuis l'extrémité du demi-axe : cet arc croît continuellement avec l'amplitude φ qui détermine l'autre extrémité.

Dans le premier quart AMC de cette courbe, la valeur de φ s'étend depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; ainsi le quart de courbe AMC qu'on peut désigner par s' sera égal à la fonction complète $F'c$; dans le second quart CNB, la valeur de φ s'étend depuis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $\varphi = \pi$; dans le troisième BN'C, depuis $\varphi = \pi$ jusqu'à $\varphi = \frac{3}{2}\pi$, et enfin dans le quatrième CM'A, depuis $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ jusqu'à $\varphi = 2\pi$.

De là on voit que les arcs de la lemniscate jouissent de toutes les propriétés des fonctions elliptiques de la première espèce; c'est-à-dire qu'ils

peuvent être ajoutés, retranchés, multipliés ou divisés algébriquement comme les arcs de cercle. Ainsi, étant donné un arc quelconque MO, on peut, à compter d'un point donné H, déterminer algébriquement un autre arc HI ou HL qui soit dans un rapport rationnel donné avec l'arc MO. Il suffit, pour cela, de déterminer φ d'après une équation de la forme $F\beta - F\alpha = \pm \frac{m}{n}(F\varphi - F\gamma)$, à laquelle correspond toujours une équation algébrique.

A plus forte raison peut-on diviser algébriquement un arc donné en parties égales. Par exemple, s'il s'agit du quart de la courbe AMC, on déterminera son milieu K par l'équation $\cot\varphi = \sqrt{b} = \sqrt{c}$, d'où résultent les coordonnées $x = \frac{1}{\sqrt{(1+c)}}$, $y = \frac{\sqrt{c}}{1+c}$. Si l'on veut déterminer l'arc AM égal au tiers de AMC, on fera (art. 24), $\cos\varphi = \sqrt[4]{(2\sqrt{3}-3)}$.

30. Considérons maintenant la courbe formée d'après les équations

$$x = h\sin\varphi\,(1 + \tfrac{1}{3}m\sin^2\varphi),$$
$$y = bh\cos\varphi\,(1 + m - \tfrac{1}{3}m\cos^2\varphi),$$

on trouvera, en éliminant $\sin\varphi$, que l'équation de cette courbe est du sixième degré, et qu'elle ne contient que des puissances paires de x et de y, ce qui prouve qu'elle est partagée en quatre parties égales, et semblables par les axes des coordonnées.

Des équations supposées, on tire par la différentiation

$$dx = \quad hd\varphi\cos\varphi\,(1 + m\sin^2\varphi),$$
$$dy = -\,bhd\varphi\sin\varphi\,(1 + m\sin^2\varphi);$$

donc l'élément de la courbe $ds = h\Delta d\varphi\,(1 + m\sin^2\varphi)$, et en intégrant

$$s = hE + \frac{mh}{3c^2}[(2c^2 - 1)E + b^2F - c^2\Delta\sin\varphi\cos\varphi].$$

Pour faire disparaître l'arc d'ellipse E, soit $m = \frac{3c^2}{1-2c^2}$, et ensuite $h = \frac{3c^2}{b^2m} = \frac{1-2c^2}{b^2}$, on aura

$$s = F - \frac{c^2}{b^2}\Delta\sin\varphi\cos\varphi,$$

ou

$$F(c, \varphi) = s + \frac{c^2}{b^2}\Delta\sin\varphi\cos\varphi.$$

Ainsi, on voit que la fonction F, dont le module c est à volonté, pourvu qu'il soit plus petit que $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou $\sin 45°$, s'exprime par l'arc de courbe s augmenté de la quantité algébrique $\frac{c^2}{b^2}\Delta\sin\varphi\cos\varphi$; cette quantité addition-

nelle, toujours plus petite que $\frac{1}{2}$, devient nulle dans les deux limites $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Appelons s^1 le quart de courbe compris entre ces deux limites, et l'on aura la fonction complète $F^1 c = s^1$.

Dans cette solution, les coordonnées x et y sont ainsi exprimées :

$$x = \frac{\sin\varphi}{b^2}(1 - 2c^2 + c^2\sin^2\varphi),$$

$$y = \frac{1}{b}\cos\varphi(1 + c^2\sin^2\varphi);$$

donc le demi-axe dirigé suivant la ligne des y, $CB = \frac{1}{b}$; c'est le demi- Fig 4a.
grand axe, et le demi-axe dirigé suivant la ligne des x, $CA = 1$; c'est le demi-petit axe. Si l'on cherche le rayon de courbure en un point quelconque, on trouvera pour son expression, $r = \frac{\Delta^3}{b^3}(1 - 2c^2 + 3c^2\sin^2\varphi)$. Au point B, extrémité du grand axe, on aura $\varphi = 0$ et $r = \frac{1 - 2c^2}{b^3} = b - \frac{c^4}{b^3}$, et au point A, extrémité du petit axe, on aura $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ et $r = 1 + c^2$. Pour savoir si, entre ces deux points, le rayon de courbure, qui est toujours positif, croît continuellement, ou s'il est susceptible d'un *maximum*, il faut prendre la différentielle de r qu'on trouvera de la forme..... $Pd\varphi(1 + 2c^2 - 5c^2\sin^2\varphi)$, P étant une quantité positive. Ainsi tant qu'on aura $1 + 2c^2 > 5c^2$, ou $c^2 < \frac{1}{3}$, le rayon de courbure ira toujours en augmentant depuis le point B jusqu'au point A : mais si c^2, qu'on suppose toujours $< \frac{1}{2}$, est cependant $> \frac{1}{3}$, alors il y aura un point où le rayon de courbure sera le plus grand possible, c'est celui où l'on aura $\sin^2\varphi = \frac{1+2c^2}{5c^2}$, ou $\cos^2\varphi = \frac{3c^2 - 1}{5c^2}$, et le rayon *maximum* sera $r = \left(\frac{8 - 4c^2}{5}\right)\left(\frac{4 - 2c^2}{5b^2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Dans tous les cas, si l'on décrit un quart d'ellipse AEB sur les mêmes demi-axes $CA = 1$, $CB = \frac{1}{b}$, l'arc AEB enveloppera le quart de courbe AKB.

En effet, dans l'ellipse, le rayon de courbure en $B = \frac{\overline{CA}^2}{CB} = b$, plus grand que le rayon de courbure de la courbe BKA au même point, puisque celui-ci $= b - \frac{c^4}{b^3}$. De même le rayon de courbure de l'ellipse en A $= \frac{\overline{CB}^2}{CA} = \frac{1}{b^2}$, plus grand encore que celui de la courbe au même point, lequel est $1 + c^2$. Donc en effet l'ellipse enveloppe la courbe, et l'on en

peut conclure que l'arc BKA, représenté par $F'c$, est moindre que le quart d'ellipse BEA représenté par $\frac{b}{b'}E'c$; ainsi l'on aura toujours $F'c < \frac{b}{b'}E'c$, ce qu'on peut vérifier par d'autres principes.

La courbe dont nous nous occupons, a cette propriété commune avec l'ellipse, qu'on peut trouver tant d'arcs qu'on voudra, dont la différence soit égale à une ligne droite, c'est-à-dire, soit déterminable algébriquement. De même, étant donné un arc s, on pourra trouver algébriquement un autre arc s' tel, que la différence de leurs multiples $ms - m's'$ soit égale à une ligne droite, et cela soit que les arcs dont il s'agit aient pour origine fixe le point B, soit qu'ils aient leur origine en d'autres points. Mais ces propriétés ne méritent pas de nous arrêter; ce qu'il nous importe de démontrer, c'est que toute fonction $F(c, \varphi)$ peut être représentée par un arc de la courbe, sans addition d'aucune quantité algébrique.

31. Supposons d'abord $\varphi < 90°$, je dis qu'on pourra toujours trouver sur le quart de courbe BKA deux points M et N tels, que l'arc intercepté MN sera égal à la fonction $F(c, \varphi)$. En effet, la quantité $\Delta \sin\varphi \cos\varphi$ étant nulle pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 90°$, il y aura une valeur de φ pour laquelle cette quantité est un *maximum*. Soit cette valeur $\varphi = \mu$ et K le point correspondant, l'amplitude μ sera déterminée par l'équation

$$0 = 3c^2 \sin^4\mu - 2(1 + c^2)\sin^2\mu + 1,$$

d'où l'on tire

$$\sin^2\mu = \frac{1}{1 + c^2 + \sqrt{(1 - c^2 + c^4)}}.$$

A compter du point K, ainsi déterminé, la quantité $\Delta \sin\varphi \cos\varphi$ diminuera continuellement, tant dans le sens KMB que dans le sens KNA, depuis son *maximum* en K jusqu'à la valeur zéro qu'elle a aux points B et A.

Donc, si T est la valeur de $\Delta \sin\varphi \cos\varphi$ au point M de l'arc BMK, où nous supposerons $\varphi = \psi$, il y aura sur l'autre arc KNA un point correspondant N où $\Delta\varphi . \sin\varphi \cos\varphi$ aura la même valeur T; soit ω l'amplitude du point N, on aura $\Delta\psi . \sin\psi \cos\psi = \Delta\omega . \sin\omega \cos\omega$. Et parce que les arcs BM, BN sont représentés par les valeurs $F\psi + \frac{c^2}{b^2}\Delta\psi . \sin\psi \cos\psi$, $F\omega + \frac{c^2}{b^2}\Delta\omega . \sin\omega \cos\omega$, il est clair que leur différence MN aura pour valeur $F\omega - F\psi$, sans addition d'aucune quantité algébrique.

Cela posé, si l'on veut que la fonction $F\phi$, dont l'amplitude donnée ϕ est moindre que 90°, soit représentée par le même arc MN, il suffira de satisfaire aux deux équations

$$F\omega - F\psi = F\phi,$$
$$\Delta\omega \,.\, \sin\omega \cos\omega = \Delta\psi \,.\, \sin\psi \cos\psi;$$

et d'abord la première équation, qui est sous forme transcendante, doit être remplacée par l'équation algébrique

$$\cos\omega \cos\psi + \Delta\phi \sin\omega \sin\psi = \cos\phi;$$

de celle-ci, on peut déduire, suivant les formules de l'art. 16,

$$\Delta\psi = \frac{\cos\psi - \cos\omega\cos\phi}{\sin\omega\sin\phi}, \quad \Delta\omega = \frac{\cos\phi\cos\psi - \cos\omega}{\sin\phi\sin\psi}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation $\Delta\omega \,.\, \sin\omega\cos\omega = \Delta\psi \,.\, \sin\psi\cos\psi$, on aura

$$(\cos\psi - \cos\omega\cos\phi)\sin^2\psi\cos\psi = (\cos\phi\cos\psi - \cos\omega)\sin^2\omega\cos\omega,$$

ou $(\sin^2\omega + \sin^2\psi)\cos\omega\cos\psi\cos\phi = \sin^2\omega\cos^2\omega + \sin^2\psi\cos^2\psi$;

soit $\cos\omega\cos\psi = p$, $\sin\omega\sin\psi = q$, les deux équations à résoudre seront

$$p\cos\phi\,(1 + q^2 - p^2) = p^2 + q^2 - (p^2 - q^2)^2,$$
$$p + q\Delta = \cos\phi.$$

On en tire, par l'élimination de p, l'équation du troisième degré,

$$0 = c^4\sin^2\phi\, q^3 + 3c^2\Delta\cos\phi\, q^2 - (2 + 2c^2 - 3c^2\sin\phi)q + \Delta\cos\phi.$$

Cette équation donnera toujours une valeur de q positive et plus petite que $\frac{\cos\phi}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{(1 + b^2\cos^2\phi)}}$; car en faisant $q = \frac{\cos\phi}{\Delta}$, le second membre devient négatif. On aura en même temps la valeur $p = \cos\phi - q\Delta$, laquelle sera positive et plus petite que l'unité; il en sera de même de $p + q = \cos\phi + q(1 - \Delta)$; car si cette quantité était égale à l'unité, on aurait $q = \frac{1 - \cos\phi}{1 - \Delta} = \frac{1 + \Delta}{c^2(1 + \cos\phi)}$, et par conséquent $q > \frac{1}{c^2}$ ou $q > 1$, ce qui n'a pas lieu. Connaissant p et q, on aura les angles ψ et ω par les équations

$$\cos(\omega + \psi) = p - q,$$
$$\cos(\omega - \psi) = p + q;$$

ainsi l'on connaîtra l'arc MN égal à la fonction $F(c, \phi)$ dans l'hypothèse que ϕ est $< 90°$.

Si l'amplitude φ est plus grande que 90°, elle pourra en général être représentée par $2k \times 90^\circ \pm \varphi^\circ$, φ° étant plus petite que 90°.

Soit s° l'arc égal à $F(c, \varphi^\circ)$ et s^1 l'arc égal à la fonction complète s^1, l'expression générale de la fonction F sera $F(c, \varphi) = 2ks^1 \pm s^\circ$.

La solution précédente suppose $c^2 < \frac{1}{2}$, ou $c <$ sin 45°; elle s'appliquerait sans difficulté au cas de $c^2 = \frac{1}{2}$; mais ce cas est résolu beaucoup plus simplement par la lemniscate. Si l'on a $c^2 > \frac{1}{2}$, il faudra transformer la fonction $F(c, \varphi)$ en une autre de même nature, où le module c soit plus petit que sin 45°; or, c'est ce qu'on pourra toujours faire très aisément par les formules que nous exposerons ci-après.

Avec cette modification, la solution que nous avons donnée doit être regardée comme absolument générale. Ainsi l'on pourra toujours trouver une courbe algébrique dont les arcs représentent toute fonction $F(c, \varphi)$ dans laquelle le module et l'amplitude sont pris à volonté. Cette courbe est du sixième degré et sa figure composée de quatre parties égales et semblables, concaves vers un même centre, se rapproche beaucoup de celle de l'ellipse.

32. Le problème que nous venons de résoudre serait beaucoup plus facile, si l'on n'exigeait pas que la courbe fût algébrique, et si l'on admettait dans l'expression des coordonnées les arcs de cercle et les logarithmes.

En effet, l'équation indéterminée à laquelle il faut satisfaire, étant $dx^2 + dy^2 = \frac{d\varphi^2}{1 - c^2 \sin^2\varphi}$, si on la met sous cette forme,

$$dx^2 + dy^2 = \frac{d\varphi^2 (\cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi)\,(\cos^2\psi + \sin^2\psi)}{(1 - c^2 \sin^2\varphi)^2},$$

on en tire immédiatement les valeurs suivantes:

$$dx = \frac{d\varphi\,(\cos\varphi \cos\psi - b \sin\varphi \sin\psi)}{1 - c^2 \sin^2\varphi},$$

$$dy = -\frac{d\varphi\,(\cos\varphi \sin\psi + b \sin\varphi \cos\psi)}{1 - c^2 \sin^2\varphi},$$

dans lesquelles on peut prendre sin ψ à volonté. Pour nous borner au cas le plus simple, soit $\psi = 0$, on aura

$$dx = \frac{d\varphi \cos\varphi}{1 - c^2 \sin^2\varphi}, \quad dy = -\frac{b\,d\varphi \sin\varphi}{1 - c^2 \sin^2\varphi};$$

et en intégrant

$$x = \frac{1}{2c} \log \frac{1 + c \sin\varphi}{1 - c \sin\varphi}, \quad y = \frac{1}{c} \text{ arc tang } \frac{c \cos\varphi}{b}.$$

La courbe décrite d'après ces deux équations sera donc telle, qu'un arc quelconque s compté depuis $\varphi = 0$, aura pour valeur $F(c, \varphi)$, et repré-

sentera généralement une fonction elliptique de première espèce, quelque soit son module.

Soit $c = \sin\theta$; si l'on fait successivement $\varphi = 0$ dans la valeur de y, et $\varphi = 90°$ dans celle de x, on aura les demi-axes de la courbe $B = \frac{\theta}{\sin\theta}$, $A = \frac{1}{2\sin\theta}\log\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)$; ces valeurs développées suivant les puissances de $\sin\theta$, sont $B = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\theta}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\sin^4\theta}{5} + \text{etc.}$, $A = 1 + \frac{\sin^2\theta}{3} + \frac{\sin^4\theta}{5} + \text{etc.}$; ainsi on a $B < A$, c'est-à-dire que le demi-axe dirigé dans le sens des y est toujours plus petit que le demi-axe dirigé dans le sens des x. Ces deux demi-axes augmentent continuellement à mesure que l'angle du module θ augmente; mais A augmente plus rapidement que B, puisqu'à la limite où $\theta = 90°$, on a $B = \frac{1}{2}\pi$ et $A = \frac{1}{2}\log\frac{2}{0} = \infty$.

Le rayon de la développée dans cette courbe $= \frac{\Delta}{b}$; ainsi de $\varphi = 0$ à $\varphi = 90°$, ce rayon diminue continuellement depuis $\frac{1}{b}$ jusqu'à 1, d'où l'on voit que la figure de la courbe se rapproche beaucoup de celle de l'ellipse. Nous remarquerons au reste que l'équation de la courbe entre les coordonnées x et y, se réduit à cette forme très simple $\cos cy = \frac{1}{2}b(e^{cx} + e^{-cx})$. Et parce qu'on peut multiplier les coordonnées x et y par $\frac{1}{c}$, cette équation sera encore plus simplement, $\cos y = \frac{1}{2}b\,(e^{x} + e^{-x})$; alors les arcs de cette courbe représenteront la fonction $\frac{1}{c}F(c, \varphi)$.

CHAPITRE VIII.

Expression du temps dans le mouvement du pendule simple.

33. Les fonctions elliptiques de la première espèce reçoivent une application immédiate dans la détermination du mouvement du pendule simple. Soit 1 la gravité, L la longueur du pendule, H la hauteur due à la vitesse dans le point le plus bas, ψ l'angle dont le pendule est écarté de la verti-

cale au bout du temps t, on aura, en supposant que ψ croisse avec t,

$$t = \int \frac{\frac{1}{2} d\psi \sqrt{L}}{\sqrt{\left(\frac{H}{2L} - \sin^2 \frac{1}{2}\psi\right)}}.$$

Cette formule générale offre deux cas à considérer, selon que $\frac{H}{2L}$ sera plus grand ou plus petit que l'unité.

Dans le premier cas, il est clair que le corps tournera sans cesse dans le même sens, et aura, dans ses révolutions successives, les mêmes vitesses aux mêmes points de la circonférence. Soit alors $\frac{2L}{H} = c^2$, et on aura

$$t = c\sqrt{L}.\int \frac{\frac{1}{2} d\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \frac{1}{2}\psi)}} = c\sqrt{L}.F(c, \tfrac{1}{2}\psi),$$

d'où résulte le temps d'une révolution entière

$$T = 2c\sqrt{L}.F'c.$$

Dans le second cas, qui est proprement celui des oscillations, on fera $\frac{H}{2L} = c^2$, $\sin \frac{1}{2}\psi = c \sin \varphi$, et on aura

$$t = \sqrt{L}.\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}} = \sqrt{L}.F(c, \varphi).$$

Donc le temps d'une demi-oscillation $= \sqrt{L}.F'c$, et celui d'une oscillation entière $T = 2\sqrt{L}.F'c$.

Lorsque les oscillations sont infiniment petites, on a $F'c = \frac{1}{2}\pi$, et $T = \pi\sqrt{L}$, ce qui s'accorde avec les formules connues.

Puisque le temps employé à parcourir un arc quelconque, à compter de la verticale, est représenté par une fonction elliptique de la première espèce, il s'ensuit qu'étant donné un arc parcouru dans le temps t, on pourra trouver algébriquement un autre arc parcouru dans un temps multiple de t, ou en général commensurable avec t. On peut aussi trouver un arc tel, que le temps par cet arc soit égal à la somme ou à la différence des temps par deux ou plusieurs arcs donnés, et cela, soit que ces arcs aboutissent à la verticale, soit qu'ils n'y aboutissent pas.

Si l'on veut diviser en deux parties égales le temps de la demi-oscillation, il faudra, suivant les formules connues, faire $\sin^2 \varphi = \frac{1}{1+b}$, ce qui
Fig. 5. donnera $\sin \frac{1}{2}\psi = c \sin \varphi = \sqrt{(1 - b)}$. Donc si AB est l'arc de la demi-oscillation, et qu'après avoir divisé l'arc AB en deux également au point I, on prenne le point O tel, que la corde AO soit à la corde AI comme $\sqrt{2}$ est à 1, le temps de la demi-oscillation sera partagé en deux également au point O.

CHAPITRE IX.

Comparaison des fonctions elliptiques de la seconde espèce.

34. Supposons que les amplitudes φ, ψ, μ soient telles, qu'on ait $F(\varphi)+F(\psi)-F(\mu)=0$, je dis qu'on aura en même temps $E(\varphi)+E(\psi)-E(\mu)=P$, P étant une quantité algébrique. En effet, si l'on différencie cette équation, en regardant μ comme constante, on aura

$$dP = d\varphi\Delta(\varphi) + d\psi\Delta(\psi).$$

Mettant au lieu de $\Delta(\varphi)$ et $\Delta(\psi)$, leurs valeurs tirées des équations (b'), (art. 16), il viendra

$$dP = d\varphi\left(\frac{\cos\varphi - \cos\psi\cos\mu}{\sin\psi\sin\mu}\right) + d\psi\left(\frac{\cos\psi - \cos\varphi\cos\mu}{\sin\varphi\sin\mu}\right),$$

ou

$$dP = \frac{\frac{1}{2}d(\sin^2\varphi + \sin^2\psi + 2\cos\mu\cos\varphi\cos\psi)}{\sin\mu\sin\varphi\sin\psi}.$$

Mais de l'équation (a') on déduit

$$\sin^2\varphi + \sin^2\psi + 2\cos\mu\cos\varphi\cos\psi = 1 + \cos^2\mu + c^2\sin^2\mu\sin^2\varphi\sin^2\psi;$$

donc

$$dP = \frac{\frac{1}{2}d(c^2\sin^2\mu\sin^2\varphi\sin^2\psi)}{\sin\mu\sin\varphi\sin\psi} = c^2 d(\sin\mu\sin\varphi\sin\psi);$$

donc $P = c^2\sin\mu\sin\varphi\sin\psi$ sans constante, parce que P doit s'évanouir lorsque $\varphi = 0$.

Ainsi, pendant que les fonctions elliptiques de la première espèce ont entre elles la relation $F(\varphi)+F(\psi)-F(\mu)=0$, les fonctions correspondantes de la seconde espèce satisfont à l'équation

$$E(\varphi)+E(\psi)-E(\mu) = c^2\sin\mu\sin\varphi\sin\psi \ldots (c');$$

c'est la formule générale qui servira à comparer entre elles les fonctions de la seconde espèce, comme nous avons comparé celles de la première.

Si l'on considérait plus généralement la fonction $G(\varphi)$ composée de la première et de la seconde espèce, savoir,

$$G(\varphi) = E(\varphi) + kF(\varphi),$$

k étant un coefficient constant quelconque, il est visible qu'on aurait semblablement

$$G(\varphi) + G(\psi) - G(\mu) = c^2 \sin\mu \sin\varphi \sin\psi;$$

de sorte que toutes les conséquences qu'on tirera de l'équation (c') pour les fonctions E, s'appliqueront généralement aux fonctions G.

35. Désignons comme ci-dessus par φ_2, φ_3, φ_4, etc., les amplitudes qui donnent $F(\varphi_2) = 2F(\varphi)$, $F(\varphi_3) = 3F(\varphi)$; etc., on aura, en vertu de l'équation (c'),

$$2E(\varphi) - E(\varphi_2) = c^2 \sin\varphi \sin\varphi \sin\varphi_2$$
$$3E(\varphi) - E(\varphi_3) = c^2 \sin\varphi (\sin\varphi \sin\varphi_2 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_3)$$
$$4E(\varphi) - E(\varphi_4) = c^2 \sin\varphi (\sin\varphi \sin\varphi_2 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 + \sin\varphi_3 \sin\varphi_4),$$
etc.

Donc la même relation entre φ_n et φ, qui donne $F(\varphi_n) = nF(\varphi)$, donnera $nE(\varphi) - E(\varphi_n)$ égale à une quantité algébrique.

En général, si m, n, p, etc. sont des nombres entiers positifs ou négatifs, on peut faire en sorte que

$$mE(\varphi) + nE(\psi) + pE(\omega) + \text{etc.}$$

soit égale à une quantité algébrique; il faut pour cela établir entre les angles φ, ψ, ω, etc., la relation qui donne

$$0 = mF(\varphi) + nF(\psi) + pF(\omega) + \text{etc.}$$

Nous observerons que les fonctions $F(\varphi)$, $E(\varphi)$ sont en général de même signe que φ; lorsque φ change de signe, elles en changent aussi, et conservent la même valeur. Cela posé, il semblerait qu'on peut satisfaire à l'équation

$$0 = mF(\varphi) + nF(\psi) + pF(\omega) + \text{etc.}$$

de bien des manières différentes; car on est maître de changer le signe de chaque coefficient, pourvu qu'on change en même temps le signe de l'amplitude correspondante. Mais on peut se borner à considérer les fonctions $F(\varphi)$, $F(\psi)$, $F(\omega)$, etc., comme toujours positives; et dans ce cas il n'y aura jamais qu'une relation entre les angles φ, ψ, ω, etc., qui donnera $0 = mF(\varphi) + nF(\psi) + pF(\omega) + \text{etc.}$; alors on voit que les coefficiens m, n, p, etc., ne sauraient être tous de même signe.

36. Telles sont en général les relations qu'ont entre elles les fonctions elliptiques de la première et de la deuxième espèce; il faut maintenant entrer dans quelques détails sur les nombreux corollaires qu'on peut tirer

de l'équation des arcs

$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\mu) = c^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\mu,$$

combinée avec l'équation algébrique qu'elle suppose et qui peut se mettre sous l'une de ces trois formes,

$$\cos\mu = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \Delta(\mu),$$
$$\cos\psi = \cos\mu \cos\varphi + \sin\mu \sin\varphi \Delta(\psi);$$
$$\cos\varphi = \cos\mu \cos\psi + \sin\mu \sin\psi \Delta(\varphi).$$

On déduit de ces équations les valeurs suivantes qui serviront à exprimer le second membre $c^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\mu$ en fonction de deux seulement des amplitudes φ, ψ, μ.

$$\sin\mu = \frac{\sin\varphi \cos\psi \Delta(\psi) + \sin\psi \cos\varphi \Delta(\varphi)}{1 - c^2 \sin^2\varphi \sin^2\psi},$$

$$\sin\psi = \frac{\sin\mu \cos\varphi \Delta(\varphi) - \sin\varphi \cos\mu \Delta(\mu)}{1 - c^2 \sin^2\mu \sin^2\varphi},$$

$$\sin\varphi = \frac{\sin\mu \cos\psi \Delta(\psi) - \sin\psi \cos\mu \Delta(\mu)}{1 - c^2 \sin^2\mu \sin^2\psi}.$$

Cela posé, voici les principaux corollaires qui résultent des équations mentionnées pour la comparaison des arcs d'ellipse.

I. Si l'on fait $\mu = \frac{1}{2}\pi$, l'équation des arcs deviendra

$$E(\varphi) + E(\psi) - E' = c^2 \sin\varphi \sin\psi,$$

et l'équation algébrique correspondante sera

$$b \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi = 1.$$

On en tire $\operatorname{tang}\psi = \frac{1}{b}\cot\varphi$, $\sin\psi = \frac{\cos\varphi}{\Delta(\varphi)}$, $\cos\psi = \frac{b\sin\varphi}{\Delta(\varphi)}$, et $c^2 \sin\varphi \sin\psi = \frac{c^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta(\varphi)}$. On aurait semblablement $\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{b}\cot\psi$, $\sin\varphi = \frac{\cos\psi}{\Delta(\psi)}$, $\cos\varphi = \frac{b\sin\psi}{\Delta(\psi)}$, et $c^2 \sin\varphi \sin\psi = \frac{c^2 \sin\psi \cos\psi}{\Delta(\psi)}$.

Si, d'après cette relation entre les amplitudes φ et ψ, on détermine sur l'ellipse les arcs $BM = E(\varphi)$, $BN = E(\psi)$, on aura Fig. 1.

$$BM - AN = c^2 \sin\varphi \sin\psi.$$

C'est dans cette équation que consiste le théorème de Fagnani. Il en résulte qu'étant donné l'arc BM terminé au petit axe, on peut trouver un second arc AN terminé au grand axe tel, que la différence de ces arcs BM — AN soit égale à une quantité algébrique $c^2 \sin\varphi \sin\psi$; et cette quantité est

représentée par la partie de la tangente OM ou ZN terminée à la perpendiculaire CO ou CZ, abaissée du centre de l'ellipse.

Lorsque φ et ψ sont égaux à un même angle θ, les deux points M et N coïncident en un même point K. Alors on a $\tang^2\theta = \frac{1}{b}$, $\sin^2\theta = \frac{1}{1+b}$; $\cos^2\theta = \frac{b}{1+b}$, ce qui donne

$$BK - AK = 1 - b.$$

Donc alors la différence des arcs BK, AK est égale à la différence des demi-axes CA, CB; en même temps on a

$$BK = \tfrac{1}{2}E^1 + \tfrac{1}{2}(1-b),$$
$$AK = \tfrac{1}{2}E^1 - \tfrac{1}{2}(1-b).$$

Il y a donc au point K une sorte de bisection du quart d'ellipse, puisque chacune des parties BK, AK peut se mesurer par la moitié de ce quart d'ellipse.

II. Soit dans l'équation générale des arcs $\varphi = \psi = \theta$, on aura

$$2E(\theta) - E(\mu) = c^2 \sin^2\theta \sin\mu,$$

et l'équation algébrique correspondante sera $\cos^2\theta - \sin^2\theta\Delta(\mu) = \cos\mu$. C'est l'équation qui sert à la duplication des arcs elliptiques ou à leur bisection.

On en tire pour la duplication

$$\sin\mu = \frac{2\sin\theta\cos\theta\Delta(\theta)}{1 - c^2\sin^4\theta}, \quad \tang\tfrac{1}{2}\mu = \Delta(\theta)\tang\theta,$$

et pour la bisection,

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos\mu}{1+\Delta(\mu)}.$$

Fig. 6. De là on voit qu'étant donné l'arc $BM = E(\theta)$, on peut trouver un autre arc $BN = E(\mu)$ qui soit mesuré par le double de BM, de sorte qu'on ait $2BM - BN = c^2\sin^2\theta\sin\mu$.

Et réciproquement, étant donné l'arc $BN = E(\mu)$, on peut trouver un second arc $BM = E(\theta)$ qui soit mesuré par la moitié de l'arc BN; on aura en effet $BM = \frac{1}{2}BN + \frac{1}{2}c^2\sin^2\theta\sin\mu = \frac{1}{2}BN + \frac{1-\Delta(\mu)}{2}\tang\frac{1}{2}\mu$.

Lorsqu'on fait $\mu = \frac{1}{2}\pi$, le point M tombe en K, et l'on a, comme ci-dessus, $BK = \frac{1}{2}E^1 + \frac{1}{2}(1-b)$.

Pour avoir de nouveau le point de bisection de l'arc BK, il faudra faire $\tang^2\mu = \frac{1}{b}$, $\sin^2\mu = \frac{1}{1+b}$, $\Delta(\mu) = \sqrt{b}$, et l'on aura

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \sqrt{\left(\frac{1}{1+b}\right)}}{1+\sqrt{b}}.$$

Cette valeur détermine l'arc $BI = E(\theta)$ qui se mesure par la moitié de BK ou par le quart de E^1; on a en effet

$$BI = \tfrac{1}{2}BK + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{b}}{\sqrt{(1+b)}+\sqrt{b}},$$

ou

$$BI = \tfrac{1}{4}E^1 + \tfrac{1}{4}(1-b) + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{b}}{\sqrt{(1+b)}+\sqrt{b}},$$

et l'on peut continuer à l'infini cette sorte de bisection.

III. Ayant pris à volonté l'arc BD compté depuis le petit axe, avec un point quelconque M sur cet arc, il y aura toujours un autre point N sur le même arc, tel que la différence des arcs BM, DN sera égale à une quantité algébrique. Fig. 7.

Il suffit pour cela de faire $BD = E(\varphi)$, $BM = E(\psi)$, $BN = E(\mu)$, et de déterminer μ en fonction de φ et de ψ, comme si l'on voulait satisfaire à l'équation $F(\mu) = F(\varphi) - F(\psi)$, ce qui se fera par la formule de l'art. 19. On aura, par ce moyen, $E(\mu) + E(\psi) - E(\varphi) = c^2 \sin\mu \sin\varphi \sin\psi$, ou $BM - DN = c^2 \sin\mu \sin\varphi \sin\psi$.

Lorsque $\mu = \psi$, les deux arcs BM, BN coïncident en un seul BO, et chacun des arcs BO, OD se mesure par la moitié de l'arc BD. C'est un cas qui a été examiné dans le corollaire II.

IV. Etant donné un arc quelconque BD, terminé au petit axe, avec un point M pour servir d'origine à un second arc, on peut déterminer ce second arc MP ou NM, dans le sens qu'on voudra, de manière que sa différence avec l'arc BD soit égale à une quantité algébrique. Fig. 8.

Dans le premier cas, si l'on fait $BM = E(\varphi)$, $BD = E(\psi)$, $BP = E(\mu)$, et qu'on détermine μ d'après l'équation $F(\varphi) + F(\psi) = F(\mu)$, ou d'après les formules de l'article 18, on aura $BD - MP = c^2 \sin\varphi \sin\psi \sin u$.

Dans le second cas, si l'on fait $BM = E(\varphi)$, $BD = E(\psi)$, $BN = E(\mu)$, et qu'on détermine μ d'après l'équation $F(\varphi) - F(\psi) = F(\mu)$, ou d'après les formules de l'article 19, on aura $BD - MN = c^2 \sin\mu \sin\varphi \sin\psi$.

V. Etant donné un arc quelconque OD dont l'origine ne soit plus à l'extrémité du petit axe, avec un point M pour servir d'origine à un second arc, on pourra déterminer ce second arc MN ou MP, de manière que sa différence avec l'arc OD soit égale à une quantité algébrique. Fig. 9.

Car, 1°. par le corollaire III, on peut trouver BH — OD = à une quantité algébrique, et ensuite BH — MN = à une quantité algébrique; donc

MN — OD sera encore une quantité algébrique, 2°. ayant trouvé le point H par le coroll. III, on peut trouver le point P par le coroll. IV, de sorte que BH — MP soit égale à une quantité algébrique, et alors OD — MP sera égale aussi à une quantité algébrique.

Ainsi l'on peut trouver sur l'ellipse une infinité d'arcs égaux à un arc donné, plus ou moins une différence assignable géométriquement, de sorte que l'arc prendra son origine à volonté sur tous les points de l'ellipse, et sera dirigé dans le sens qu'on voudra.

Fig. 9. VI. Quel que soit l'arc OP et le point M pris sur cet arc, il y aura toujours sur le même arc un autre point D tel que la différence des arcs OM, DP sera égale à une quantité algébrique.

Cela suit immédiatement du coroll. V.

Lorsque les points M et D coïncident en un seul point I, chacun des arcs OI, IP est mesuré par la moitié de OP, et l'on a une première bisection de cet arc. On pourra de même en trouver une seconde, une troisième, etc. à l'infini.

Fig. 7. VII. Etant donné l'arc BM dont l'origine est au petit axe, on peut trouver un arc BN qui soit égal à un multiple quelconque de l'arc BM, plus ou moins une quantité algébrique.

Car, en faisant $BM = E(\varphi)$, $BN = E(\psi)$, si l'on satisfait à l'équation $F(\psi) = nF(\varphi)$, on aura en même temps $nE(\varphi) - E(\psi) =$ à une quantité algébrique. Dans ce cas, ψ serait ce que nous avons désigné ci-dessus par φ_n, et l'on a vu la manière de déterminer φ_n par le moyen de φ.

VIII. Réciproquement, étant donné un arc quelconque $BN = E(\psi)$, on pourra, par la résolution d'une équation algébrique, déterminer l'arc $BM = E(\varphi)$, qui soit égal à un sous-multiple de l'arc BN, plus une quantité algébrique.

Par exemple, pour la trisection de l'arc BN, il faudra déterminer $\sin\varphi$ par l'équation

$$\sin\psi = \frac{3\sin\varphi - 4(1+c^2)\sin^3\varphi + 6c^2\sin^5\varphi - c^4\sin^9\varphi}{1 - 6c^2\sin^4\varphi + 4c^2(1+c^2)\sin^6\varphi - 3c^4\sin^8\varphi},$$

équation qui est en général du neuvième degré, mais qui se réduit au quatrième lorsque $\psi = \frac{1}{2}\pi$.

IX. En général on pourra trouver par la résolution d'une équation algébrique, un arc $E(\varphi)$ qui soit égal à une partie rationnelle $\frac{m}{n}$ de l'arc donné $E(\psi)$, plus ou moins une quantité algébrique. L'équation sera la même que celle qui donnerait $F(\varphi) = \frac{m}{n}F(\psi)$.

Il en sera de même si l'arc donné n'est pas terminé au petit axe. Car si OP est cet arc, on cherchera par le coroll. III, l'arc BM égal à OP + une quantité algébrique, et il ne s'agira plus que de trouver un arc BN $= \frac{m}{n}$ BM $\pm$ une quantité algébrique. On pourra ensuite donner à l'arc BN une autre origine à volonté. Fig. 9.

X. Deux arcs étant donnés partout où l'on voudra sur l'ellipse, on pourra trouver un arc égal à leur somme ou à leur différence, plus ou moins une ligne droite assignable géométriquement. C'est une suite des coroll. III et V.

Ainsi toutes les comparaisons qu'on fait ordinairement des arcs de cercle par voie d'analyse, ont lieu également pour les arcs d'ellipse, à la différence près qui affecte tous les résultats, mais qu'on peut faire disparaître dans beaucoup de cas, lorsque l'origine de l'arc cherché est arbitraire. La disparition de cette différence, lorsqu'elle peut avoir lieu, ajoute aux problèmes un degré d'intérêt de plus; elle rapproche alors les propriétés des arcs d'ellipse de celles des fonctions elliptiques de la première espèce. C'est pourquoi nous croyons devoir en apporter ici quelques exemples.

37. Problème I. *Déterminer sur le quart d'ellipse* BKA *un arc* MP *qui soit précisément égal à la moitié de l'arc* BKA.

Soit φ l'amplitude du point M, ψ celle du point P, θ l'amplitude du point K, premier point de bisection de l'arc BKA, pour lequel on a $\sin^2\theta = \frac{1}{1+b}$ et $E(\theta) = \frac{1}{2}E' + \frac{1}{2}(1-b)$. Supposons qu'on ait $F(\varphi) + F(\theta) - F(\psi) = 0$, il s'ensuivra $E(\varphi) + E(\theta) - E(\psi) = c^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\theta$; donc Fig. 6.

$$E(\psi) - E(\varphi) = \tfrac{1}{2}E' + \tfrac{1}{2}(1-b) - c^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\theta.$$

Donc si l'on veut que MP $= \frac{1}{2}E'$, il faudra faire

$$c^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\theta = \tfrac{1}{2}(1-b),$$

ce qui donnera $\sin\varphi \sin\psi = \frac{1}{2}\sin\theta$. Mais d'un autre côté l'équation $F(\varphi) + F(\theta) - F(\psi) = 0$ donne $\cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi\, \Delta(\theta) = \cos\theta$, et puisque $\Delta(\theta) = \sqrt{b}$, on aura à la fois $\sin\varphi \sin\psi = \frac{1}{2}\sin\theta$, et $\cos\varphi \cos\psi = \frac{1}{2}\cos\theta$. De ces équations on tire

$$\cos(\psi - \varphi) = \tfrac{1}{2}(\cos\theta + \sin\theta) = \cos\tfrac{\pi}{4}\cos\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right),$$

$$\cos(\psi + \varphi) = \tfrac{1}{2}(\cos\theta - \sin\theta) = \cos\tfrac{\pi}{4}\cos\left(\theta + \tfrac{\pi}{4}\right).$$

Ainsi les angles $\psi - \varphi$ et $\psi + \varphi$ seront connus. On pourrait aussi

déterminer directement les valeurs de $\sin\varphi$ et $\sin\psi$ au moyen des formules

$$\sin\varphi = \tfrac{1}{4}\sqrt{(3+4\sin\theta+2\sin^2\theta)} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(3-4\sin\theta+2\sin^2\theta)},$$
$$\sin\psi = \tfrac{1}{4}\sqrt{(3+4\sin\theta+2\sin^2\theta)} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(3-4\sin\theta+2\sin^2\theta)},$$

et ces sinus seront les abscisses des points cherchés M et P.

Le problème étant ainsi résolu, on voit que l'arc MP sera égal à la somme des deux arcs BM + NA.

Fig. 6. 38. Problème II. *Déterminer sur le quart d'ellipse* BMA *un arc* NQ *qui soit égal au tiers de* BMA.

Si l'on suppose $F(\varphi) = \frac{1}{3}F^1$ et $F(\varphi_2) = 2F(\varphi)$, on aura $\sin\varphi$ par la résolution de l'équation

$$0 = 1 - 2\sin\varphi + 2c^2\sin^3\varphi - c^2\sin^4\varphi,$$

et φ_2 se déduira de φ, soit par l'équation $\cos\varphi_2 = 1 - \sin\varphi$, soit par l'équation $\sin\varphi_2 = \frac{\cos\varphi}{\Delta}$.

Cela posé, on aura $3E(\varphi) - E^1 = c^2\sin\varphi\sin\varphi_2(1+\sin\varphi)$, ou

$$E(\varphi) = \tfrac{1}{3}E^1 + \tfrac{1}{3}c^2\sin\varphi\sin\varphi_2(1+\sin\varphi).$$

Supposons de nouveau $F(\varphi) + F(\psi) - F(\omega) = 0$, on aura

$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\omega) = c^2\sin\varphi\sin\psi\sin\omega.$$

Donc, si l'on veut que $E(\omega) - E(\psi) = \frac{1}{3}E^1$, il faudra faire $\sin\psi\sin\omega = \frac{2}{3}\sin\varphi_2(1+\sin\varphi)$. Mais d'ailleurs en vertu de la supposition faite, on a l'équation $\cos\psi\cos\omega + \sin\psi\sin\omega\Delta(\varphi) = \cos\varphi$; donc les inconnues ψ et ω devront être déterminées par les équations

$$\sin\psi\sin\omega = \tfrac{1}{3}\sin\varphi_2(1+\sin\varphi) = \frac{\cos^3\varphi}{3b\sin\varphi},$$
$$\cos\psi\cos\omega = \tfrac{1}{3}\cos\varphi(2-\sin\varphi) = \tfrac{1}{3}\cos\varphi(1+\cos\varphi_2).$$

De là résulte

$$\cos(\psi-\omega) = \tfrac{1}{3}[\cos\varphi + \sin\varphi_2 + \cos(\varphi_2-\varphi)],$$
$$\cos(\psi+\omega) = \tfrac{1}{3}[\cos\varphi - \sin\varphi_2 + \cos(\varphi_2+\varphi)].$$

Chacune de ces quantités est moindre que $\frac{1}{3}(1+1+1)$ et par conséquent moindre que l'unité; donc la solution est toujours possible, et l'arc NQ ainsi déterminé par les amplitudes ψ et ω, satisfait à la condition $NQ = \frac{1}{3}E^1$, ou, ce qui est la même chose, à la condition $BN + QA = 2NQ$.

On peut démontrer que le problème est toujours possible par cette considération. Soit pris $BI = E(\varphi)$, on aura $BI > \frac{1}{3}E^1$. Soit pris ensuite

l'arc AP correspondant à BI, de manière que la différence BI — AP soit égale à une quantité algébrique, c'est-à-dire, soit prise l'amplitude σ du point P, de manière qu'on ait $b \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \sigma = 1$, on aura $AP < \frac{1}{3} E'$. Mais si l'on imagine que l'arc $\frac{1}{3} E'$ soit transporté le long du quart d'ellipse, de manière que son origine parcoure successivement tout l'intervalle de B en P, cet arc étant représenté en B par $BI > \frac{1}{3} E'$, et en P par $AP < \frac{1}{3} E'$, il faudra, en vertu de la loi de continuité, qu'il soit représenté exactement en un point intermédiaire N par l'arc $NQ = \frac{1}{3} E'$.

Pour appliquer la solution générale à un cas particulier, soit $c^2 = \frac{1}{2} = b^2$, on a trouvé ci-dessus (art. 24) $\cos \varphi = \sqrt[4]{(2\sqrt{3} - 3)} = \sqrt[4]{(8 \cos 30^\circ \sin^2 15^\circ)}$; on aura donc, par le calcul trigonométrique,

$$\begin{array}{rcl}
L \cos \varphi &=& 9.9166532 \\
L \sin \varphi &=& 9.7517253 \ldots\ldots\ldots\ldots \sin \varphi = 0.5645797 \\
 & & 2 - \sin \varphi = 1.4354203 \\
L \sin \psi \sin \omega &=& 9.6716281 \qquad \sin \psi \sin \omega = 0.4694920 \\
L \cos \psi \cos \omega &=& 9.5965110 \qquad \cos \psi \cos \omega = 0.3949217 \\
 & & \cos(\omega + \psi) = -0.0745703 \\
 & & \cos(\omega - \psi) = 0.8644137 \\
\omega + \psi &=& 94^\circ\ 16'\ 35''5 \qquad \omega = 62^\circ\ 13'\ 49''3 \\
\omega - \psi &=& 30.\ 11.\ 3.1 \qquad \psi = 32^\circ\ 2'\ 46''2
\end{array}$$

Ces valeurs ne sont qu'approchées, mais les formules trouvées donnent la solution rigoureuse qui peut même être construite géométriquement.

39. Problème III. *Etant donnés les deux arcs* MN *et* PQ, *situés comme on voudra sur la circonférence de l'ellipse, trouver un troisième arc* DR *égal à leur somme* MN + PQ. Fig. 10.

Soient α, β, δ, ϵ les amplitudes des points donnés M, N, P, Q, en sorte qu'on ait $MN = E(\beta) - E(\alpha)$, $PQ = E(\epsilon) - E(\delta)$; soient ψ et ω les amplitudes des points cherchés D, R, en sorte qu'on ait $DR = E(\omega) - E(\psi)$.

Soient encore λ et μ deux amplitudes telles, qu'on ait $F(\lambda) = F(\beta) - F(\alpha)$, et $F(\mu) = F(\epsilon) - F(\delta)$; on aura en même temps

$$E(\lambda) + E(\alpha) - E(\beta) = c^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \lambda,$$
$$E(\mu) + E(\delta) - E(\epsilon) = c^2 \sin \delta \sin \epsilon \sin \mu;$$

donc

$$MN + PQ = E(\lambda) + E(\mu) - c^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \lambda - c^2 \sin \delta \sin \epsilon \sin \mu.$$

Soit enfin φ une nouvelle amplitude telle que $F(\varphi) = F(\lambda) + F(\mu)$, on

aura

$$E(\lambda) + E(\mu) - E(\varphi) = c^2 \sin\varphi \sin\lambda \sin\mu;$$

donc

$$MN + PQ - E(\varphi) = c^2 \sin\varphi \sin\lambda \sin\mu - c^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\lambda - c^2 \sin\delta \sin\epsilon \sin\mu.$$

Faisons maintenant $F(\varphi) = F(\omega) - F(\psi)$, il en résultera

$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\omega) = c^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\omega;$$

mais par hypothèse, on a $E(\omega) - E(\psi) = MN + PQ$; donc

$$\sin\varphi \sin\psi \sin\omega = \sin\alpha \sin\beta \sin\lambda + \sin\delta \sin\epsilon \sin\mu - \sin\lambda \sin\mu \sin\varphi.$$

Soit pour abréger $\sin\alpha \sin\beta \sin\lambda + \sin\delta \sin\epsilon \sin\mu = M$, et on aura

$$\sin\omega \sin\psi = \frac{M}{\sin\varphi} - \sin\lambda \sin\mu.$$

D'ailleurs l'équation $F(\varphi) = F(\omega) - F(\psi)$, donne $\cos\omega \cos\psi + \ldots\ldots \sin\omega \sin\psi\, \Delta(\varphi) = \cos\varphi$; donc on aura pour déterminer ψ et ω les deux équations

$$\sin\omega \sin\psi = \frac{M}{\sin\varphi} - \sin\lambda \sin\mu,$$

$$\cos\omega \cos\psi = \cos\varphi - \frac{\Delta(\varphi)}{\sin\varphi} M + \sin\lambda \sin\mu \Delta(\varphi).$$

Si de plus on observe que l'équation $F(\varphi) = F(\lambda) + F(\mu)$ donne $\cos\varphi = \cos\lambda \cos\mu - \sin\lambda \sin\mu \Delta(\varphi)$, on déduira des équations précédentes,

$$\cos(\omega + \psi) = \cos(\lambda - \mu) - \frac{\sin\varphi}{M}[1 + \Delta(\varphi)],$$

$$\cos(\omega - \psi) = \cos(\lambda + \mu) + \frac{M c^2 \sin\varphi}{1 + \Delta(\varphi)}.$$

Les données immédiates étant α, β, δ, ϵ, on en déduit λ et μ par les équations $F(\lambda) = F(\beta) - F(\alpha)$, $F(\mu) = F(\epsilon) - F(\delta)$, qui donnent

$$\sin\lambda = \frac{\sin\beta \cos\alpha \Delta(\alpha) - \sin\alpha \cos\beta \Delta(\beta)}{1 - c^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta},$$

$$\sin\mu = \frac{\sin\epsilon \cos\delta \Delta(\delta) - \sin\delta \cos\epsilon \Delta(\epsilon)}{1 - c^2 \sin^2\delta \sin^2\epsilon}.$$

La valeur de M est donc connue, ensuite on déduira $\sin\varphi$ et $\Delta(\varphi)$ de l'équation $F(\varphi) = F(\lambda) + F(\mu)$, qui donne

$$\sin\varphi = \frac{\sin\lambda \cos\mu \Delta(\mu) + \sin\mu \cos\lambda \Delta(\lambda)}{1 - c^2 \sin^2\mu \sin^2\lambda},$$

$$\Delta(\varphi) = \frac{\Delta(\mu)\Delta(\lambda) - c^2 \sin\lambda \sin\mu \cos\lambda \cos\mu}{1 - c^2 \sin^2\mu \sin^2\lambda}.$$

Or les valeurs de $\sin\lambda$, $\cos\lambda$, $\Delta(\lambda)$ sont données en fonctions de β et α par les formules de l'art. 19; il en est de même des valeurs de $\sin\mu$, $\cos\mu$, $\Delta(\mu)$ exprimées en fonctions de ϵ et δ. On connaîtra donc toutes les quantités qui composent les valeurs de $\cos(\omega - \psi)$ et $\cos(\omega + \psi)$.

Ce problème peut servir à en résoudre beaucoup d'autres, et notamment à trouver un arc qui soit exactement dans un rapport rationnel avec un arc donné; mais il faut pour cela que dans chaque application les valeurs trouvées pour $\cos(\omega + \psi)$ et $\cos(\omega - \psi)$, soient renfermées chacune entre les limites $+1$ et -1, sans quoi le problème deviendrait impossible.

CHAPITRE X.

Comparaison des arcs d'hyperbole.

4. Nous avons déjà trouvé (art. 13) que l'arc AM désigné par Υ, a pour expression

$$\Upsilon = \Delta \operatorname{tang}\varphi - E(\varphi) + b^2 F(\varphi).$$

Le point M, extrémité de l'arc AM, étant supposé avoir pour amplitude φ, considérons deux autres points N et O dont les amplitudes soient ψ et ω, et supposons qu'on ait l'équation $F(\varphi) + F(\psi) - F(\omega) = 0$; alors les arcs AM, AN, AO, désignés respectivement par $\Upsilon(\varphi)$, $\Upsilon(\psi)$, $\Upsilon(\omega)$, auront entre eux cette relation

$$\Upsilon(\varphi) + \Upsilon(\psi) - \Upsilon(\omega) = \Delta(\varphi)\operatorname{tang}\varphi + \Delta(\psi)\operatorname{tang}\psi - \Delta(\omega)\operatorname{tang}\omega - E(\varphi) - E(\psi) + E(\omega),$$

ou, en mettant la valeur connue de $E(\varphi) + E(\psi) - E(\omega)$,

$$\Upsilon(\varphi) + \Upsilon(\psi) - \Upsilon(\omega) = \Delta(\varphi)\operatorname{tang}\varphi + \Delta(\psi)\operatorname{tang}\psi - \Delta(\omega)\operatorname{tang}\omega - c^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\omega.$$

C'est l'équation fondamentale d'après laquelle on peut faire sur les arcs d'hyperbole les mêmes comparaisons que nous avons faites sur les arcs d'ellipse, mais en observant que dans l'hyperbole on ne peut donner aux amplitudes une valeur plus grande que $\frac{1}{2}\pi$, et que lorsque $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, l'arc AM devient infini.

La quantité $\Delta \tang \varphi$ n'est autre chose que la tangente MZ, terminée par la perpendiculaire CZ abaissée du centre sur cette tangente. Ainsi $\Delta \tang \varphi - F(\varphi)$ est l'excès de la tangente MZ sur l'arc AZ. Si l'on appelle $G(\varphi)$ cette fonction, on aura pour chaque point M,

Fig. 2.

$$G(\varphi) = E(\varphi) - b^2 F(\varphi),$$

et lorsque les trois points M, N, O, déterminés par les amplitudes φ, ψ, ω sont liés entre eux par la relation $F(\varphi) + F(\psi) - F(\omega) = 0$, les fonctions correspondantes $G(\varphi)$, $G(\psi)$, $G(\omega)$ relatives à l'hyperbole, satisferont à l'équation

$$G(\varphi) + G(\psi) - G(\omega) = c^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\omega,$$

équation entièrement semblable à celle qui a lieu dans l'ellipse, et d'où l'on déduira de semblables corollaires, sauf les restrictions particulières à l'hyperbole et dont nous avons déjà parlé.

Nous avons trouvé que lorsqu'on fait $\sin^2\theta = \frac{1}{1+b}$, on a $F(\theta) = \frac{1}{2}F^1$, et $E(\theta) = \frac{1}{2}E^1 + \frac{1}{2}(1-b)$, on aura donc semblablement pour l'hyperbole,

$$G(\theta) = \tfrac{1}{2}G^1 + \tfrac{1}{2}(1-b),$$

G^1 est la différence entre la branche infinie d'hyperbole AMO et son asymptote CV, qui est censée la rencontrer dans un point infiniment éloigné. Cette différence estimée au moyen des fonctions E^1, F^1, a pour valeur $G^1 = E^1 - b^2F^1$; mais sans recourir à ces fonctions, on peut la déduire de l'équation précédente qui donne

$$G^1 = 2G(\theta) - (1-b).$$

Ainsi la quantité G^1, différence de deux infinis, se déterminera par la quantité $G(\theta)$, relative au point K dont l'amplitude est θ, et qui a pour coordonnées $y = b^2 \tang\theta = b\sqrt{b}$, $x = c\sqrt{(1+b)}$.

L'amplitude θ est celle qui donne $F(\theta) = \frac{1}{2}F^1$; si on cherche successivement par les formules de la bisection les amplitudes θ', θ'', etc., telles qu'on ait $F(\theta') = \frac{1}{2}F(\theta) = \frac{1}{4}F^1$, $F(\theta'') = \frac{1}{2}F(\theta') = \frac{1}{8}F^1$, etc., on aura en même temps

$$G(\theta) = 2G(\theta') - c^2 \sin^2\theta' \sin\theta$$
$$G(\theta') = 2G(\theta'') - c^2 \sin^2\theta'' \sin\theta',$$
etc.

D'où il suit que la quantité G^1 se déterminera par le dernier terme de la suite $G(\theta)$, $G(\theta')$, $G(\theta'')$, etc., prolongée aussi loin qu'on voudra. Or,

lorsque φ est devenu très petit, la quantité $G(\varphi)$ a pour valeur très approchée $c^2 \sin\varphi$; ainsi la bisection répétée de la fonction $G(\theta)$ fournit un moyen de déterminer par approximation, la valeur de la transcendante G^1, et la même méthode s'applique à toute fonction $G(\varphi)$ dont on voudrait avoir une valeur approchée. Mais nous donnerons ci-après pour cet objet des méthodes plus expéditives.

CHAPITRE XI.

Développement particulier de la formule

$$Z = \int \frac{(f + gx^2)\,dx}{\sqrt{(a^2 + 2ab x^2 \cos\theta + b^2 x^4)}}.$$

41. Cette formule se rencontre assez souvent dans les applications, et d'ailleurs il est nécessaire d'examiner particulièrement le cas des facteurs imaginaires.

La variable x est susceptible de toutes les valeurs, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$; mais comme en faisant $x = \infty$, on a $Z = \int \frac{g}{b} dx$, pour nous débarrasser du terme qui peut devenir infini, nous considérerons simplement la formule

$$X = \int \left(\frac{(f + gx^2)\,dx}{\sqrt{(a^2 + 2ab x^2 \cos\theta + b^2 x^4)}} - \frac{g}{b}\,dx \right),$$

qui par ce moyen aura toujours une valeur finie.

Il s'agit maintenant de transformer cette expression de manière que les facteurs binomes de la quantité sous le radical deviennent réels. Pour cela on peut faire indifféremment l'une des quatre suppositions suivantes :

$$\sqrt{(a^2 + 2ab x^2 \cos\theta + b^2 x^4)} = 2xy\sqrt{ab},$$
$$a + bx^2 = 2xy\sqrt{ab},$$
$$bx^2 + a\cos\theta + \sqrt{(a^2 + 2ab x^2 \cos\theta + b^2 x^4)} = 2ay^2,$$
$$x^2 = \frac{1 - y}{1 + y}\sqrt{\frac{a}{b}},$$

et la transformée en y aura les conditions requises. Bornons-nous à présenter le résultat de la troisième supposition : elle donne.....

$x^2 = \frac{a}{\mathfrak{c}}\left(y^2 - \cos\theta - \frac{\sin^2\theta}{4y^2}\right)$, et

$$X = \int \frac{\frac{dy}{\sqrt{a\mathfrak{c}}}\left(f - \frac{gu}{\mathfrak{c}}\cos\theta - \frac{gu\sin^2\theta}{2\mathfrak{c}y^2}\right)}{\sqrt{[(y^2 - \cos^2\frac{1}{2}\theta)(y^2 + \sin^2\frac{1}{2}\theta)]}},$$

où l'on voit qu'en effet les deux facteurs de la quantité sous le radical sont réels. On voit aussi que la moindre valeur de y étant $\cos\frac{1}{2}\theta$, on peut faire $y = \frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\cos\varphi}$, ce qui donnera la tranformée suivante, où l'on a fait $c = \sin\frac{1}{2}\theta$.

$$X = \int \frac{f\mathfrak{c} - g\alpha + 2guc^2\sin^2\varphi}{\mathfrak{c}\sqrt{a\mathfrak{c}}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}},$$

et il faut remarquer que dans cette formule nous supposons $\sqrt{a\mathfrak{c}}$ réel; car si le terme $2a\mathfrak{c}x^2\cos\theta$ était négatif, on ferait tomber le signe — sur $\cos\theta$.

Cela posé, on aura, suivant les expressions accoutumées,

$$X = \frac{f\mathfrak{c} + gu}{\mathfrak{c}\sqrt{a\mathfrak{c}}}F - \frac{2gu}{\mathfrak{c}\sqrt{a\mathfrak{c}}}E;$$

c'est l'intégrale demandée prise depuis $x = 0$, car on a

$$\cos^2\varphi = \frac{-\mathfrak{c}x^2 - a\cos\theta + \sqrt{(a^2 + 2a\mathfrak{c}x^2\cos\theta + \mathfrak{c}^2x^4)}}{2a\sin^2\frac{1}{2}\theta},$$

et réciproquement $x\sqrt{\frac{\mathfrak{c}}{a}} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}$; d'où l'on voit qu'en faisant $x = 0$, on a $\varphi = 0$, et qu'en faisant $x = \infty$, on a $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

La valeur totale de l'intégrale, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, sera donc

$$X^1 = \frac{f\mathfrak{c} + g\alpha}{\mathfrak{c}\sqrt{a\mathfrak{c}}}F^1 - \frac{2g\alpha}{\mathfrak{c}\sqrt{a\mathfrak{c}}}E^1.$$

Voici quelques applications de ces formules qui conduiront à des résultats assez remarquables.

EXEMPLE I.

42. Soit proposé d'évaluer les deux intégrales

$$M = \int \frac{z^{-\frac{2}{3}}dz}{\sqrt{(1 - z^2)}}, \quad N = \int \frac{z^{\frac{1}{3}}dz}{\sqrt{(1 - z^2)}},$$

entre les limites $z = 0$, $z = 1$. On sait d'ailleurs que le produit de ces intégrales $= \frac{2}{3}\pi$ (*Calc. Intég. d'Euler*, tom. I, pag. 244).

Si l'on fait dans la première $z=(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$, on aura la transformée $M=\int\frac{3dx}{\sqrt{(3+3x^2+x^4)}}$, qu'il faudra intégrer depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$. Cette formule étant comparée avec la formule X, on aura $f=3$, $g=0$, $a=\sqrt{3}$, $\mathfrak{C}=1$, $\cos\theta=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $c=\sin\frac{1}{2}\theta=\frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})}=\sin 15^\circ$. Ainsi l'intégrale indéfinie est $M=\frac{3}{\sqrt[4]{3}}F$, et l'intégrale complète, en faisant $x=\infty$ ou $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, est

$$M^1=\frac{3}{\sqrt[4]{3}}F^1c.$$

Si dans la seconde formule on fait $z=(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$, la transformée sera $N=\int\frac{3dx(1-x^2)}{\sqrt{(3-3x^2+x^4)}}$, et l'intégrale devra être prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Comparant cette formule à la formule X, on aura $f=3$, $g=-3$, $a=\sqrt{3}$, $\mathfrak{C}=1$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $b=\cos 15^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$. (Nous désignons ce dernier module par b, parce qu'il est le complément du module $c=\sin 15^\circ$ de la formule précédente). On a donc par la substitution

$$N=-3x+\frac{3-3\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}F(b,\varphi)+\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}E(b,\varphi);$$

or la relation entre φ et x étant

$$\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\cos^2\varphi=\frac{3}{2}-x^2+\sqrt{(3-3x^2+x^4)},$$

si l'on fait $x=1$, on aura $\cos^2\varphi=2\sqrt{3}-3$, ou $\tang\varphi=\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}$; mais nous avons déjà vu (art. 24) que pour le cas du module $b=\cos 15^\circ$, la valeur précédente de φ donne exactement $F(\varphi)=\frac{1}{3}F^1$, et on a en même temps $E(\varphi)=\frac{1}{3}E^1+\frac{1}{2\sqrt[4]{3}}$. Donc l'intégrale N prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, aura cette valeur

$$N^1=\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}F^1b+\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}E^1b.$$

Puis donc qu'on a déjà trouvé $M^1=\frac{3}{\sqrt[4]{3}}F^1c$, et que le produit $M^1N^1=\frac{3}{2}\pi$, on aura entre les trois fonctions F^1c, F^1b, E^1b, cette relation fort remarquable :

$$\frac{1}{4}\pi=F^1c.\left[E^1b-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right)F^1b\right];$$

d'où il suit que dans ce cas particulier le quart d'ellipse $E'b$, qui est une fonction de la seconde espèce, peut s'exprimer par les deux fonctions $F'c$, $F'b$, de la première espèce, dont les modules sont complémens l'un de l'autre.

EXEMPLE II.

43. On propose d'évaluer par les fonctions elliptiques, les deux intégrales $P=\int\frac{z^{-\frac{1}{3}}dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$, $Q=\int\frac{z^{\frac{2}{3}}dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$, depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$: on sait d'ailleurs que leur produit $=\frac{3}{4}\pi$.

Si l'on fait dans la première, $z=(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$, on aura la transformée $P=\int\frac{3dx}{\sqrt{(3-3x^2+x^4)}}$, qu'il faut intégrer depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Celle-ci étant traitée comme l'intégrale N de l'exemple précédent, on aura pour résultat

$$P=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}F'(b).$$

Venons à la formule Q, et faisons d'abord $z^2=y^{-3}$, nous aurons la transformée $Q=\frac{3}{2}\int\frac{dy}{y^2\sqrt{(y^3-1)}}$ qu'il faudra intégrer depuis $y=1$ jusqu'à $y=\infty$. On a d'abord, en intégrant par partie,

$$Q=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{(y^3-1)}}{y}-\frac{3}{4}\int\frac{ydy}{\sqrt{(y^3-1)}}.$$

Soit ensuite $y=1+x^2$, et on aura $\int\frac{ydy}{\sqrt{(y^3-1)}}=\int\frac{2(1+x^2)dx}{\sqrt{(3+3x^2+x^4)}}$. Cela posé, la valeur de Q pourra se mettre sous la forme

$$Q=\frac{3}{2}\cdot\frac{x\sqrt{(3+3x^2+x^4)}}{1+x^2}-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\int\left[dx-\frac{(1+x^2)dx}{\sqrt{(3+3x^2+x^4)}}\right].$$

Cette intégrale doit être prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, et comme la partie hors du signe s'évanouit dans ces deux limites, on aura simplement

$$Q=\frac{3}{2}\int\left[dx-\frac{(1+x^2)dx}{\sqrt{(3+3x^2+x^4)}}\right].$$

Comparant avec la formule X, on aura $f=-\frac{3}{2}$, $g=-\frac{3}{2}$, $\alpha=\sqrt{3}$, $\zeta=1$, $\cos\theta=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $c=\frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})}$; donc l'intégrale cherchée est

$$Q'=-\left(\frac{3+3\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{3}}\right)F'(c)+\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}E'(c).$$

Maintenant puisqu'on a $P'Q' = \frac{3}{4}\pi$, on aura une relation entre trois fonctions elliptiques, qui, avec celle qu'on a trouvée, offre ces deux résultats :

$$\frac{\pi}{4} = F'(b).\left[E'(c) - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)F'(c)\right],$$

$$\frac{\pi}{4} = F'(c).\left[E'(b) - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right)F'(b)\right];$$

d'où l'on voit que les fonctions de seconde espèce $E'(c)$, $E'(b)$ peuvent, dans ce cas particulier, s'exprimer par les deux fonctions de première espèce $F'(b)$, $F'(c)$. A ces deux relations qui sont déjà fort remarquables, il faut en joindre une troisième $F'(b) = \sqrt{3}F'(c)$, qui sera démontrée dans l'exemple suivant.

EXEMPLE III.

44. Soit proposé d'évaluer l'intégrale $R = \int dz\,(1 - z^3)^{-\frac{2}{3}}$, prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$.

On fera d'abord $1 - z^3 = \left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{3}{2}}$, ce qui donnera la transformée $R = \int \frac{dy}{\sqrt{(4y^3+1)}}$ à intégrer depuis $y = 0$ jusqu'à $y = \infty$. Soit ensuite $m = \sqrt[3]{2}$ et $m^2 y = x^2 - 1$; on aura la nouvelle transformée $R = \int \frac{m\,dx}{\sqrt{(x^4 - 3x^2 + 3)}}$, qu'il faut intégrer depuis $x = 1$ jusqu'à $x = \infty$. Cette intégrale est, au coefficient près, la même que l'intégrale P de l'exemple précédent; ainsi ayant égard aux limites de R, on aura la valeur cherchée

$$R' = \frac{2m}{3\sqrt[4]{3}}\,F'b;$$

mais il y a une autre manière de trouver la valeur de R.

Soit $1 - z^3 = \left(1 - \frac{z}{y}\right)^3$, on trouvera d'abord la transformée $R = \int \frac{dy\sqrt{3}}{\sqrt{(4y^3-1)}}$, qu'il faut intégrer depuis $y = 1$ jusqu'à $y = \infty$. Soit ensuite $m^2 y = 1 + x^2$, on aura $R = m\sqrt{3}\int \frac{dx}{\sqrt{(x^4 + 3x^2 + 3)}}$, nouvelle formule qu'il faut intégrer depuis $x = \sqrt{(m^2 - 1)}$ jusqu'à $x = \infty$. Or cette intégrale est semblable à la formule M de l'exemple I, et on obtiendra de même $R = \frac{m}{\sqrt[4]{3}}F(c, \varphi) + \text{const.}$, en observant que cette intégrale doit être prise depuis la valeur de φ qui donne $x = \sqrt{(m^2 - 1)}$ jusqu'à la valeur de φ qui donne $x = \infty$; celle-ci est $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, l'autre étant nommée θ, on aura

$R^1 = m\sqrt[4]{3}\,[F^1(c) - F(c, \theta)]$. Mais en général,

$$\cos^2\varphi = \frac{-x^2 - \frac{3}{2} + \sqrt{(x^4 + 3x^2 + 3)}}{2c^2\sqrt{3}};$$

donc en faisant $x^2 = m^2 - 1$, il viendra

$$\cos^2\theta = \frac{-m^2 - \frac{1}{2} + \sqrt{(m^4 + m^2 + 1)}}{2c^2\sqrt{3}} = \frac{(m^2 - 1)^2}{2\sqrt{3} - 3}.$$

Or, d'après l'article 24, cette valeur de θ est celle qui pour le module $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$, donne $F(\theta) = \frac{1}{3}F^1$; donc

$$R^1 = \frac{2m\sqrt[4]{3}}{3}F^1c.$$

Comparant cette valeur à celle qu'on a trouvée par l'autre méthode, il en résulte cette nouvelle relation

$$F^1(b) = \sqrt{3}.F^1(c),$$

laquelle étant jointe aux deux déjà trouvées, fait voir qu'une seule des quatre transcendantes $F^1(c)$, $F^1(b)$, $E^1(c)$, $E^1(b)$ suffit pour déterminer les trois autres. On a, par exemple, les équations

$$\frac{\pi}{4\sqrt{3}} = F^1(c)\left[E^1(c) - \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right)F^1(c)\right],$$
$$\frac{\pi\sqrt{3}}{4} = F^1(b)\left[E^1(b) - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right)F^1(b)\right],$$

qui servent à déterminer la fonction $E^1(c)$ par le moyen de $F^1(c)$, et la fonction $E^1(b)$ par le moyen de $F^1(b)$.

CHAPITRE XII.

Théorème sur les fonctions complètes de première et de seconde espèce, dont les modules sont complémens l'un de l'autre.

45. Dans les comparaisons qu'on vient d'établir entre les fonctions $F^1(c)$, $E^1(c)$, qui se rapportent au module $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2 - \sqrt{3})} = \sin 15^\circ$, et les fonctions $F^1(b)$, $E^1(b)$, qui se rapportent au module complémentaire

$b = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})} = \cos 15^\circ$, les trois équations trouvées conduisent à ce résultat remarquable

$$\frac{\pi}{2} = F^1(c)\,E^1(b) + F^1(b)\,E^1(c) - F^1(b)\,F^1(c) \ldots\ldots (d')$$

où l'on voit que les deux quantités b, c peuvent être échangées entre elles, et qu'ainsi cette équation est vérifiée dans deux cas, celui de $c = \sin 15^\circ$, et celui de $c = \sin 75^\circ$. Il serait facile de démontrer directement qu'elle est encore vraie dans deux autres cas, lorsque c est infiniment petit, et lorsque $c = \sqrt{\frac{1}{2}} = b$; mais nous allons prouver généralement qu'elle a lieu quel que soit c.

Pour abréger la notation, désignons simplement par F, E, les quantités $F^1(c)$, $E^1(c)$, et par F', E', les quantités $F^1(b)$, $E^1(b)$, et supposons

$$P = FE' + F'E - FF',$$

P étant une fonction de c encore inconnue.

Je différencie les deux membres par rapport à c qui est la seule variable qu'ils contiennent. Or ayant $E(\varphi) = \int \Delta d\varphi$, $F(\varphi) = \int \frac{d\varphi}{\Delta}$, $\Delta^2 = 1 - c^2 \sin^2\varphi$, la différentiation donne

$$\frac{dE}{dc} = -\int \frac{c\,d\varphi \sin^2\varphi}{\Delta} = \frac{1}{c}(E - F),$$

$$\frac{dF}{dc} = \int \frac{c\,d\varphi \sin^2\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{c}\int \frac{d\varphi}{\Delta^3} - \frac{1}{c}\int \frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Mais par les formules de l'art. 9, on a $\int \frac{d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{b^2}\int \Delta d\varphi - \frac{c^2 \sin\varphi \cos\varphi}{b^2 \Delta}$, et dans le cas de $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ dont il s'agit, le second terme s'évanouit : ainsi on aura

$$\frac{dF}{dc} = \frac{1}{b^2 c}(E - b^2 F).$$

On aura semblablement $\frac{dE'}{db} = \frac{1}{b}(E' - F')$, $\frac{dF'}{db} = \frac{1}{c^2 b}(E' - c^2 F')$, et parce que $b\,db + c\,dc = 0$, on en déduira

$$\frac{dE'}{dc} = -\frac{c}{b^2}(E' - F'),$$

$$\frac{dF'}{dc} = -\frac{1}{b^2 c}(E' - c^2 F').$$

Substituant ces valeurs dans celle de dP, on aura $dP = 0$; donc $P = \text{const.}$ Mais on a trouvé dans un cas particulier $P = \frac{1}{2}\pi$; donc l'équation (d') a lieu généralement, quel que soit c.

Lorsque $c = \sqrt{\frac{1}{2}} = \delta$, l'équation (d') donne

$$\frac{\pi}{2} = F^1(2E^1 - F^1).$$

Ainsi dans ce cas particulier, E^1 se détermine encore par F^1.

Il peut y avoir quelques autres cas particuliers où la fonction de seconde espèce $E^1(\delta)$ s'exprime par la fonction de première espèce $F^1(c)$; nous ferons voir en effet que chaque cas particulier connu en fait connaître une infinité d'autres; mais il paraît impossible de réduire généralement les fonctions de seconde espèce à celles de la première.

CHAPITRE XIII.

Équations différentielles qui expriment la nature des fonctions E *et* F. *Intégrales complètes de ces équations.*

46. Si l'on différentie par rapport à c les deux fonctions $E = \int \Delta d\varphi$, $F = \int \frac{d\varphi}{\Delta}$, on aura comme dans le chapitre précédent

$$\left.\begin{aligned} \frac{dE}{dc} &= \frac{1}{c}(E - F), \\ \frac{dF}{dc} &= \frac{1}{b^2 c}(E - b^2 F) - \frac{c}{b^2} \cdot \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

de là résultent les deux formules

$$\left.\begin{aligned} F &= E - c\frac{dE}{dc}, \\ E &= b^2\left(F + c\frac{dF}{dc}\right) + \frac{c^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

qui contiennent les relations mutuelles des fonctions E et F, de sorte que si on avait l'expression analytique de E en fonction de c et φ, on en déduirait immédiatement celle de F par la formule $F = E - c\frac{dE}{dc}$; et réciproquement si on avait l'expression de F, on en déduirait celle de E par l'autre formule.

Si on élimine successivement E et F de ces deux équations, on aura

pour déterminer séparément les fonctions F et E, ces deux équations différentielles du second ordre

$$\left.\begin{aligned}(1-c^2)\frac{ddF}{dc^2}+\frac{1-3c^2}{c}\cdot\frac{dF}{dc}-F+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3}=0,\\(1-c^2)\frac{ddE}{dc^2}+\frac{1-c^2}{c}\cdot\frac{dE}{dc}+E-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}=0,\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

et lorsqu'on considère les fonctions complètes F^1, E^1, ou lorsqu'on fait... $\varphi=\frac{1}{2}\pi$; ces équations deviennent

$$\left.\begin{aligned}(1-c^2)\frac{ddF^1}{dc^2}+\frac{1-3c^2}{c}\cdot\frac{dF^1}{dc}-F^1=0,\\(1-c^2)\frac{ddE^1}{dc^2}+\frac{1-c^2}{c}\cdot\frac{dE^1}{dc}+E^1=0.\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Jusqu'ici F^1 et E^1 représentent les intégrales définies $\int\frac{d\varphi}{\Delta}$, $\int\Delta d\varphi$, prises depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=\frac{1}{2}\pi$; considérons plus généralement deux fonctions y et z déterminées par les équations différentielles :

$$\left.\begin{aligned}(1-c^2)\frac{ddy}{dc^2}+\frac{1-3c^2}{c}\cdot\frac{dy}{dc}-y=0,\\(1-c^2)\frac{ddz}{dc^2}+\frac{1-c^2}{c}\cdot\frac{dz}{dc}+z=0;\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

on satisfera à ces équations par les valeurs particulières $y=\alpha F^1(c)$, $z=\beta E^1(c)$, α et β étant des constantes arbitraires; mais pour avoir les intégrales complètes de ces deux équations il faut recourir à d'autres moyens.

47. Essayons d'abord de substituer la variable b à la variable c, puisqu'on a $b^2=1-c^2$, et $bdb=-cdc$, u étant une fonction quelconque de c, on aura en général $\frac{du}{dc}=-\frac{c}{b}\cdot\frac{du}{db}$, et $\frac{ddu}{dc^2}=\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{ddu}{db^2}-\frac{1}{b^3}\cdot\frac{du}{db}$; au moyen de cette substitution les équations (5) pourront être remplacées par les suivantes :

$$\left.\begin{aligned}(1-b^2)\frac{ddy}{db^2}+\frac{1-3b^2}{b}\cdot\frac{dy}{db}-y=0,\\(1-b^2)\frac{ddz}{db^2}-\left(\frac{1+b^2}{b}\right)\cdot\frac{dz}{db}+z=0.\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Je remarque maintenant que la première des équations (6) est entièrement semblable à la première des équations (5); et puisqu'on satisfait à celle-ci en faisant $y=\alpha F^1c$, on satisfera à celle-là en faisant $y=\alpha' F^1 b$. Ajoutant ces deux valeurs particulières, on aura l'intégrale complète de l'équation différentielle en y, laquelle sera

$$y = \alpha F^1 c + \alpha' F^1 b, \tag{7}$$

α et α' étant les deux constantes arbitraires.

Et comme nous avons trouvé que E^1 se déduit de F^1 au moyen de la formule $E^1 = b^2\left(F^1 + c\frac{dF^1}{dc}\right)$, il s'ensuit que la valeur générale de z se déduira semblablement de celle de y, au moyen de la formule $z = b^2 y + b^2 c\frac{dy}{dc}$; en effet cette valeur satisfait à la seconde des équations (5), en y substituant les valeurs de $\frac{ddy}{dc^2}$ et de $\frac{d^3y}{dc^3}$ tirées de la première de ces équations. On aura donc l'intégrale complète de l'équation différentielle en z, comme il suit :

$$z = b^2(\alpha F^1 c + \alpha' F^1 b) + b^2 c\left(\alpha\frac{dF^1 c}{dc} - \alpha'\frac{c}{b}\cdot\frac{dF^1 b}{db}\right),$$

substituant les valeurs $\frac{dFc}{dc} = \frac{1}{b^2 c}(E^1 c - b^2 F^1 c)$, $\frac{dF^1 b}{db} = \frac{1}{bc^2}(E^1 b - c^2 F^1 b)$, on aura $z = \alpha E^1 c + \alpha'(F^1 b - E^1 b)$, ou en changeant les constantes

$$z = \mathcal{C} E^1 c + \mathcal{C}'(F^1 b - E^1 b). \tag{8}$$

Telles sont les intégrales complètes des équations (5) considérées comme étant indépendantes l'une de l'autre, et il s'ensuit que si on avait en général les deux équations différentielles du second ordre

$$\left.\begin{aligned}(1-c^2)\frac{ddy}{dc^2} + \frac{1-3c^2}{c}\cdot\frac{dy}{dc} - y + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3} &= 0,\\ (1-c^2)\frac{ddz}{dc^2} + \frac{1-c^2}{c}\cdot\frac{dz}{dc} + z - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

les intégrales complètes de ces équations seraient

$$\left.\begin{aligned}y &= F(c,\varphi) + \alpha F^1 c + \alpha' F^1 b,\\ z &= E(c,\varphi) + \mathcal{C} E^1 c + \mathcal{C}'(F^1 b - E^1 b).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Ces intégrales et celles des équations (5) qui en sont un cas particulier offrent une application très remarquable des fonctions elliptiques; car, comme on trouve aisément les différentielles des fonctions $F^1 c$, $E^1 c$, $F^1 b$, $E^1 b$, $F(c, \varphi)$, $E(c, \varphi)$, prises par rapport à l'une ou l'autre des variables c et b, il est clair que ces intégrales pourront être employées dans le calcul analytique, à l'instar de celles qui ne contiennent que de simples fonctions circulaires et logarithmiques; et lorsqu'il s'agira d'obtenir des résultats numériques pour des valeurs déterminées de la variable, on les

trouvera aussi exactement qu'il est nécessaire par les tables qui seront données ci-après.

On voit dans le Calcul intégral d'Euler, tom. I, pag. 329 et suivantes, diverses constructions par les quadratures d'une équation différentielle qui est la même que la seconde des équations (6) ou (5). Mais ces constructions ne suppléent qu'imparfaitement à l'intégrale complète que nous avons rapportée.

CHAPITRE XIV.

Développement des fonctions complètes F^1 *et* E^1 *en séries.*

48. On a trouvé dans le chapitre précédent que les quantités F^1 et E^1 considérées comme fonctions du module c, satisfont aux équations différentielles

$$(1-c^2)\frac{ddF^1}{dc^2}+\frac{1-3c^2}{c}\cdot\frac{dF^1}{dc}-F^1=0,$$
$$(1-c^2)\frac{ddE^1}{dc^2}+\frac{1-c^2}{c}\cdot\frac{dE^1}{dc}+E^1=0,$$

et que ces mêmes quantités, considérées comme fonctions du module complémentaire b, satisfont aux équations

$$(1-b^2)\frac{ddF^1}{db^2}+\frac{1-3b^2}{b}\cdot\frac{dF^1}{db}-F^1=0,$$
$$(1-b^2)\frac{ddE^1}{db^2}-\left(\frac{1+b^2}{b}\right)\cdot\frac{dE^1}{db}+E^1=0.$$

Ces équations sont utiles pour faire connaître la loi du développement des fonctions F^1, E^1 en séries. Il n'y a aucune difficulté à développer ces fonctions suivant les puissances de c; car les expressions $F=\int d\varphi(1-c^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$, $E=\int d\varphi(1-c^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$ étant réduites en séries et intégrées depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, on en tire immédiatement

$$F^1=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1^2}{2^2}c^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\cdot c^4+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\cdot c^6+\text{etc.}\right),$$
$$E^1=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}c^2-\frac{1^2}{2^2.4^2}.3c^4-\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2.6^2}.5c^6-\text{etc.}\right).$$

Mais ces séries ne sont plus suffisamment convergentes, lorsque c est fort près de l'unité, et alors il convient de les ordonner suivant les puissances de b, en considérant b comme très petit.

Or d'après l'équation $E^1 = b^2\left(F^1 + c\frac{dF^1}{dc}\right) = b^2.\frac{d(cF^1)}{dc}$, on peut, pour la première approximation, faire $E^1 = 1$, ce qui donnera $d(cF^1) = \frac{dc}{b^2} = \frac{dc}{1-c^2}$, et par conséquent $cF^1 = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+c}{1-c}\right)$; mais dans le même cas, on a..... $c = 1 - \frac{1}{2}b^2$; donc la première valeur approchée de F^1 est $F^1 = \log\left(\frac{4}{b}\right)$.

Soit maintenant $F^1 = P\log\left(\frac{4}{b}\right) + Q$, P et Q étant des suites ordonnées suivant les puissances de b; si on substitue cette valeur dans l'équation différentielle

$$(1 - b^2)\frac{ddF^1}{db^2} + \frac{1-3b^2}{b}.\frac{dF^1}{db} - F^1 = 0,$$

on trouvera que l'équation pour déterminer P est absolument semblable à celle qui détermine F^1; celle-ci est de la même forme, soit que l'on considère F comme fonction de c ou comme fonction de b; et puisqu'elle doit avoir 1 pour premier terme, on aura

$$P = 1 + \frac{1^2}{2^2}b^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}b^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}b^6 + \text{etc.}$$

Désignons les coefficiens successifs par m', m'', etc.. en sorte qu'on ait

$$P = 1 + m'b^2 + m''b^4 + m'''b^6 + \text{etc.};$$

nous supposerons ensuite

$$F^1 = (1 + m'b^2 + m''b^4 + m'''b^6 + \text{etc.})\log\frac{4}{b}$$
$$- m'A'b^2 - m''A''b^4 - m'''A'''b^6 - \text{etc.}$$

Substituant cette valeur dans l'équation différentielle ci-dessus, on aura pour déterminer les nouveaux coefficiens A', A'', etc., l'équation suivante, dont les termes suivent une loi très simple :

$$\begin{array}{lllllll}
0 = & 2 & +6m'b^2 & +10m''b^4 & +14m'''b^6 & +18m^{\text{iv}}b^8 & +\text{etc.} \\
 & -4m' & -8m''b^2 & -12m'''b^4 & -16m^{\text{iv}}b^6 & -20m^{\text{v}}b^8 & -\text{etc.} \\
 & & -2^2m'A' & -4^2m''A''b^2 & -6^2m'''A'''b^4 & -8^2m^{\text{iv}}A^{\text{iv}}b^6 & -10^2m^{\text{v}}A^{\text{v}}b^8 - \text{etc.} \\
 & & & +3^2m'A'b^2 & +5^2m''A''b^4 & +7^2m'''A'''b^6 & +9^2m^{\text{iv}}A^{\text{iv}}b^8 + \text{etc.}
\end{array}$$

Observant ensuite qu'on a $2^2m' = 1$, $4^2m'' = 3^2m'$, $6^2m''' = 5^2m''$, etc.,

on trouve successivement

$$A' = 1,$$
$$A'' = 1 + \frac{2}{3.4},$$
$$A''' = 1 + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{5.6},$$
$$A^{\text{IV}} = 1 + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{5.6} + \frac{2}{7.8},$$
etc.

de sorte qu'on a en général $A^{(n)} = A^{(n-1)} + \frac{2}{(2n-1)\,2n}$. D'après cette loi, il est facile de voir ce que devient $A^{(n)}$ lorsque n est très grand; considérons pour cet effet la suite

$$y = \frac{2x^2}{1.2} + \frac{2x^4}{3.4} + \frac{2x^6}{5.6} + \frac{2x^8}{7.8} + \text{etc.},$$

laquelle peut être mise sous cette forme

$$y = 2x\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{etc.}\right)$$
$$- \left(x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{4} + \text{etc.}\right);$$

on aura en sommant ces suites, $y = x \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \log(1 - x^4) = (1+x)\log(1+x) + (1-x)\log(1-x)$. Soit $x = 1$, on aura $y = 2\log 2$; donc la limite des quantités A', A'', A''', etc., est $2\log 2$ ou 1,386, etc. Cela posé, la valeur complète de F^1 se développe ainsi :

$$F^1 = \log\frac{4}{b} + \frac{1^2}{2^4} b^2 \left(\log\frac{4}{b} - 1\right)$$
$$+ \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} b^4 \left(\log\frac{4}{b} - 1 - \frac{2}{3.4}\right)$$
$$+ \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} b^6 \left(\log\frac{4}{b} - 1 - \frac{2}{3.4} - \frac{2}{5.6}\right)$$
$$+ \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2} b^8 \left(\log\frac{4}{b} - 1 - \frac{2}{3.4} - \frac{2}{5.6} - \frac{2}{7.8}\right),$$
$$+ \text{etc.}$$

Connaissant F^1, on aura immédiatement E^1 d'après l'équation $E^1 = b^2F^1 + b^2c\frac{dF^1}{dc} = b^2F^1 - b(1 - b^2)\frac{dF^1}{db}$, et il en résulte

$$\begin{aligned} E^1 = 1 &+ \frac{1}{2} b^2 \left(\log \frac{4}{b} - \frac{1}{1.2}\right) \\ &+ \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3}{4} b^4 \left(\log \frac{4}{b} - A' - \frac{1}{3.4}\right) \\ &+ \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} \cdot \frac{5}{6} b^6 \left(\log \frac{4}{b} - A'' - \frac{1}{5.6}\right) \\ &+ \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} \cdot \frac{7}{8} b^8 \left(\log \frac{4}{b} - A''' - \frac{1}{7.8}\right), \\ &+ \text{etc.}, \end{aligned}$$

expression dont la loi est manifeste et qui s'accorde avec celle que nous avons donnée sous une autre forme (*Mém. de l'Acad.*, 1786, pag. 630).

CHAPITRE XV.

Changemens qu'on peut faire subir au paramètre dans les fonctions elliptiques de la troisième espèce.

49. Soit $p = \frac{\tang \varphi}{\Delta}$, et soit α une constante indéterminée; on trouve par la différenciation,

$$\frac{dp}{1+\alpha p^2} = \frac{d\varphi}{\Delta} \cdot \frac{1 - c^2 \sin^4 \varphi}{(1 - c^2 \sin^2 \varphi) \cos^2 \varphi + \alpha \sin^2 \varphi}.$$

Supposons que le dénominateur $(1 - c^2 \sin^2 \varphi) \cos^2 \varphi + \alpha \sin^2 \varphi$ soit égal au produit des deux facteurs $(1 + n \sin^2 \varphi)\left(1 + \frac{c^2}{n} \sin^2 \varphi\right)$, la valeur de α devra être

$$\alpha = (1+n)\left(1 + \frac{c^2}{n}\right),$$

et alors l'équation différentielle se décomposant ainsi,

$$\frac{dp}{1+\alpha p^2} = \frac{d\varphi}{\Delta}\left[\frac{1}{1+n\sin^2\varphi} + \frac{1}{1+\frac{c^2}{n}\sin^2\varphi} - 1\right],$$

son intégrale est

$$\Pi(n) + \Pi\left(\frac{c^2}{n}\right) = F + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{ arc tang } \frac{\sqrt{\alpha} \tang \varphi}{\Delta} \ldots\ldots (f'),$$

formule très remarquable au moyen de laquelle toute fonction Π dont le paramètre est plus grand que le module c, peut toujours être transformée en une autre dont le paramètre sera plus petit que c; car des deux paramètres n et $\frac{c^2}{n}$, il est évident que l'un est toujours plus grand que c et l'autre plus petit. Les fonctions Π qui s'expriment ainsi l'une par l'autre, ont d'ailleurs le même module c et la même amplitude φ; c'est pourquoi, au lieu de les désigner par $\Pi(n, c, \varphi)$, $\Pi\left(\frac{c^2}{n}, c, \varphi\right)$, nous les désignons simplement par $\Pi(n)$, $\Pi\left(\frac{c^2}{n}\right)$, en ne signalant que l'élément par lequel les deux fonctions diffèrent l'une de l'autre.

La formule générale (f') appliquée aux cas de $n = c$ et de $n = -c$, fournit ces deux corollaires,

$$\Pi(c) = \tfrac{1}{2}\mathrm{F} + \frac{\frac{1}{2}}{1+c} \operatorname{arc\,tang} \frac{(1+c)\operatorname{tang}\varphi}{\Delta},$$

$$\Pi(-c) = \tfrac{1}{2}\mathrm{F} + \frac{\frac{1}{2}}{1-c} \operatorname{arc\,tang} \frac{(1-c)\operatorname{tang}\varphi}{\Delta}.$$

Ainsi dans ces deux cas, la fonction de troisième espèce se réduit immédiatement à une fonction de première espèce.

50. Il y a trois cas à considérer dans la formule (f'), selon que α est positif, zéro ou négatif.

Le coefficient α sera positif toutes les fois que le paramètre n sera positif, ou toutes les fois que n étant négatif, il sera compris entre -1 et $-c^2$; en d'autres termes α sera positif si le paramètre n est de l'une des deux formes $n = \cot^2\theta$, $n = -1 + b^2\sin^2\theta$. Alors l'équation (f') contiendra un arc de cercle réel, et par cette équation on ramènera l'une à l'autre les deux fonctions $\Pi(n)$, $\Pi\left(\frac{c^2}{n}\right)$.

Dans ce premier cas, si l'on fait $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on aura entre les fonctions complètes cette relation

$$\Pi^1(n) + \Pi^1\left(\frac{c^2}{n}\right) = \mathrm{F}^1 + \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}.$$

51. Si l'on fait $\alpha = 0$, on aura $n = -1$ ou $n = -c^2$, alors l'intégrale $\int \frac{dp}{1+\alpha p^2}$ se réduisant à p, l'équation (f') devient

$$\Pi(-1) + \Pi(-c^2) = \mathrm{F} + \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\Delta}.$$

Ce résultat est facile à vérifier; on a en effet par les réductions déjà connues,

$$\Pi(-1)=\int\frac{d\varphi}{\Delta\cos^2\varphi}=F-\frac{1}{b^2}E+\frac{1}{b^2}\Delta\tang\varphi,$$

$$\Pi(-c^2)=\int\frac{d\varphi}{\Delta^3}=\frac{1}{b^2}E-\frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{b^2\Delta},$$

et la somme de ces deux quantités se réduit à $F+\frac{\tang\varphi}{\Delta}$.

La fonction $\Pi(-1)$ qui se ramène immédiatement aux fonctions de la première et de la seconde espèce, est celle qui donne la rectification de l'hyperbole (art. 13). Elle a une valeur infinie lorsque $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, parce qu'alors elle représente la longueur totale de la courbe jusqu'à son extrémité infinie; et c'est aussi ce que donne la formule précédente; mais cette formule serait en défaut si on voulait faire $\varphi>\frac{1}{2}\pi$; elle semblerait donner une valeur finie pour $\Pi(-1)$, tandis que cette valeur, composée de la partie où $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ et d'une autre partie, est nécessairement infinie. C'est du moins ce qui paraît résulter de la formule intégrale $\Pi(-1)$ considérée en elle-même, et sans rapport à aucune courbe; car nous supposons toujours Δ positif.

52. Il reste à examiner le cas où α est négatif; ce cas aura lieu toutes les fois que le paramètre sera négatif, mais non compris entre -1 et $-c^2$; de sorte que n devra être représenté par l'une ou l'autre des formules $n=-\frac{1}{\sin^2\theta}$, $n=-c^2\sin^2\theta$.

Soit donc $n=-c^2\sin^2\theta$, et $\alpha=-\mathcal{C}$, on aura $\mathcal{C}=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}(1-c^2\sin^2\theta)$, et l'intégrale $\int\frac{dp}{1+\alpha p^2}$ devient $\int\frac{dp}{1-\mathcal{C}p^2}$ ou $\frac{1}{2\sqrt{\mathcal{C}}}\log\left(\frac{1+p\sqrt{\mathcal{C}}}{1-p\sqrt{\mathcal{C}}}\right)$; donc alors l'équation (f') devra être remplacée par la suivante :

$$\Pi(n)+\Pi\left(\frac{c^2}{n}\right)=F+\frac{1}{2\sqrt{\mathcal{C}}}\log\left(\frac{\Delta+\sqrt{\mathcal{C}}\tang\varphi}{\Delta-\sqrt{\mathcal{C}}\tang\varphi}\right).$$

Mettant dans cette équation les valeurs de n et de $\mathcal{C}$, et observant que $\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}$ peut être désigné par $\Delta(\theta)$ tandis que $\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}$ l'est par $\Delta(\varphi)$, on aura cette formule générale pour le cas de α négatif :

$$\Pi(-c^2\sin^2\theta)+\Pi\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)=F+\frac{\tang\theta}{2\Delta(\theta)}\log\left(\frac{\Delta(\varphi)\tang\theta+\Delta(\theta)\tang\varphi}{\Delta(\varphi)\tang\theta-\Delta(\theta)\tang\varphi}\right).$$

Il est à remarquer que le second membre de cette équation devient infini lorsque $\varphi=\theta$: en effet, comme on a

$$\Pi\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)=\int\frac{d\varphi}{\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\theta}\right)\Delta},$$

on voit que le dénominateur de la différentielle est zéro lorsque $\varphi = \theta$, ce qui rend, pour ce cas, l'intégrale infinie.

Lorsqu'ensuite on suppose $\varphi > \theta$, le dénominateur devient négatif, et la valeur de $\Pi\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)$ redevient finie par la destruction mutuelle des parties infinies et de signes contraires. Mais alors la formule a besoin d'être rectifiée pour ne pas offrir le logarithme d'une quantité négative, et il faudra l'écrire ainsi :

$$\Pi(-c^2\sin^2\theta)+\Pi\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)=F+\frac{\tang\theta}{2\Delta(\theta)}\log\frac{\Delta(\theta)\tang\varphi+\Delta(\varphi)\tang\theta}{\Delta(\theta)\tang\varphi-\Delta(\varphi)\tang\theta}:$$

elle aura lieu depuis $\varphi=\theta$ jusqu'à $\varphi=\frac{1}{2}\pi$.

Lorsque $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, cette formule donne entre les fonctions complètes la relation

$$\Pi'(-c^2\sin^2\theta)+\Pi'\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)=F',$$

où l'on voit que les logarithmes ont entièrement disparu.

J'observe sur cette dernière équation que la fonction $\Pi(-c^2\sin^2\theta)$, qui représente l'intégrale $\int\frac{d\varphi}{(1-c^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)\Delta}$, est nécessairement plus grande que $\int\frac{d\varphi}{\Delta}$ ou F, et qu'ainsi $\Pi'(-c^2\sin^2\theta)$ est plus grande que F'; l'équation précédente ne peut donc subsister à moins que $\Pi'\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)$ ne soit négatif. Or, ce résultat s'explique facilement par la nature de la fonction $\Pi\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)$ qui est positive depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=\theta$, et négative depuis $\varphi=\theta$ jusqu'à $\varphi=\frac{1}{2}\pi$; il faut par conséquent que la partie négative soit plus grande que la partie positive.

53. *Au reste pour éviter toute anomalie étrangère à l'objet dont nous nous occupons, et pour ne considérer des fonctions* Π *que celles qui sont positives et finies; nous ferons abstraction, dans tout ce qui suit, du cas où le paramètre* n *est à la fois négatif et plus grand que l'unité.*

Si ce cas se rencontrait, on vient de voir par quelle formule la fonction proposée $\Pi\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)$ pourrait se réduire à la fonction $\Pi(-c^2\sin^2\theta)$ qui n'est sujette à aucune difficulté; l'anomalie tomberait alors sur le terme logarithmique joint à cette fonction.

Cela posé, les fonctions Π, eu égard aux diverses valeurs du paramètre, se rapportent à trois cas principaux qui exigent des développemens particuliers.

Premier cas. Si le paramètre n est positif, on pourra toujours lui donner la forme $n = \cot^2\theta$, et on aura alors $\sqrt{\alpha} = \frac{\sqrt{(1 - b^2\sin^2\theta)}}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\Delta(b,\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$.

Second cas. Si le paramètre n est négatif, mais non plus petit que c^2, on pourra le désigner par la formule $n = -1 + b^2\sin^2\theta$, et alors on aura $\sqrt{\alpha} = \frac{b^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{(1 - b^2\sin^2\theta)}} = \frac{b^2\sin\theta\cos\theta}{\Delta(b,\theta)}$.

Troisième cas. Si le paramètre n est négatif et plus petit que c^2, on pourra faire $n = -c^2\sin^2\theta$, et on aura $\sqrt{(\alpha)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Delta(\theta).\sqrt{-1}$.

On verra ci-après que les deux premiers cas se rapportent à une seule et même espèce, attendu qu'une fonction qui appartient à l'un de ces cas, peut être transformée en une fonction qui appartienne à l'autre cas. Il n'en est pas de même du troisième cas qui diffère essentiellement des deux autres; car les fonctions qui se rapportent aux deux premiers cas, entraînent toujours dans leur comparaison des arcs de cercle; tandis que les fonctions qui se rapportent au troisième, n'admettent dans leur comparaison que des logarithmes.

Il semblerait naturel d'ajouter à ces trois cas celui où l'on supposerait le paramètre n imaginaire; mais nous prouverons ci-après que ce quatrième cas est inutile à considérer, et qu'on peut toujours y suppléer par des transformations convenables.

54. Soit maintenant $p = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}$, et k un coefficient indéterminé; on aura par la différenciation,

$$\frac{dp}{1 + kp^2} = \frac{1 - 2\sin^2\varphi + c^2\sin^4\varphi}{1 + (k - c^2)\sin^2\varphi - k\sin^4\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta};$$

si on fait ensuite le dénominateur

$$1 + (k - c^2)\sin^2\varphi - k\sin^4\varphi = (1 + n\sin^2\varphi)(1 - m\sin^2\varphi),$$

il en résultera $k = mn$, $(1 + n)(1 - m) = b^2$, et l'équation différentielle prendra la forme

$$\frac{dp}{1 + kp^2} = \frac{d\varphi}{\Delta}\left[\frac{1 + n}{n} \cdot \frac{1}{1 + n\sin^2\varphi} - \frac{1 - m}{m} \cdot \frac{1}{1 - m\sin^2\varphi} - \frac{c^2}{mn}\right],$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$\frac{1 + n}{n}\Pi(n) - \left(\frac{1 - m}{m}\right)\Pi(-m) = \frac{c^2}{mn}F + \frac{1}{\sqrt{mn}}\text{arc tang}\frac{\sqrt{mn}\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} \ldots (g').$$

Par cette formule les deux fonctions $\Pi(n)$, $\Pi(-m)$, peuvent être

réduites l'une à l'autre, pourvu qu'entre les paramètres n et $-m$, on ait la relation

$$(1+n)(1-m)=b^2.$$

Cette relation est telle, que si l'on fait $n=\cot^2\theta$, on aura $-m=-1+b^2\sin^2\theta$; d'où l'on voit que les deux premiers cas du n° 53, n'en font à proprement parler qu'un seul, puisque la réduction d'une fonction à l'autre peut se faire immédiatement au moyen de la formule

$$\Pi(\cot^2\theta)=\frac{b^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{1-b^2\sin^2\theta}\Pi(-1+b^2\sin^2\theta)$$
$$+\frac{c^2\sin^2\theta}{1-b^2\sin^2\theta}F+\frac{\sin\theta\cos\theta}{\Delta(b,\theta)}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sin\varphi\cos\varphi\Delta(b,\theta)}{\operatorname{tang}\theta\Delta(c,\varphi)}.$$

55. Si dans la formule (g'), on fait $m=c^2\sin^2\theta$, l'équation de condition $(1+n)(1-m)=b^2$, donnera $n(\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)=-c^2\cos^2\theta$, d'où il suit que n pourra aussi être représenté par la valeur $n=-c^2\sin^2\lambda$, et alors on aura entre θ et λ la relation $\sin^2\lambda(\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)=\cos^2\theta$, d'où résulte

$$1=b\operatorname{tang}\theta\operatorname{tang}\lambda;$$

c'est la même relation qui donne $F(\theta)+F(\lambda)=F^1$.

On aura donc dans ce cas la formule générale

$$\cos^2\theta.\Pi(-c^2\sin^2\theta)+\cos^2\lambda.\Pi(-c^2\sin^2\lambda)$$
$$=F-\tfrac{1}{2}\sin\theta\sin\lambda\log\left(\frac{\Delta+c^2\sin\theta\sin\lambda\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta-c^2\sin\theta\sin\lambda\sin\varphi\cos\varphi}\right),$$

au moyen de laquelle on pourra réduire l'une à l'autre les fonctions... $\Pi(-c^2\sin^2\theta)$, $\Pi(-c^2\sin^2\lambda)$, pourvu qu'entre les paramètres on ait la relation $1=b\operatorname{tang}\theta\operatorname{tang}\lambda$.

Ainsi, non seulement les fonctions Π dont le paramètre est négatif et plus grand que l'unité, peuvent se réduire aux fonctions dont le paramètre est plus petit que c^2 (art. 52), mais celles-ci peuvent encore être réduites au cas où le paramètre, toujours de forme $-c^2\sin^2\theta$, n'excède pas $1-b$; car dans le cas où l'on aurait $\theta=\lambda$, l'équation $1=b\operatorname{tang}\theta\operatorname{tang}\lambda$ donne $\sin^2\theta=\frac{1}{1+b}$, et par conséquent $c^2\sin^2\theta=1-b$; dans tout autre cas, l'un des paramètres $-c^2\sin^2\theta$, $-c^2\sin^2\lambda$, abstraction faite de son signe, sera nécessairement plus petit que $1-b$.

Le cas de $\theta=\lambda$ mérite d'être remarqué; alors la formule générale donne

$$\Pi(-1+b)=\frac{1+b}{2b}F-\frac{1}{4b}\log\left(\frac{\Delta+(1-b)\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta-(1-b)\sin\varphi\cos\varphi}\right).$$

Ainsi la fonction de troisième espèce $\Pi(-1+b)$ se réduit indéfiniment à la première espèce, et on a en particulier pour l'expression de la fonction complète,

$$\Pi'(-1+b)=\frac{1+b}{2b}F'.$$

Il résulte des formules précédentes, 1°. que dans les fonctions elliptiques de la troisième espèce, le paramètre peut toujours se réduire soit à la forme $-1+b^2\sin^2\theta$ comprise entre 1 et c^2, soit à la forme $-c^2\sin^2\theta$ plus petite que c^2; 2°. que ces deux formes sont essentiellement différentes et non réductibles l'une de l'autre, la première n'offrant que des arcs de cercle dans ses comparaisons et réductions, la seconde n'offrant que des logarithmes.

Quant aux fonctions dont le paramètre est imaginaire, on démontrera ci-après que chacune d'elles se réduit toujours à deux autres dont les paramètres sont réels, l'un étant de la forme $-1+b^2\sin^2\theta$, l'autre de la forme $-c^2\sin^2\theta$.

CHAPITRE XVI.

Comparaison des fonctions elliptiques de la troisième espèce.

56. Considérons les deux fonctions semblables

$$\Pi(\varphi)=\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta(\varphi)},\ \Pi(\psi)=\int\frac{d\psi}{(1+n\sin^2\psi)\Delta\psi},$$

et supposons, comme nous l'avons fait pour les fonctions de la première et de la seconde espèce, qu'on a l'équation $F(\varphi)+F(\psi)-F(\mu)=0$, μ étant une constante; alors si on fait $\Pi(\varphi)+\Pi(\psi)-\Pi(\mu)=Q$, on aura

$$Q=\int\left[\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta(\varphi)}+\frac{d\psi}{(1+n\sin^2\psi)\Delta(\psi)}\right],$$

cette intégrale étant prise de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $\varphi=0$ ou lorsque $\psi=\mu$.

Mais puisque μ est constant, on a $\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}+\frac{d\psi}{\Delta(\psi)}=0$, d'où résulte

$$Q=\int\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}\cdot\frac{n(\sin^2\psi-\sin^2\varphi)}{1+n(\sin^2\psi+\sin^2\varphi)+n^2\sin^2\psi\sin^2\varphi}.$$

Or on a trouvé (art. 34) $d\varphi\Delta(\varphi)+d\psi\Delta(\psi)=c^2d(\sin\mu\sin\varphi\sin\psi)$; le premier membre se réduit à $\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}[\Delta^2(\varphi)-\Delta^2(\psi)]=\frac{c^2d\varphi}{\Delta(\varphi)}(\sin^2\psi-\sin^2\varphi)$; donc en faisant $\sin^2\varphi+\sin^2\psi=p$, $\sin\varphi\sin\psi=q$, on a..... $\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}(\sin^2\psi-\sin^2\varphi)=\sin\mu.dq$; donc enfin

$$Q=\int\frac{n\sin\mu.dq}{1+np+n^2q^2}.$$

Mais de l'équation $\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\Delta(\mu)=\cos\mu$, on déduit $1-p+q^2=[\cos\mu+q\Delta(\mu)]^2$, et par conséquent

$$p=\sin^2\mu-2q\cos\mu\Delta(\mu)+c^2q^2\sin^2\mu;$$

mettant cette valeur de p dans la formule précédente, on a

$$Q=\int\frac{n\sin\mu.dq}{1+n\sin^2\mu-2nq\cos\mu\Delta(\mu)+q^2(n^2+nc^2\sin^2\mu)}.$$

Effectuant donc l'intégration, et faisant comme ci-dessus $\alpha=(1+n)\left(1+\frac{c^2}{n}\right)$, on aura Q ou

$$\Pi(\varphi)+\Pi(\psi)-\Pi(\mu)=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\text{arc tang}\left(\frac{n\sqrt{\alpha}\sin\mu\sin\varphi\sin\psi}{1+n-n\cos\mu\cos\varphi\cos\psi}\right)\ldots.(h').$$

C'est la formule générale qui, pour les fonctions de troisième espèce, correspond à la formule $F(\varphi)+F(\psi)-F(\mu)=0$ pour les fonctions de la première espèce, et à la formule $E(\varphi)+E(\psi)-E(\mu)=c^2\sin\mu\sin\varphi\sin\psi$ pour les fonctions de la seconde espèce.

Ainsi la différence qui est zéro dans les fonctions de première espèce, et algébrique dans celles de la seconde espèce, est exprimée par un arc de cercle ou par un logarithme dans les fonctions de troisième espèce. Je dis *arc de cercle* ou *logarithme*, car on voit que le second membre de l'équation (h') sera un arc de cercle ou un logarithme, selon que α sera positif ou négatif, c'est-à-dire, selon que la fonction Π se rapportera aux deux premiers cas ou au troisième de l'art. 53.

57. De l'équation (h') et de toutes celles qu'on peut former semblablement entre trois fonctions Π, nous conclurons que si i, k, l, etc. sont des entiers positifs, on pourra toujours faire en sorte que l'on ait

$$i\Pi(\varphi)+k\Pi(\psi)+l\Pi(\omega)+\text{etc.}=W,$$

W étant une quantité déterminable par arcs de cercle ou par logarithmes.

Il faut pour cela établir entre les amplitudes φ, ψ, ω, etc., la relation qui donne

$$iF(\varphi) + kF(\psi) + lF(\omega) + \text{etc.} = 0,$$

et cette relation peut toujours être exprimée par une équation algébrique entre les sinus des angles φ, ψ, ω, etc. Ce résultat ne souffre aucune exception, et aurait lieu même quand le paramètre n serait imaginaire. Mais on peut considérer ces propriétés sous un point de vue encore plns général.

58. Soit P ou $P(\varphi)$ une fonction rationnelle paire de $\sin\varphi$, et soit

$$Z(\varphi) = \int \frac{P(\varphi).d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\varphi)}}.$$

Soit $Z(\psi)$ une fonction semblable de ψ, ces fonctions ou intégrales étant prises de manière qu'elles s'évanouissent lorsque les amplitudes φ et ψ sont nulles. Supposons qu'on ait toujours l'équation $F(\varphi) + F(\psi) - F(\mu) = 0$, laquelle en prenant μ constante donne $\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = 0$, on aura donc

$$Z(\varphi) + Z(\psi) - Z(\mu) = \int \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} [P(\varphi) - P(\psi)].$$

Faisons comme ci-dessus $\sin^2\varphi + \sin^2\psi = p$, $\sin\varphi \sin\psi = q$, il en résultera

$$\sin^2\varphi = \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}\sqrt{(p^2 - 4q^2)},$$
$$\sin^2\psi = \tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{2}\sqrt{(p^2 - 4q^2)}.$$

Substituons maintenant la valeur de $\sin^2\varphi$ dans $P(\varphi)$, le résultat sera de la forme

$$P(\varphi) = M + N\sqrt{(p^2 - 4q^2)},$$

M et N étant des fonctions rationnelles de p et q. On aura de même

$$P(\psi) = M - N\sqrt{(p^2 - 4q^2)};$$

donc $P(\varphi) - P(\psi) = 2N\sqrt{(p^2 - 4q^2)} = 2N(\sin^2\varphi - \sin^2\psi)$, et....

$\int \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} [P(\varphi) - P(\psi)] = \int \frac{2Nd\varphi(\sin^2\varphi - \sin^2\psi)}{\Delta(\varphi)} = -2\int Ndq \sin\mu$; donc enfin

$$Z(\varphi) + Z(\psi) - Z(\mu) = -2\sin\mu \int Ndq.$$

Dans cette formule, N est une fonction rationnelle de p et de q; si on y substitue la valeur de p en q, savoir $p = \sin^2\mu - 2q\cos\mu\,\Delta(\mu) + c^2q^2\sin^2\mu$, N sera une fonction rationnelle de q seule; et ainsi la valeur de $Z(\varphi) + Z(\psi) - Z(\mu)$ pourra toujours se déterminer par arcs de cercle et par logarithmes.

En général si i, k, l, etc. désignent des nombres entiers positifs ou négatifs,

et qu'on établisse entre les angles φ, ψ, ω, etc. la relation qui donne $iF(\varphi) + kF(\psi) + lF(\omega) + \text{etc.} = 0$, on aura en même temps

$$iZ(\varphi) + kZ(\psi) + lZ(\omega) + \text{etc.} = W,$$

W étant une quantité déterminable par arcs de cercle et par logarithmes. La même propriété aura lieu quand même P contiendrait des puissances impaires de $\sin\varphi$; car la partie de dZ affectée des puissances impaires, s'intégrerait par arcs de cercle et par logarithmes.

Il en est absolument de même de la fonction

$$Z(x) = \int \frac{P dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \iota x^4)}},$$

P étant une fonction rationnelle de x, et on pourra toujours trouver une équation algébrique entre x, y, z, etc., telle que la quantité

$$iZ(x) + kZ(y) + lZ(z) + \text{etc.}$$

soit déterminable par les arcs de cercle et les logarithmes.

59. Revenons à la formule (h') d'où l'on doit déduire tout ce qui concerne la comparaison des fonctions de troisième espèce. Nous avons déjà observé que dans cette formule l'arc de cercle doit être remplacé par un logarithme, lorsque le paramètre est de la forme $n = -c^2 \sin^2\theta$; alors on a $\sqrt{\alpha} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Delta(\theta).\sqrt{-1}$, et parce qu'en général $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ arc tang $z\sqrt{-1}$ $= \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$, si l'on fait pour abréger,

$$\frac{\sin\theta\cos\mu\Delta(\mu) - \cos\theta\sin\mu\Delta(\theta)}{1 - c^2\sin^2\theta\sin^2\mu} = \sin\mu',$$

$$\frac{\sin\theta\cos\mu\Delta(\mu) + \cos\theta\sin\mu\Delta(\theta)}{1 - c^2\sin^2\theta\sin^2\mu} = \sin\mu'',$$

la formule (h') se changera en celle-ci ;

$$\Pi(\varphi) + \Pi(\psi) - \Pi(\mu) = \frac{\tang\theta}{2\Delta(\theta)}\log\left(\frac{1 + c^2\sin\theta\sin\mu'\sin\varphi\sin\psi}{1 + c^2\sin\theta\sin\mu''\sin\varphi\sin\psi}\right);$$

et l'on peut remarquer que les angles auxiliaires μ', μ'', sont ceux qui donneraient

$$F(\theta) - F(\mu) = F(\mu'),\ F(\theta) + F(\mu) = F(\mu'').$$

Au reste, comme on peut immédiatement convertir en logarithmes les arcs dont les tangentes sont de la forme $t\sqrt{-1}$, on pourra se borner à n'employer que l'équation (h') dans toutes les comparaisons qu'on aura à faire des fonctions Π, selon les diverses valeurs de n; mais pour faciliter

les applications, nous croyons devoir rapporter ici les formules qui ont lieu dans quelques-uns des cas les plus simples, en y joignant celles qui concernent les fonctions de la première et de la deuxième espèce.

60. Soit, 1°. $\mu = \frac{1}{2}\pi$, on aura successivement pour les trois espèces de fonctions elliptiques :

$$F(\varphi) + F(\psi) - F' = 0,$$
$$E(\varphi) + E(\psi) - E' = c^2 \sin\varphi \sin\psi,$$
$$\Pi(\varphi) + \Pi(\psi) - \Pi' = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{ arc tang } \frac{n\sqrt{\alpha}\sin\varphi\sin\psi}{1+n}.$$

La relation entre φ et ψ est donnée par l'équation $b \tang\varphi \tang\psi = 1$, d'où l'on tire $\sin\psi = \frac{\cos\varphi}{\Delta(\varphi)}$ et $\sin\varphi = \frac{\cos\psi}{\Delta(\psi)}$. Quant à la valeur de α, elle s'exprime suivant les différentes formes de n, comme on l'a vu (art. 53).

Si en particulier on a $\varphi = \psi$, ce qui donne $\tang\varphi = \frac{1}{\sqrt{b}}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1+b)}}$, les formules précédentes deviennent

$$F(\varphi) = \tfrac{1}{2}F',$$
$$E(\varphi) = \tfrac{1}{2}E' + \tfrac{1}{2}(1-b),$$
$$\Pi(\varphi) = \tfrac{1}{2}\Pi' + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \text{ arc tang } \frac{n\sqrt{\alpha}}{(1+n)(1+b)};$$

elles servent ainsi à la bisection de la fonction complète.

Soit, 2°. $\psi = \varphi$ et $\mu = \varphi_2$, l'amplitude φ_2 se déduira de φ par les formules de l'art. 21, et on aura pour la duplication des fonctions, les formules

$$2F(\varphi) - F(\varphi_2) = 0,$$
$$2E(\varphi) - E(\varphi_2) = c^2 \sin^2\varphi \sin\varphi_2,$$
$$2\Pi(\varphi) - \Pi(\varphi_2) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{ arc tang}\left(\frac{n\sqrt{\alpha}\sin^2\varphi\sin\varphi_2}{1+n-n\cos^2\varphi\cos\varphi_2}\right).$$

Les mêmes formules serviront à la bisection, en déterminant φ par le moyen de φ_2.

Soit, 3°. $\psi = \varphi_2$ et $\mu = \varphi_3$, φ_3 étant l'amplitude qui donne $F(\varphi_3) = 3F(\varphi)$, et qu'on détermine par les formules de l'art. 22, on aura pour la triplication des fonctions, les formules

$$3F(\varphi) - F(\varphi_3) = 0,$$
$$3E(\varphi) - E(\varphi_3) = c^2 \sin\varphi \sin\varphi_2 (\sin\varphi + \sin\varphi_3),$$
$$3\Pi(\varphi) - \Pi(\varphi_3) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{ arc tang}\left(\frac{n\sqrt{\alpha}\sin\varphi\sin\varphi_2\sin\varphi_3}{1+n-n\cos\varphi\cos\varphi_2\cos\varphi_3}\right)$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{ arc tang}\left(\frac{n\sqrt{\alpha}\sin^2\varphi\sin\varphi_2}{1+n-n\cos^2\varphi\cos\varphi_2}\right),$$

Dans le cas où $\varphi_3 = \frac{1}{2}\pi$, on a pour la trisection des fonctions complètes, les formules

$$3F(\varphi) = F^1,$$
$$3E(\varphi) = E^1 + c^2 \sin\varphi \sin\varphi_2 (1 + \sin\varphi),$$
$$3\Pi(\varphi) = \Pi^1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{arc tang}\left(\frac{n\sqrt{\alpha}\sin\varphi\sin\varphi_2}{1+n}\right)$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{arc tang}\left(\frac{n\sqrt{\alpha}\sin^2\varphi\sin\varphi_2}{1+n-n\cos^2\varphi\cos\varphi_2}\right).$$

Quant aux valeurs de φ et φ_2, elles se trouveront par les formules de la trisection, art. 23, d'où résulte $c^2 \sin\varphi \sin\varphi_2 (1 + \sin\varphi) = \frac{c^2}{b} \cos^3\varphi$.

CHAPITRE XVII.

Formation d'une suite infinie de fonctions elliptiques de la première espèce, liées entre elles par des rapports constans.

61. Jusqu'ici nous n'avons comparé entre elles les fonctions elliptiques de la première espèce, qu'autant qu'elles avaient le même module, ou qu'elles pouvaient être considérées comme représentant différens arcs d'une même courbe; ces comparaisons ont ensuite été étendues, d'après le même principe, aux fonctions de la seconde et de la troisième espèce; et les théorèmes contenus dans les formules (f') et (g') supposent encore que le module est le même dans les deux fonctions comparées.

Nous allons faire voir qu'on peut, par une loi très simple, former une infinité de fonctions elliptiques de première espèce, qui diffèrent les unes des autres tant par le module que par l'amplitude, mais qui ont la propriété fort remarquable d'être entre elles dans des rapports constans.

Considérons les deux fonctions $F(c, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\varphi)}}$, $F(c', \varphi') = \int \frac{d\varphi'}{\sqrt{(1 - c'^2 \sin^2\varphi')}}$; je dis que si l'on fait $c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, et que l'on détermine φ' d'après l'équation $\sin(2\varphi' - \varphi') = c \sin\varphi$, on aura généralement

$$F(c', \varphi') = \frac{1+c}{2} F(c, \varphi).$$

En effet l'équation supposée donne d'abord $\cos(2\varphi' - \varphi) = \Delta$; ainsi on aura successivement :

$$\cos 2\varphi' = \Delta \cos\varphi - c \sin^2\varphi,$$
$$2\cos^2\varphi' = 1 - c\sin^2\varphi + \Delta\cos\varphi,$$
$$2\sin^2\varphi' = 1 + c\sin^2\varphi - \Delta\cos\varphi,$$
$$2\sin\varphi'\cos\varphi' = \sin\varphi(c\cos\varphi + \Delta),$$
$$2d\varphi' = \frac{d\varphi}{\Delta}(c\cos\varphi + \Delta),$$
$$\sqrt{(1 - c'^2\sin^2\varphi')} = \frac{c\cos\varphi + \Delta}{1 + c}.$$

Des deux dernières on tire $\frac{d\varphi'}{\sqrt{(1 - c'^2\sin^2\varphi')}} = \frac{1+c}{2}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}$, ce qui donne en intégrant, $F(c', \varphi') = \frac{1+c}{2}F(c, \varphi)$. Nous n'ajoutons point de constante, parce que les amplitudes φ et φ' s'évanouissent en même temps. On voit donc par ce résultat que les fonctions $F(c', \varphi')$, $F(c, \varphi)$ seront entre elles dans un rapport constant, quelles que soient les amplitudes φ' et φ, pourvu qu'elles soient liées entre elles par l'équation $\sin(2\varphi' - \varphi) = c\sin\varphi$.

Observons que comme l'arc φ croît indéfiniment, et peut être de tant de circonférences qu'on voudra, l'arc φ' croît aussi indéfiniment, mais de manière que $2\varphi' - \varphi$ est toujours renfermé entre les limites $+\theta$ et $-\theta$, θ étant l'arc le plus petit dont c est le sinus. En effet, puisqu'on a... $\sin(2\varphi' - \varphi) = c\sin\varphi$ et $\cos(2\varphi' - \varphi) = \Delta$; Δ étant toujours positif, on voit que $2\varphi' - \varphi$ est toujours égal au plus petit arc Ω, positif ou négatif, déterminé par l'équation $\sin\Omega = c\sin\varphi = \sin\theta\sin\varphi$; ainsi on a toujours $\varphi' = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\Omega$ ou $\varphi = 2\varphi' - \Omega$. D'après cette observation, on n'aura jamais aucune ambiguité à craindre dans la détermination des valeurs respectives de φ' et φ.

Si l'on fait $\varphi' = \frac{1}{2}\pi$, on aura $\varphi = \pi$ et $F(c, \varphi) = 2F^1(c)$; ainsi les fonctions complètes $F^1(c')$, $F^1(c)$ ont entre elles cette relation très simple,

$$F^1(c') = (1 + c)F^1(c).$$

62. Concevons maintenant qu'à partir du terme donné c, on forme une suite infinie de modules c, c', c'', c''', etc., d'après la loi,

$$c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c},\quad c'' = \frac{2\sqrt{c'}}{1+c'},\quad c''' = \frac{2\sqrt{c''}}{1+c''},\ \text{etc.};$$

cette suite de modules qui est continuellement croissante, aura pour limite

l'unité, et atteindra sensiblement cette limite au bout d'un assez petit nombre de termes.

Si on appelle par analogie b', b'', b''', etc. les complémens des modules c', c'', c''', etc., la suite b', b'', b''', etc. sera continuellement décroissante; et chaque terme se déduira du module précédent suivant cette loi

$$b' = \frac{1-c}{1+c}, \quad b'' = \frac{1-c'}{1+c'}, \quad b''' = \frac{1-c''}{1+c''}, \text{ etc.}$$

Soit ensuite φ, φ', φ'', φ''', etc. la série des amplitudes qui se déduisent chacune de la précédente par les formules

$$\begin{aligned} \sin(2\varphi' - \varphi) &= c \sin\varphi, \\ \sin(2\varphi'' - \varphi') &= c' \sin\varphi', \\ \sin(2\varphi''' - \varphi'') &= c'' \sin\varphi'', \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

on formera de cette manière une suite infinie de fonctions de première espèce $F(c, \varphi)$, $F(c', \varphi')$, $F(c'', \varphi'')$, etc., entre lesquelles on aura les équations

$$\begin{aligned} F(c', \varphi') &= \frac{1+c}{2} F(c, \varphi), \\ F(c'', \varphi'') &= \frac{1+c'}{2} F(c', \varphi') = \frac{1+c}{2} \cdot \frac{1+c'}{2} F(c, \varphi), \\ F(c''', \varphi''') &= \frac{1+c''}{2} F(c'', \varphi'') = \frac{1+c}{2} \cdot \frac{1+c'}{2} \cdot \frac{1+c''}{2} F(c, \varphi), \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

d'où il suit que deux quelconques de ces fonctions sont toujours entre elles dans un rapport constant pour toutes les valeurs des amplitudes correspondantes.

Quant aux fonctions complètes, leurs rapports seront également constans, et l'équation $F^1(c') = (1+c)\, F^1(c)$, déjà trouvée, donnera successivement

$$\begin{aligned} F^1(c') &= (1+c)\, F^1(c), \\ F^1(c'') &= (1+c')\, F^1(c') = (1+c)(1+c')\, F^1(c), \\ F^1(c''') &= (1+c'')\, F^1(c'') = (1+c)(1+c')(1+c'')\, F^1(c), \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

63. On peut encore donner à ces résultats une plus grande extension. En effet, la suite infinie de modules c, c', c'', etc., qui est croissante dans un sens, et qui a pour limite l'unité, peut être prolongée à l'infini

dans le sens contraire où elle sera décroissante et aura pour limite zéro. Désignons par c, c°, $c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$, etc. cette suite décroissante; la loi qui lie deux termes consécutifs sera semblablement

$$c = \frac{2\sqrt{c^{\circ}}}{1+c^{\circ}}, \quad c^{\circ} = \frac{2\sqrt{c^{\circ\circ}}}{1+c^{\circ\circ}}, \quad c^{\circ\circ} = \frac{2\sqrt{c^{\circ\circ\circ}}}{1+c^{\circ\circ\circ}}, \text{ etc.}$$

Mais pour former chaque terme au moyen du precédent, il sera plus simple de se servir des valeurs suivantes, où b°, $b^{\circ\circ}$, $b^{\circ\circ\circ}$, etc., désignent les complémens des modules c°, $c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$, etc.,

$$c^{\circ} = \frac{1-b}{1+b}, \quad c^{\circ\circ} = \frac{1-b^{\circ}}{1+b^{\circ}}, \quad c^{\circ\circ\circ} = \frac{1-b^{\circ\circ}}{1+b^{\circ\circ}}, \text{ etc.}$$

Cela posé, si on désigne par φ, φ°, $\varphi^{\circ\circ}$, $\varphi^{\circ\circ\circ}$, etc. la série des amplitudes correspondantes aux modules c, c°, $c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$, etc., on aura d'abord $\sin(2\varphi - \varphi^{\circ}) = c^{\circ}\sin\varphi^{\circ}$, équation qu'il faut résoudre pour déduire φ° de φ; on en tire successivement

$$\sin\varphi^{\circ} = (1+b)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta},$$

$$\cos\varphi^{\circ} = \frac{1-(1+b)\sin^2\varphi}{\Delta},$$

$$\Delta(c^{\circ}, \varphi^{\circ}) = \frac{1-(1-b)\sin^2\varphi}{\Delta},$$

$$\operatorname{tang}\varphi^{\circ} = \frac{(1+b)\operatorname{tang}\varphi}{1-b\operatorname{tang}^2\varphi}.$$

Cette dernière peut se mettre sous la forme très simple $\operatorname{tang}(\varphi^{\circ} - \varphi) = b\operatorname{tang}\varphi$, et on en déduirait sans ambiguité,

$$\varphi^{\circ} = 2\varphi - c^{\circ}\sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}c^{\circ 2}\sin 4\varphi - \tfrac{1}{3}c^{\circ 3}\sin 6\varphi + \text{etc.},$$

ce qui s'accorde avec la remarque que nous avons faite sur la valeur toujours limitée de $2\varphi' - \varphi$, qui s'applique à $2\varphi - \varphi^{\circ}$, $2\varphi^{\circ} - \varphi^{\circ\circ}$, etc.

Supposons donc qu'après avoir déterminé les modules décroissans c°, $c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$, etc., ainsi que les complémens b°, $b^{\circ\circ}$, $b^{\circ\circ\circ}$, etc., comme il vient d'être dit, on calcule successivement les amplitudes φ°, $\varphi^{\circ\circ}$, $\varphi^{\circ\circ\circ}$, etc. par les formules

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}(\varphi^{\circ} - \varphi) &= b\operatorname{tang}\varphi, \\ \operatorname{tang}(\varphi^{\circ\circ} - \varphi^{\circ}) &= b^{\circ}\operatorname{tang}\varphi^{\circ}; \\ \operatorname{tang}(\varphi^{\circ\circ\circ} - \varphi^{\circ\circ}) &= b^{\circ\circ}\operatorname{tang}\varphi^{\circ\circ}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Alors, on aura une suite infinie de fonctions $F(c, \varphi)$, $F(c^{\circ}, \varphi^{\circ})$, $F(c^{\circ\circ}, \varphi^{\circ\circ})$, etc. liées entre elles par des rapports constans, en cette sorte :

$$F(c, \varphi) = \frac{1+c^{\circ}}{2} F(c^{\circ}, \varphi^{\circ}),$$
$$F(c^{\circ}, \varphi^{\circ}) = \frac{1+c^{\circ\circ}}{2} F(c^{\circ\circ}, \varphi^{\circ\circ}),$$
$$F(c^{\circ\circ}, \varphi^{\circ\circ}) = \frac{1+c^{\circ\circ\circ}}{2} F(c^{\circ\circ\circ}, \varphi^{\circ\circ\circ}),$$
etc.

et parce que $1+c^{\circ} = \frac{2}{1+b}$, on aura successivement

$$F(c^{\circ}, \varphi^{\circ}) = (1+b) F(c, \varphi),$$
$$F(c^{\circ\circ}, \varphi^{\circ\circ}) = (1+b^{\circ}) F(c^{\circ}, \varphi^{\circ}) = (1+b)(1+b^{\circ}) F(c, \varphi),$$
$$F(c^{\circ\circ\circ}, \varphi^{\circ\circ\circ}) = (1+b^{\circ\circ}) F(c^{\circ\circ}, \varphi^{\circ\circ}) = (1+b)(1+b^{\circ})(1+b^{\circ\circ}) F(c, \varphi),$$
etc.

Lorsqu'on fait $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on a $\varphi^{\circ} = \pi$, $\varphi^{\circ\circ} = 2\pi$, $\varphi^{\circ\circ\circ} = 4\pi$, etc.; d'où il suit que les fonctions complètes ont entre elles ces relations :

$$F^1 c^{\circ} = \frac{1+b}{2} F^1 c,$$
$$F^1 c^{\circ\circ} = \frac{1+b^{\circ}}{2} F^1 c^{\circ} = \frac{1+b}{2} \cdot \frac{1+b^{\circ}}{2} \cdot F^1 c,$$
$$F^1 c^{\circ\circ\circ} = \frac{1+b^{\circ\circ}}{2} F^1 c^{\circ\circ} = \frac{1+b}{2} \cdot \frac{1+b^{\circ}}{2} \cdot \frac{1+b^{\circ\circ}}{2} \cdot F^1 c,$$
etc.

On remarquera d'ailleurs que tandis que les modules c, c°, $c^{\circ\circ}$, etc. décroissent d'une manière rapide, leurs complémens b, b°, $b^{\circ\circ}$, etc. s'approchent de plus en plus de l'unité qui est leur limite.

CHAPITRE XVIII.

Application de la même loi aux fonctions elliptiques de la seconde espèce.

64. Considérons présentement les deux fonctions $E(c, \varphi) = \int d\varphi \Delta(c, \varphi)$, $E(c', \varphi') = \int d\varphi' \Delta(c', \varphi')$; si dans la seconde formule on substitue pour $d\varphi'$ et $\Delta(c', \varphi')$ les valeurs trouvées art. 61, on aura

$$(2+2c)\,E(c',\varphi')=\int\frac{d\varphi}{\Delta}(c\cos\varphi+\Delta)^2;$$

substituant dans le second membre la valeur

$$(c\cos\varphi+\Delta)^2=2\Delta^2+2c\Delta\cos\varphi-b^2,$$

et effectuant l'intégration, on aura

$$(1+c)\,E(c',\varphi')=E(c,\varphi)-\tfrac{1}{2}b^2F(c,\varphi)+c\sin\varphi;$$

et de là résulte la formule

$$b^2F(c,\varphi)=2E(c,\varphi)-2(1+c)\,E(c',\varphi')+2c\sin\varphi,$$

d'où l'on voit que la fonction de première espèce $F(c,\varphi)$ peut s'exprimer par les deux arcs d'ellipse $E(c,\varphi)$, $E(c',\varphi')$.

On a trouvé (art. 13) que l'expression de l'arc d'hyperbole est

$$\Upsilon=\Delta\tang\varphi-F(c,\varphi)+b^2F(c,\varphi);$$

si on y substitue la valeur de $b^2F(c,\varphi)$, cette expression deviendra

$$\Upsilon=\Delta\tang\varphi+E(c,\varphi)-2(1+c)\,E(c',\varphi')+2c\sin\varphi;$$

d'où il suit qu'un arc d'hyperbole peut toujours s'exprimer par deux arcs d'ellipse, ce qui est le beau théorème dont Landen a enrichi la Géométrie [1].

Nous avons déjà appelé $G(\varphi)$ la différence entre l'arc d'hyperbole Υ et sa tangente $\Delta\tang\varphi$, terminée à la perpendiculaire abaissée du centre; cette différence s'exprime donc en général par deux arcs d'ellipse, de sorte qu'on a

$$G(\varphi)=2(1+c)\,E(c',\varphi')-E(c,\varphi)-2c\sin\varphi;$$

et en particulier lorsqu'on fait $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, on a pour l'expression de la différence entre l'asymptote et la courbe,

$$G^1=2(1+c)\,E(c',\varphi')-E^1(c)-2c.$$

Mais puisque $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, on a $\sin(2\varphi'-\frac{1}{2}\pi)=c\sin\varphi=c$, ou $\cos 2\varphi'=-c$, ce qui donne $\sin^2\varphi'=\frac{1+c}{2}=\frac{1}{1+b'}$; donc l'arc $E(c',\varphi')$ est celui qui se mesure par la moitié de $E^1(c')$, et on a $E'(c',\varphi')=\frac{1}{2}E^1(c')+\frac{1}{2}(1-b')$. Substituant cette valeur dans celle de G^1, il viendra

---

[1] On déduirait aisément des mêmes formules que tout arc d'ellipse peut s'exprimer par deux arcs d'hyperbole.

$$G^1 = (1+c)E^1(c') - E^1(c);$$

donc la transcendante G^1 est égale à la différence des deux quarts d'ellipse qui ont pour demi-axes, l'un $1+c$ et $1-c$, l'autre 1 et $\sqrt{(1-c^2)}$.

65. Considérons une suite infinie de fonctions $E(c, \varphi)$, $E(c', \varphi')$, $E(c'', \varphi'')$, etc. formées d'après la même loi que les fonctions de première espèce $F(c, \varphi)$, $F(c', \varphi')$, $F(c'', \varphi'')$, etc., on aura d'abord les deux équations

$$\tfrac{1}{2}b^2\, F(c, \varphi) = E(c, \varphi) - (1+c)E(c', \varphi') + c \sin\varphi,$$
$$\tfrac{1}{2}b'^2 F(c', \varphi') = E(c', \varphi') - (1+c')E(c'', \varphi'') + c' \sin\varphi';$$

mais on a de plus $F(c', \varphi') = \frac{1+c}{2} F(c, \varphi)$; éliminant donc de ces trois équations les fonctions de première espèce, on aura entre les trois fonctions consécutives de seconde espèce $E(c, \varphi)$, $E(c', \varphi')$, $E(c'', \varphi'')$, cette équation

$$0 = \tfrac{1}{2}b'(1+b')E(c, \varphi) - (2+b')E(c', \varphi') + 2(1+c')E(c'', \varphi'')$$
$$+ \tfrac{1}{2}b'(1-b')\sin\varphi - 2c' \sin\varphi'.$$

La même équation peut être appliquée à trois ellipses consécutives, prises non seulement dans la suite infinie $E(c, \varphi)$, $E(c', \varphi')$, $E(c'', \varphi'')$, $E(c''', \varphi''')$, etc., mais en général dans la suite doublement infinie

$$\ldots\ldots E(c'', \varphi''),\ E(c', \varphi'),\ E(c, \varphi),\ E(c^{\circ}, \varphi^{\circ}),\ E(c^{\circ\circ}, \varphi^{\circ\circ}), \ldots\ldots$$

dont les extrêmes sont, d'une part, l'ellipse qui a pour excentricité 1 et qui se réduit à son grand axe; d'autre part, l'ellipse qui a pour excentricité 0 et qui se confond avec le cercle : il en résulte donc que par la rectification indéfinie de deux ellipses de cette suite, on obtient la rectification indéfinie de toutes les autres.

La formule générale se simplifie lorsqu'il s'agit de la rectification définie de ces ellipses. En effet si on fait $\varphi'' = \frac{1}{2}\pi$, on aura $\varphi' = \pi$ et $\varphi = 2\pi$, ce qui donnera $E(c'', \varphi'') = E^1(c'')$, $E(c', \varphi') = 2E^1(c')$, $E(c, \varphi) = 4E^1(c)$; donc on aura entre les trois quarts d'ellipse $E^1(c)$, $E^1(c')$, $E^1(c'')$, cette équation

$$0 = b'(1+b')E^1(c) - (2+b')E^1(c') + (1+c')E^1(c'').$$

On aura une équation semblable entre trois termes consécutifs quelconques pris dans la série générale des ellipses. Ainsi la circonférence d'une ellipse proposée pourra toujours se déterminer exactement par les circonférences de deux ellipses aussi peu différentes de la ligne droite qu'on voudra, en

prolongeant les séries dans un sens, ou aussi peu différentes du cercle qu'on voudra, en prolongeant les séries dans l'autre sens.

Dans ce dernier cas, il faudrait faire usage des équations successives

$$0 = (1 + c^{\circ})\,E^{1}(c) - (2 + b^{\circ})\,E^{1}(c^{\circ}) + b^{\circ}\,(1 + b^{\circ})\,E^{1}(c^{\circ\circ}),$$
$$0 = (1 + c^{\circ\circ})\,E^{1}(c^{\circ}) - (2 + b^{\circ\circ})\,E^{1}(c^{\circ\circ}) + b^{\circ\circ}(1 + b^{\circ\circ})\,E^{1}(c^{\circ\circ\circ}),$$
etc.,

qu'on prolongerait aussi loin qu'on aurait cru devoir prolonger la suite des modules c, c°, $c^{\circ\circ}$, etc.

La détermination exacte et absolue dont on vient de parler peut être regardée comme un théorème fort remarquable dans la théorie des transcendantes, mais si on a seulement pour but d'obtenir des approximations, on y parviendra plus facilement par les méthodes que nous donnerons ci-après.

66. Nous avons trouvé (art. 44) que les deux fonctions $E^{1}(c)$, $F^{1}(c)$, tant pour le module $c = \sin 15^{\circ}$, que pour son complément $b = \sin 75^{\circ}$, peuvent se déterminer par l'une des quatre fonctions supposée connue. Donc les deux séries d'ellipses formées l'une d'après le module.... $c = \sin 15^{\circ} = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)}$, l'autre d'après le module $b = \sin 75^{\circ} = \sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)}$, sont telles, que connaissant la circonférence d'une seule de ces ellipses, on pourra trouver la circonférence de toutes les autres. Il en est de même des deux suites de fonctions de première espèce $F^{1}(c)$ formées d'après les mêmes modules, et un seul terme connu dans ces quatre séries, suffira pour faire connaître tous les autres.

Nous avons également trouvé (art. 45) que lorsque $c = \sin 45^{\circ} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, les fonctions $F^{1}(c)$, $E^{1}(c)$ peuvent se déterminer l'une par l'autre; mais d'après nos formules on trouve aisément

$$(1 + b)\,E^{1}(c^{\circ}) = E^{1}(c) + b\,F^{1}(c),$$
$$(1 + b^{\circ})\,E^{1}(c^{\circ\circ}) = E^{1}(c^{\circ}) + b^{\circ}F^{1}(c^{\circ}),$$
etc.

Donc en général toutes les ellipses qui composent la série formée d'après le module $c = \sin 45^{\circ}$, sont telles, que la circonférence de l'une d'elles étant connue, on pourra déterminer celle de toutes les autres.

Remarque générale.

67. Ayant établi entre les amplitudes φ' et φ l'équation $\sin(2\varphi'-\varphi)=c\sin\varphi$, et entre les modules c' et c l'équation $c'=\frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, nous avons trouvé l'équation $F(c',\varphi')=\frac{1+c}{2}F(c,\varphi)$, d'où il suit que les deux fonctions $F(c',\varphi')$, $F(c,\varphi)$, sont entre elles dans un rapport constant. En vertu des mêmes relations les fonctions de seconde espèce $E(c',\varphi')$, $E(c,\varphi)$, sont liées entre elles et avec la fonction de première espèce $F(c,\varphi)$, par l'équation

$$(1+c)\,E(c',\varphi')=E(c,\varphi)-\tfrac{1}{2}b^2F(c,\varphi)+c\sin\varphi,$$

d'où l'on conclut immédiatement ce que Landen a remarqué le premier, que tout arc d'hyperbole peut être mesuré par deux arcs d'ellipses.

Mais une infinité d'autres conséquences résultent du même principe; car la série des modules croissans c, c', c'', etc., peut être continuée à l'infini, en même temps que celle des amplitudes décroissantes φ, φ', φ'', etc., de sorte qu'on peut comparer d'une infinité de manières les fonctions E et F qui se rapportent à différens termes de l'échelle des modules, et ces comparaisons sont d'autant plus multipliées, que l'échelle des modules qui s'étend à l'infini dans le sens des modules croissans, s'étend aussi à l'infini dans le sens des modules décroissans c, c°, $c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$, etc., ce qui permet d'appliquer les deux mêmes équations à deux termes consécutifs quelconques pris dans un sens ou dans l'autre.

Les mêmes conséquences auraient pu être tirées de l'équation $\tang(\varphi^{\circ}-\varphi)=b\tang\varphi$, d'où, en faisant $c^{\circ}=\frac{1-b}{1+b}$, on déduit immédiatement $F(c,\varphi)=\frac{1+c^{\circ}}{2}F(c^{\circ},\varphi^{\circ})$, ainsi qu'une autre équation entre $E(c,\varphi)$, $E(c,\varphi^{\circ})$ et $F(c,\varphi)$.

Mais beaucoup d'autres substitutions peuvent conduire à de semblables résultats, et quand on considère combien de transformations analytiques ont été employées par Maclaurin et d'Alembert, dans leurs recherches sur les intégrales qui peuvent être exprimées par des arcs de sections coniques, on a lieu de s'étonner que la transformation qui met en évidence les propriétés nombreuses de l'échelle des modules, leur ait entièrement échappé et que cette découverte ait été réservée à Landen qui d'ailleurs n'en a tiré qu'un médiocre parti et qui n'a pas même vu qu'elle fournissait une

méthode très simple pour calculer par approximation les arcs des sections coniques.

On s'étonnera moins que la même découverte ait échappé à Euler, si on observe que la belle intégrale due à ce grand Géomètre, l'a conduit à comparer entre elles les diverses valeurs d'une même transcendante, comme on compare les arcs d'une même courbe, ce qu'il a fait avec une élégance et une généralité qui ne laissent rien à désirer. Mais on ne voit dans aucun de ses Mémoires, qu'il ait fait varier les constantes ou les paramètres de ses fonctions, et qu'il ait ainsi passé d'une courbe à une autre, comme on le fait dans les comparaisons qui dépendent de l'échelle des modules.

68. Nous allons faire voir par deux exemples que beaucoup d'autres voies auraient pu conduire aux mêmes résultats.

Considérons l'intégrale $Z = \int \frac{dx}{\sqrt{(1 + 2x^2 \cos\theta + x^4)}}$; si on fait $x = \tang \frac{1}{2}\varphi$, $c = \sin \frac{1}{2}\theta$, on aura la transformée $Z = \frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}} = \frac{1}{2} F(c, \varphi)$. Pour obtenir une autre expression de la même intégrale, soit $x = \frac{1-y}{1+y}$ et $b' = \frac{1-c}{1+c}$, on aura d'abord $Z = \frac{1}{1+c}\int \frac{-dy}{\sqrt{(1 + b'y^2)} \cdot \sqrt{(b' + y^2)}}$. Soit ensuite $y = \frac{1}{\sqrt{b'}} \cot \psi$, $c' = \sqrt{(1 - b'^2)} = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, on aura..... $Z = \frac{1}{1+c}\int \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c'^2 \sin^2 \psi)}} = \frac{1}{1+c} F(c', \psi) + \text{const.}$ Égalant ces deux valeur de Z, on a

$$F(c, \varphi) = \frac{2}{1+c} F(c', \psi) + \text{const.}$$

On peut donc passer directement de la fonction $F(c, \varphi)$ à la fonction $F(c', \psi)$ qui a un autre module, en faisant $\tang \frac{1}{2}\varphi = \frac{\sqrt{b'} \tang \psi - 1}{\sqrt{b'} \tang \psi + 1}$, ou $\sqrt{b'} \cdot \tang \psi = \tang (45° + \frac{1}{2}\varphi)$, équation très simple entre les amplitudes φ et ψ. Il faudra ensuite déterminer la constante; pour cela faisant $\varphi = 0$, on aura $\cot \psi = \sqrt{b'}$, par conséquent $F(c', \psi) = \frac{1}{2} F^1 c'$, et l'équation sera

$$F(c, \varphi) = \frac{2}{1+c}[F(c', \psi) - \tfrac{1}{2} F^1 c'].$$

Il est facile, comme on sait, de réduire les deux termes $F(c', \psi) - \frac{1}{2} F^1 c'$ à un seul $F(c', \varphi')$; on aura ainsi la formule connue $F(c, \varphi) = \frac{2}{1+c} F(c', \varphi')$.

Nous prendrons pour second exemple l'équation $\sin\varphi = \frac{(1+k)\sin\psi}{1+k\sin^2\psi}$ dont nous nous servirons pour transformer l'intégrale $\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}} = F(c, \varphi)$; il en résulte $d\varphi = \frac{(1+k)\,d\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)}} \cdot \frac{1-k\sin^2\psi}{1+k\sin^2\psi}$, et si on fait $c = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, ou $k = c^0$, on aura $\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)} = \frac{1-k\sin^2\psi}{1+k\sin^2\psi}$; donc.. $\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}} = \frac{(1+k)\,d\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)}}$, et en intégrant $F(c, \varphi) = (1+c^0)F(c^0, \psi)$, sans addition de constante, parce que φ et ψ sont nuls en même temps. S on fait ensuite $F(c^0, \psi) = \frac{1}{2}F(c^0, \varphi^0)$, on aura $F(c, \varphi) = \frac{1+c^0}{2}F(c^0, \varphi^0)$, ce qui est le principe général de transformation donné par l'échelle des modules. D'ailleurs la relation directe entre les amplitudes φ et φ^0 se déduira des deux équations $\sin\varphi = \frac{(1+c^0)\sin\psi}{1+c^0\sin^2\psi}$, $\tang\frac{1}{2}\varphi^0 = \tang\psi\sqrt{(1-c^{0\,2}\sin^2\psi)}$, d'où résulte, en éliminant ψ, $\sin(2\varphi - \varphi^2) = c^0\sin\varphi^0$.

En terminant ces observations nous signalerons comme un fait digne de remarque, qu'Euler n'ait rien écrit à l'occasion du Mémoire de Landen, imprimé dans les Transactions philosophiques de 1775, d'où il faut conclure que ce Mémoire n'est pas parvenu à sa connaissance; car dans l'hypothèse contraire, cet illustre Géomètre aurait sans doute, suivant son usage, publié ses propres réflexions sur une découverte analytique qui devait particulièrement l'intéresser.

CHAPITRE XIX.

Méthode d'approximation appliquée aux fonctions elliptiques de la première espèce.

69. Étant proposée la fonction $F(c, \varphi)$ dont on veut avoir une valeur approchée, on calculera les modules décroissans c^0, c^{00}, c^{000}, etc. et les amplitudes croissantes φ^0, φ^{00}, φ^{000}, etc. par les formules de l'art. 63; on aura ainsi successivement

$$\begin{aligned} F(c, \varphi) &= \frac{1+c^0}{2} F(c^0, \varphi^0) \\ &= \frac{1+c^0}{2} \cdot \frac{1+c^{00}}{2} F(c^{00}, \varphi^{00}) \\ &= \frac{1+c^0}{2} \cdot \frac{1+c^{00}}{2} \cdot \frac{1+c^{000}}{2} F(c^{000}, \varphi^{000}), \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Mais lorsque c est devenu très petit, on a $\Delta = 1$ et $\int \frac{d\varphi}{\Delta} = \varphi$. Soit donc Φ la limite des angles $\frac{1}{2}\varphi^0$, $\frac{1}{4}\varphi^{00}$, $\frac{1}{8}\varphi^{000}$, etc., limite qu'ils atteindront toujours sensiblement au bout d'un certain nombre de termes, et on aura la fonction demandée

$$F(c, \varphi) = \Phi(1 + c^0)(1 + c^{00})(1 + c^{000}), \text{ etc.}$$

Lorsque $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, la limite Φ sera pareillement $\frac{1}{2}\pi$, de sorte qu'on aura la fonction complète

$$F^1(c) = \frac{\pi}{2}(1 + c^0)(1 + c^{00})(1 + c^{000}), \text{ etc.}$$

Le produit constant $(1 + c^0)(1 + c^{00})(1 + c^{000})$, etc. que nous représenterons par K, peut aussi s'exprimer de cette manière :

$$K = \frac{2\sqrt{c^0}}{c} \cdot \frac{2\sqrt{c^{00}}}{c^0} \cdot \frac{2\sqrt{c^{000}}}{c^{00}}, \text{ etc.};$$

on a encore $1 + c^0 = \frac{2}{1+b} = \frac{b^0}{\sqrt{b}}$, donc $K = \frac{b^0}{\sqrt{b}} \cdot \frac{b^{00}}{\sqrt{b^0}} \cdot \frac{b^{000}}{\sqrt{b^{00}}}$, etc., ou

$$K = \sqrt{\left(\frac{b^0\, b^{00}\, b^{000}}{b}\right)},$$

et cette forme est la plus aisée à calculer par logarithmes. K étant connu, on aura $F(c, \varphi) = K\Phi$, et $F^1 c = K \cdot \frac{\pi}{2}$.

Pour faciliter le calcul des modules décroissans, on déterminera un angle auxiliaire μ par l'équation $\sin \mu = c$, ce qui donnera $b = \cos \mu$ et $c^0 = \tang^2 \frac{1}{2}\mu$. Faisant de même $c^0 = \tang^2 \frac{1}{2}\mu = \sin \mu^0$, ce qui déterminera un nouvel angle μ^0, on aura $c^{00} = \tang^2 \frac{1}{2}\mu^0$, et ainsi de suite.

Lorsqu'on sera parvenu à un c fort petit, on pourra, pour éviter les angles trop petits, calculer le terme suivant c^0 par la formule

$$c^0 = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1.3}{4.6}c^4 + \frac{1.3.5}{4.6.8}c^6 + \text{etc.},$$

dont le premier ou tout au plus les deux premiers termes suffiront. Cette

formule se tire de l'expression

$$c^0 = \frac{1-b}{1+b} = \frac{(1-b)^2}{c^2} = \frac{2-c^2-2\sqrt{(1-c^2)}}{c^2}.$$

Quant au calcul des angles φ^0, φ^{00}, etc., nous n'avons rien à ajouter à la simplicité de la formule $\tang(\varphi^0-\varphi) = b \tang \varphi$, qui est très propre au calcul trigonométrique. Nous rappellerons seulement, ce qui résulte de l'art. 63, que l'angle $\varphi^0-\varphi$ est presque égal à φ lorsque c est très petit, et qu'en général sa différence avec φ est moindre que l'angle qui a pour sinus c. Il faut donc prendre pour l'angle $\varphi^0-\varphi$, non pas toujours le plus petit angle que donnent les tables des sinus, mais celui qui approche beaucoup de φ, et qui peut être de plusieurs circonférences.

EXEMPLE.

70. On demande la valeur de la fonction $F(c,\varphi)$, lorsque $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})} = \sin 75^\circ$ et $\tang \varphi = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}$.

Voici d'abord un tableau qui offre le calcul des modules et de leurs complémens :

	Valeurs des c *et* b.	*Leurs logarithmes.*
c	$= \sin\ 75^\circ\ 0'\ 0''00$	9.9849438,
b	$= \cos\ 75.\ 0.\ 0,00$	9.4129962,
c^0	$= \begin{cases}\tang^2 37.30.\ 0,00\\ \sin\ 36.\ 4.16,47\end{cases}$	9.7699610,
b^0	$= \cos\ 36.\ 4.16,47$	9.9075648,
c^{00}	$= \begin{cases}\tang^2 18.\ 2.\ 8,235\\ \sin\ 6.\ 5.\ 9,38\end{cases}$	9.0253880,
b^{00}	$= \cos\ 6.\ 5.\ 9,38$	9.9975452,
c^{000}	$= \begin{cases}\tang^2 6.\ 2.34,69\\ \sin\ 0.\ 9.42,90\end{cases}$	7.4511672,
b^{000}	$= \cos\ 0.\ 9.42,90$	9.9999982,
c^{0000}	$= \frac{1}{4}(c^{000})^2 + \text{etc.}$	4.3002761,
b^{0000}		0.0000000.

Ces logarithmes donneront aisément la valeur de K, pour laquelle il suffira d'employer quatre facteurs. On aura ainsi $\log K = 0.2460560$ et

$K = 1.7622037$. De là résulte d'abord $F' = \frac{\pi}{2}K = 2.7680631$; on trouvera ensuite par le calcul des amplitudes,

$$\begin{aligned}
\varphi &= 47^\circ\ 3'\ 30''94,\\
\varphi^\circ &= 62.36.\ 3,10,\\
\varphi^{\circ\circ} &= 119.55.47,67,\\
\varphi^{\circ\circ\circ} &= 240.\ 0.\ 0,19,\\
\varphi^{\circ\circ\circ\circ} &= 480.\ 0.\ 0,00.
\end{aligned}$$

Les autres valeurs de φ augmenteraient en raison double; d'où il suit que la limite des angles $\varphi, \frac{\varphi^\circ}{2}, \frac{\varphi^{\circ\circ}}{4}$, etc. est 30° ou $\frac{\pi}{6}$; donc on a $F(c, \varphi) = K\frac{\pi}{6} = 0.9226877$, ce qui s'accorde avec la valeur trouvée art. 28.

Remarquons que puisque la limite $\Phi = 30^\circ = \frac{1}{3}.\frac{\pi}{2}$, on a $F = \frac{1}{3}F'$; et en effet cette égalité a lieu rigoureusement d'après la valeur que nous avons prise pour tang φ. Voyez l'article 24.

71. Étant donnée la valeur de l'amplitude φ, on voit qu'il est facile de trouver la fonction F avec toute l'exactitude nécessaire; réciproquement il peut être utile de déterminer l'amplitude en supposant connue la valeur de la fonction F. Pour cet effet, il faudra calculer les termes de la série c°, $c^{\circ\circ}$, etc. jusqu'à un terme assez petit pour être négligé. Soit, par exemple, ce terme $c^{\circ\circ\circ\circ\circ}$, ou pour abréger $c^{\circ 5}$; puisqu'on a $\varphi^{\circ 5} = 2\varphi^{\circ 4} - c^{\circ 5}\sin 2\varphi^{\circ 4} +$ etc., on aura d'une manière suffisamment exacte $\varphi^{\circ 5} = 2\varphi^{\circ 4}$, et à plus forte raison $\varphi^{\circ 6} = 2\varphi^{\circ 5}$, etc. Donc la limite des angles φ, $\frac{1}{2}\varphi^\circ$, $\frac{1}{4}\varphi^{\circ\circ}$, etc. sera $\frac{1}{16}\varphi^{\circ 4}$: cette limite a été désignée par Φ, ainsi on aura $\varphi^{\circ 4} = 16\Phi$. D'ailleurs la valeur de F étant donnée, on connaît Φ par l'équation $\Phi = \frac{F}{K}$; donc on connaîtra aussi $\varphi^{\circ 4} = 16\Phi$. Cela posé, on calculera successivement les valeurs de $\varphi^{\circ\circ\circ}$, $\varphi^{\circ\circ}$, φ°, φ, au moyen des équations

$$\begin{aligned}
\sin(2\varphi^{\circ 3} - \varphi^{\circ 4}) &= c^{\circ 4}\sin\varphi^{\circ 4},\\
\sin(2\varphi^{\circ 2} - \varphi^{\circ 3}) &= c^{\circ 3}\sin\varphi^{\circ 3},\\
\sin(2\varphi^{\circ} - \varphi^{\circ 2}) &= c^{\circ 2}\sin\varphi^{\circ 2},\\
\sin(2\varphi\ \ - \varphi^{\circ}) &= c^{\circ}\ \sin\varphi^{\circ},
\end{aligned}$$

et on aura l'amplitude cherchée φ.

Cette méthode s'applique particulièrement à la résolution de l'équation $F(\psi) = nF(\varphi)$, quel que soit n. Étant donné φ, on connaîtra $F(\varphi)$ et $nF(\varphi)$, ou $F(\psi)$; ensuite de $F(\psi)$, on déduira l'amplitude ψ, comme on vient de l'expliquer. Ce moyen n'exigera jamais qu'un petit nombre

d'opérations; au lieu que si n était un peu grand ou seulement fractionnaire, les méthodes algébriques que nous avons données pour déterminer φ_n d'après l'équation $F(\varphi_n) = nF(\varphi)$ deviendraient très longues ou même impraticables.

72. La méthode que nous venons d'exposer est en général très expéditive; elle exigera seulement qu'on calcule quelques termes de plus, tant dans la suite des modules que dans celle des amplitudes, lorsque c sera extrêmement près de l'unité; mais on peut s'assurer que ce nombre de termes ne sera jamais bien considérable; car dans l'hypothèse où on devrait continuer la suite c, c^0, c^{00}, etc. jusqu'au dixième terme, pour que ce terme fût d'une unité décimale du dixième ordre, il faudrait que la valeur primitive de b fût plus petite que 10^{-21}, et par conséquent que celle de $1 - c$ fût plus petite que 10^{-42}.

L'universalité de la méthode est suffisamment établie par cette observation; cependant lorsque $1 - c$ est extrêmement petit, on peut profiter de cette circonstance pour simplifier les calculs, et procéder d'une autre manière aux approximations.

Dans le cas dont il s'agit, la quantité b est très petite, et comme on a $F = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi)}}$, si l'amplitude φ est telle que tang φ soit beaucoup plus petite que $\frac{1}{b}$, on aura d'une manière suffisamment approchée

$$F = \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \log \operatorname{tang}\left(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi\right).$$

Si tang φ est comparable à $\frac{1}{b}$, il faudra transformer la formule proposée $F(c, \varphi)$ en une autre où b soit beaucoup plus petit, afin que dans la transformée b tang φ devienne une quantité négligeable. C'est ce qu'il est facile d'obtenir en calculant jusqu'au terme convenable les modules croissans c', c'', etc. et les amplitudes décroissantes φ', φ'', etc., par les formules de l'art. 62.

Soit pour cet effet $b = \sin\lambda$, on aura $b' = \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\lambda$; soit de nouveau $b' = \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\lambda = \sin\lambda'$, on aura $b'' = \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\lambda'$, et ainsi de suite jusqu'à un terme b^μ qui ait le degré de petitesse exigé; on calculera ensuite les amplitudes φ, φ', φ'', φ''', etc., jusqu'à un terme φ^μ qui corresponde à la dernière valeur de b; et ce terme étant nommé Φ', si l'on fait

$$K' = \frac{2}{1+c} \cdot \frac{2}{1+c'} \cdot \frac{2}{1+c''} \text{ etc.} = \sqrt{\left(\frac{c'c''c^{\bullet}\ldots\text{ etc.}}{c}\right)},$$

on aura

$$F(c, \varphi) = K' \log \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi').$$

Cette valeur sera exacte si on prolonge à l'infini les facteurs dont est composé K', et la suite dont Φ' est le dernier terme ; mais au bout d'un assez petit nombre de termes, on obtiendra en général tout le degré d'approximation qu'on peut désirer. On aurait en même temps pour la fonction complète $F^1(c)$, soit la valeur donnée par la formule précédente en calculant l'angle Φ' par le moyen de $\varphi = 90^\circ$, soit plus simplement encore la valeur $F^1(c) = K' \cdot \frac{1}{2^\mu} \log \frac{4}{b^\mu}$. En effet de l'équation $F^1c' = (1 + c) F^1c$, on tire $F^1c = \frac{1}{1+c} F^1c' = \frac{c'}{2\sqrt{c}} F^1c'$, de même $F^1c' = \frac{c''}{2\sqrt{c'}} F^1c''$, $F^1c'' = \frac{c'''}{2\sqrt{c''}} F^1c'''$, etc. Donc $F^1c = \frac{c'}{2\sqrt{c}} \cdot \frac{c''}{2\sqrt{c'}} \cdot \frac{c'''}{2\sqrt{c''}} \cdot F^1c'''$; continuant cette suite de produits jusqu'au $\mu^{ième}$ terme et observant que lorsque c^μ est assez près de l'unité pour que la différence $1 - c^\mu$ soit négligeable, on a $F^1c^\mu = \log \cdot \frac{4}{b^\mu}$ (art. 48), la valeur de F^1c devient $F^1c = K' \cdot \frac{1}{2^\mu} \log \cdot \frac{4}{b^\mu}$.

EXEMPLE.

73. Soit comme ci-dessus $c = \sin 75^\circ$, $\operatorname{tang} \varphi = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}$; ce cas est peu favorable à l'application de la méthode précédente, parce que b n'est pas une quantité très petite.

On calculera d'abord les modules croissans c', c'', c''', etc., et leurs complémens b', b'', b''', etc., comme il suit :

	Valeurs des b *et* c.	*Leurs logarithmes.*
b =	sin 15° 0′ 0″00	9.4129962,
c =	cos 15. 0. 0,00	9.9849438,
b' =	$\left\{\begin{matrix}\text{tang}^2 & 7.30.\ 0{,}00 \\ \sin & 0.59.35{,}24\end{matrix}\right\}$	8.2388582,
c'		9.9999348,
b'' =	$\left\{\begin{matrix}\text{tang}^2 & 0.29.47{,}62 \\ \sin & 0.\ 0.\text{etc.}\end{matrix}\right\}$	5.8757219,
c''		0.0000000,
b''' =	$(\frac{1}{2} b'')^2$	1.1493838,
c'''		0.0000000.

Ensuite le calcul des amplitudes φ', φ'', etc. donne les résultats suivans :

$$\begin{aligned} \varphi &= 47^\circ 3' 30'' 95, \quad 2\varphi' - \varphi = 45^\circ, \\ \varphi' &= 46.1.45,475, \\ \varphi'' &= 46.1.29.41, \\ \varphi''' &= 46.1.29.41. \end{aligned}$$

La valeur du facteur K′ se réduit dans cet exemple à $\sqrt{\frac{o'}{o}}$, ainsi on a $\log K' = 0.0074955$; et comme on a trouvé $\Phi' = 46^\circ 1' 29'' 41$, on aura

$$F(\varphi) = K' \log \text{tang } 68^\circ 0' 44'' 705.$$

Ce log tangente pris dans les Tables, et multiplié ensuite par le module pour en faire un logarithme hyperbolique, donnera

$$\log F = 9,9650547,$$

ou $F = 0.9226877$, comme on l'a déjà trouvé art. 70.

Si dans le même exemple on veut avoir la valeur de la fonction complète, il faudra faire $\varphi = 90^\circ$, et calculer successivement les valeurs de φ', φ'', etc., ce qui donnera

$$\begin{aligned} \varphi' &= 82^\circ 30' 0''00, \\ \varphi'' &= 82.28.2,84, \\ \varphi''' &= \varphi''. \end{aligned}$$

Donc la limite $\Phi' = 82^\circ 28' 2'',84$, et ainsi la fonction complète

$$F^1 = K' \log \text{tang } 86^\circ 14' 1''42,$$

ou $\log F^1 = 0.4421761$, ce qui s'accorde avec la valeur trouvée n° 70 ; mais cette valeur se trouve beaucoup plus facilement par la formule.....
$F^1 = \frac{K'}{4} \log . \frac{4}{b^\circ}$.

Nous remarquerons que dans cet exemple il a été nécessaire de recourir à un moyen particulier pour déterminer avec la précision convenable, l'amplitude φ'' qui se confond sensiblement avec la limite Φ'. L'équation $\sin(2\varphi'' - \varphi') = c' \sin \varphi'$, la plus directe pour déterminer φ'', n'est pas propre à donner bien exactement les fractions de seconde contenues dans φ'', parce que ces fractions influent très peu sur le sinus d'un angle de 82°, trop rapproché de l'angle droit. Dans ce cas, et dans tous les semblables qui peuvent se rencontrer, on déterminera φ'' beaucoup plus exactement au moyen de l'équation $\text{tang}(\varphi' - \varphi'') = b'' \text{tang } \varphi''$, ou $\varphi' - \varphi'' = Rb'' \text{tang } \varphi''$, R étant le nombre de secondes contenues dans le rayon : pour

cela, il faudra mettre dans le second membre φ' au lieu de φ'', ce qui donnera une première valeur approchée de $\varphi' - \varphi''$, et par conséquent une de φ''. Substituant de nouveau cette valeur à la place de φ'' dans le second membre, on aura une seconde valeur de $\varphi' - \varphi''$ qui devra être approchée au moins jusqu'aux centièmes de seconde.

Dans l'exemple dont il s'agit, on fera donc d'abord $\varphi' - \varphi'' = Rb'' \operatorname{tang} 82°30'$, ce qui donnera $\varphi' - \varphi'' = 1'57'',68$ et $\varphi'' = 82°28'2'',32$. Substituant de nouveau cette valeur au lieu de φ'', on aura plus exactement $\varphi' - \varphi'' = Rb'' \operatorname{tang} 82°28'2'',32 = 1'57'',167$, d'où $\varphi'' = 82°28'2'',833$.

74. On voit maintenant qu'il y a deux méthodes pour déterminer la valeur approchée d'une fonction de première espèce $F(c, \varphi)$ dont le module et l'amplitude sont connus. Si c est plus petit que $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou sin 45°, il conviendra de se servir de la méthode du n° 63, suivant laquelle calculant les modules décroissans c^{o}, c^{oo}, c^{ooo}, etc. et les amplitudes croissantes φ^{o}, φ^{oo}, φ^{ooo}, etc., on obtient la formule $F(c, \varphi) = K\Phi$.

Si le module c est plus grand que sin 45°, il conviendra de se servir de la méthode du n° 62, qui consiste à calculer les modules croissans c', c'', c''', etc., et les amplitudes décroissantes φ', φ'', φ''', etc., d'où l'on conclut $F(c, \varphi) = K' \log \operatorname{tang}(45° + \frac{1}{2}\Phi')$.

Ces deux méthodes s'étendent à volonté l'une et l'autre au-delà de la limite que nous avons fixée. Mais pour diminuer autant qu'il est possible le nombre des transformées, il est bon de s'en tenir à cette limite, et de cette manière on n'aura jamais besoin de calculer plus de trois termes tant de la série des modules que de celle des amplitudes, pour obtenir un résultat approché jusqu'au septième rang de décimales.

Il est fort remarquable que la fonction F puisse toujours s'exprimer à volonté par un arc de cercle ou par un logarithme; mais on voit qu'elle se rapproche davantage des arcs de cercle si on a $c^2 < \frac{1}{2}$, et qu'elle a plus d'affinité avec les logarithmes si on a $c^2 > \frac{1}{2}$.

75. Nous avons fait voir dans l'art. 71 comment on détermine l'amplitude φ qui répond à une valeur donnée de la fonction $F(c, \varphi)$. La méthode exposée dans cet article, a toute la perfection qu'on peut désirer lorsque c^2 est $< \frac{1}{2}$, et elle peut s'appliquer avec succès lorsque c^2 s'approche beaucoup plus de l'unité. Cependant si l'on veut que le nombre des transformées soit le plus petit possible, il faudra, lorsque c^2 sera $> \frac{1}{2}$, appliquer la méthode des modules croissans.

Pour cela on commencera par calculer la suite c', c'', c''', etc. jusqu'à un

terme qui ne diffère pas sensiblement de l'unité. Cette limite est c''' ou même c'', lorsqu'on ne veut pas pousser l'exactitude au-delà de six à sept décimales. De là on tirera $K' = \sqrt{\left(\frac{c'c''c''' \text{ etc.}}{c}\right)}$; K' étant connu, on connaîtra $\log \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}\Phi') = \frac{F}{K'}$. De ce logarithme hyperbolique ou du logarithme vulgaire qui lui correspond, on tirera la valeur de l'angle Φ', limite des angles φ', φ'', φ''', etc. Si on s'est arrêté à c''' en négligeant la différence $1 - c'''$, alors φ''' pourra être pris pour la limite Φ'. Connaissant φ''', on remontera successivement aux valeurs de φ'', φ', φ par les équations

$$\operatorname{tang}(\varphi'' - \varphi''') = b''' \operatorname{tang}\varphi''',$$
$$\operatorname{tang}(\varphi' - \varphi'') = b'' \operatorname{tang}\varphi'',$$
$$\operatorname{tang}(\varphi - \varphi') = b' \operatorname{tang}\varphi';$$

on connaîtra donc l'amplitude cherchée φ.

On peut par ces méthodes déterminer la fonction F en connaissant son amplitude, ou réciproquement déterminer l'amplitude en connaissant la fonction ; de manière qu'il suffira de calculer quatre à cinq termes au plus de la série des modules, et un pareil nombre de termes de la série des amplitudes, pour avoir dix décimales exactes, si les Tables dont on fait usage sont à dix décimales. Si elles en avaient vingt, il suffirait de calculer un terme de plus dans les séries mentionnées pour avoir des résultats exacts jusqu'à la vingtième décimale, et ainsi de suite.

CHAPITRE XX.

Considérations générales sur l'échelle des modules et sur les propriétés des fonctions F *rapportées à différens termes de cette échelle.*

76. Considérons d'abord la suite générale ou l'échelle des modules et celle de leurs complémens, lesquelles se correspondent terme à terme de la manière suivante :

$$\left.\begin{array}{l} 1 \;\ldots\; c''', c'', c', c, c^{\circ}, c^{\circ\circ}, c^{\circ\circ\circ} \;\ldots\; 0 \\ 0 \;\ldots\; b''', b'', b', b, b^{\circ}, b^{\circ\circ}, b^{\circ\circ\circ} \;\ldots\; 1. \end{array}\right\} \qquad (A)$$

Dans la première on distingue deux parties, l'une à compter de c vers la droite, se compose des modules décroissans c, c°, $c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$ ...., dont la limite est zéro ; l'autre, à compter de c vers la gauche, offre la série des modules croissans c, c', c'', c''' .... dont la limite est l'unité. Ces deux parties ne forment qu'une suite ou échelle des modules, liés entre eux par une seule et même loi, qui consiste en ce que si x et y sont deux termes consécutifs, on a constamment $x = \frac{2\sqrt{y}}{1+y}$, et réciproquement..... $y = \frac{1-\sqrt{(1-xx)}}{1+\sqrt{(1-xx)}}$. On peut donc, en partant d'un terme quelconque de la série, former successivement tous les autres termes, tant dans le sens où la série est croissante, que dans le sens contraire, la limite étant zéro dans le premier cas et 1 dans le second.

La seconde série, qui répond terme à terme à la première, est composée des modules complémentaires, en sorte que si c^{μ} et b^{μ} sont deux termes correspondans dans les deux suites, on aura toujours $(c^{\mu})^2 + (b^{\mu})^2 = 1$. Au reste, la série inférieure est formée suivant la même loi que la série supérieure, avec cette seule différence qu'elle est croissante dans le sens où l'autre est décroissante et réciproquement. Nous avons adopté le signe $^{\circ}$ pour indiquer la diminution des c, et le signe $'$ pour indiquer leur augmentation; ainsi on a $c^{\circ} < c$, $c^{\circ\circ} < c^{\circ}$, $c' > c$, $c'' > c'$, etc.; ces signes auront un effet contraire sur les complémens; ainsi on a $b^{\circ} > b$, $b^{\circ\circ} > b^{\circ}$, $b' < b$, $b'' < b'$, etc.; et, d'après cette observation, toutes les fois qu'il y aura lieu d'échanger entre elles les lettres c et b, on devra en même temps changer les signes $^{\circ}$ en $'$, et réciproquement.

Lorsqu'on aura à désigner le terme $\mu^{\text{ième}}$ de la suite décroissante c°, $c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$, etc., il conviendra de le représenter par $c^{\circ\mu}$, et semblablement c'^{μ} désignera le $\mu^{\text{ième}}$ terme de la suite croissante c', c'', c''', etc. Si l'on ne craint pas de confondre une suite avec l'autre, on pourra désigner simplement le terme dont il s'agit par c^{μ}, μ étant un indice et non pas un exposant.

77. Lorsque $b = c = \sin 45^{\circ}$, les deux suites (A) sont les mêmes dans un ordre inverse, la place des termes égaux b et c servant à toutes deux de centre fixe. Dans ce cas, on aura en général $c^{\circ\mu} = b'^{\mu}$ et $c'^{\mu} = b^{\circ\mu}$.

Il y a un autre cas où la seconde des séries (A) n'est que la première

renversée ; c'est celui où l'on a $c = b'$, et par suite, $c = \frac{1-c}{1+c}$, $c = \sqrt{2} - 1 = \text{tang}\,\frac{\pi}{8}$, et $b^2 = 2c$. Alors les deux suites se correspondent comme on le voit ici :

$$1 \;\ldots\; c''', c'', c', c, c^{\circ}, c^{\circ\circ}, c^{\circ\circ\circ} \;\ldots\; 0$$
$$0 \;\ldots\; b^{\circ\circ}, b^{\circ}, b, b', b'', b''', b'''' \;\ldots\; 1;$$

et on a en général

$$b^{\circ\mu} = c'^{\mu+1}, \quad b'^{\mu} = c^{\circ\mu-1}.$$

Si on voulait égaler c à un autre terme pris dans la seconde des suites (A), on retomberait toujours sur l'un ou l'autre des deux cas précédens. Par exemple, si l'on fait $c = b''$, il s'ensuivra $c' = b' = \sqrt{\frac{1}{2}}$, ce qui est le premier cas ; si l'on fait $c = b'''$, il s'ensuivra $c' = b'' = \sqrt{2} - 1$, ce qui revient au second cas, et ainsi des autres suppositions.

78. Il résulte de la loi de nos deux suites, que si x et y sont deux termes consécutifs de la première suite, p et q les deux termes correspondans de la seconde, on aura généralement $qx = 2\sqrt{(py)}$, ce qui donne, dans un sens et dans l'autre, ces deux séries d'équations :

$$\left.\begin{array}{l} cb^{\circ} = 2\sqrt{(c^{\circ}b)},\; c^{\circ}b^{\circ\circ} = 2\sqrt{(c^{\circ\circ}b^{\circ})},\; c^{\circ\circ}b^{\circ\circ\circ} = 2\sqrt{(c^{\circ\circ\circ}b^{\circ\circ})},\text{ etc.} \\ c'b = 2\sqrt{(cb')},\; c''b' = 2\sqrt{(c'b'')},\quad c'''b'' = 2\sqrt{(c''b''')},\text{ etc.} \end{array}\right\} \quad (B)$$

Si on multiplie entre elles les μ premières équations de la première ligne, on aura le produit

$$(b^{\circ}b^{\circ\circ}b^{\circ\circ\circ}\ldots b^{\circ\mu})(cc^{\circ}c^{\circ\circ}\ldots c^{\circ\mu-1}) = 2^{\mu}\sqrt{(bb^{\circ}b^{\circ\circ}\ldots b^{\circ\mu-1})}\sqrt{(c^{\circ}c^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ}\ldots c^{\circ\mu})},$$

d'où l'on tire, en supposant $1 - b^{\circ\mu}$ négligeable,

$$\left(\frac{b^{\circ}b^{\circ\circ}\ldots b^{\circ\mu-1}}{b}\right)\left(\frac{cc^{\circ}c^{\circ\circ}\ldots c^{\circ\mu-1}}{c^{\circ\mu}}\right) = \frac{4^{\mu}}{c}; \qquad (C)$$

on aura semblablement, en supposant $1 - c'^{\nu}$ négligeable,

$$\left(\frac{c'c''\ldots c'^{\nu-1}}{c}\right)\left(\frac{bb'b''\ldots b'^{\nu-1}}{b'^{\nu}}\right) = \frac{4^{\nu}}{b}. \qquad (C')$$

Multipliant ces deux équations, il viendra

$$\left(\frac{c'^{\nu-1}\ldots c'''c''c'cc^{\circ}c^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ}\ldots c^{\circ\mu-1}}{c^{\circ\mu}}\right)\left(\frac{b^{\circ\mu-1}\ldots b^{\circ\circ}b^{\circ}bb'b''\ldots b'^{\nu-1}}{b'^{\nu}}\right) = 4^{\mu+\nu}. \quad (D)$$

Cette formule suppose négligeables $1 - c'^{\nu}$ et $1 - b^{\circ\mu}$; ainsi les deux produits compris entre parenthèses, sont prolongés vers la gauche jus-

qu'aux facteurs qui peuvent être omis, comme étant égaux à l'unité sans erreur sensible.

79. La fonction complète $F'c$ peut s'exprimer de deux manières, l'une au moyen des modules décroissans c, c^0, c^{00}, etc.; l'autre, au moyen des modules croissans c, c', c'', etc.

La première expression est $F'c = \frac{\pi}{2}K$, où $K = (1+c^0)(1+c^{00})(1+c^{000})$, etc.; on peut aussi mettre K sous la forme $K = \frac{2\sqrt{c^0}}{c} \cdot \frac{2\sqrt{c^{00}}}{c^0} \cdot \frac{2\sqrt{c^{000}}}{c^{00}}$, ou plus simplement encore, sous la forme

$$K = \sqrt{\left(\frac{1}{b} \cdot b^0 b^{00} b^{000}, \text{ etc.}\right)},$$

où l'on se souviendra que la suite b, b^0, b^{00}, b^{000}, converge rapidement vers une limite égale à l'unité.

La seconde expression, d'après la formule de l'art. 72, est $F'c = \frac{K'}{2'}$ $\log. \frac{4}{b'^{\nu}}$, où l'on a

$$K' = \frac{2\sqrt{b'}}{b} \cdot \frac{2\sqrt{b''}}{b'} \cdot \frac{2\sqrt{b'''}}{b''}, \text{ etc.} = \sqrt{\left(\frac{1}{c} \cdot c' c'' c''' \ldots\right)};$$

on suppose dans cette formule, b'^{ν} assez petit pour que $1 - c'^{\nu}$ soit négligeable.

Égalant entre elles les deux valeurs, de $F'c$, on en tirera cette formule générale

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\left(\frac{b^{0\mu} \ldots b^{000} b^{00} b^0 b b' b'' \ldots b'^{\nu-1}}{b'^{\nu}}\right)} = \log. \frac{4}{b'^{\nu}}, \qquad \text{(E)}$$

où l'on voit que le produit sous le radical doit être prolongé à gauche jusqu'à un terme $b^{0\mu}$ qui ne diffère pas sensiblement de l'unité, et à droite jusqu'au terme $b'^{\nu-1}$, assez petit pour que le suivant b'^{ν} ou au moins son quarré, soit de l'ordre des quantités négligeables.

Si on change b en c, on aura semblablement

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\left(\frac{c'^{\nu} \ldots c''' c'' c' c c^0 c^{00} \ldots c^{0\mu-1}}{c^{0\mu}}\right)} = \log. \frac{4}{c^{0\mu}}, \qquad \text{(F)}$$

formule qui suppose $1 - c'^{\nu}$ négligeable ainsi que $1 - b^{0\mu}$.

Si on multiplie ces deux équations l'une par l'autre, et qu'on réduise le premier membre par la formule de l'art. précédent, on aura ce résultat très remarquable,

$$\frac{\pi^2}{4} \cdot 2^{\mu+\nu} = \log \frac{4}{b'^{\nu}} \cdot \log \frac{4}{c^{0\mu}}, \qquad \text{(G)}$$

équation qui suppose négligeable le quarré de b'^{ν} et celui de $c^{0\mu}$.

Lorsque $b = c$, on a généralement $b'^{\mu} = c^{0\mu}$. Ainsi, en supposant le quarré de $c^{0\mu}$ négligeable, celui de b'^{μ} le sera aussi, de sorte qu'on peut faire $\nu = \mu$, et l'équation précédente devient

$$\frac{\pi}{2} \cdot 2^{\mu} = \log \cdot \frac{4}{c^{0\mu}}. \qquad \text{(H)}$$

Ces équations ne sont qu'approchées, mais en donnant des valeurs convenables aux nombres μ et ν, l'approximation sera portée à un degré quelconque proposé, plus rapidement qu'on ne pourrait le faire par toute autre méthode. Nous en donnerons quelques exemples.

80. Remarquons d'abord, 1°. qu'on peut parvenir directement à l'équation (G) au moyen des doubles valeurs suivantes,

$$F'c = \frac{\pi}{2} K = \frac{K'}{2^{\nu}} \log. \frac{4}{b'^{\nu}},$$

$$F'b = \frac{\pi}{2} K' = \frac{K}{2^{\mu}} \log \frac{4}{c^{0\mu}};$$

car en multipliant ces valeurs, on obtient immédiatement

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{1}{2^{\mu+\nu}} \cdot \log \frac{4}{b'^{\nu}} \cdot \log \frac{4}{c^{0\mu}}.$$

2°. Que lorsque $c = \sqrt{\frac{1}{2}}$, la comparaison de l'équation (F) à l'équation (H) donne

$$4^{\mu} = \frac{c'^{\mu} \ldots c'''c''c'cc^{0}c^{00} \ldots c^{0\mu-1}}{c^{0\mu}},$$

où l'on suppose $1 - c'^{\mu}$ négligeable. Celle-ci s'obtiendrait immédiatement de l'équation (C) en faisant $b = c$, ce qui donne $b^{0\nu} = c'^{\nu}$.

3°. Que dans l'équation (F) on peut supposer c déjà assez petit pour que $1 - b$ soit négligeable, alors on pourra faire $c^{0\mu} = c$, ce qui donnera cette formule plus simple

$$\log \frac{4}{c} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{c} \cdot c'c''c''' \ldots 1\right)}. \qquad \text{(I)}$$

Cette formule au reste n'est autre chose que l'équation $\frac{\pi}{2} \cdot K' = F'b = \log \frac{4}{c}$.

81. On peut par le moyen des formules (F) et (I) trouver le logarithme

nombre donné par le nombre π, ou réciproquement trouver le nombre π par le logarithme d'un nombre facile à calculer par une suite d'extractions de racines carrées.

Soit proposé d'abord de trouver le logarithme de 2, on fera $\frac{4}{c} = 2^{\mu+2}$, μ étant un nombre suffisamment grand et qui se détermine par le degré d'approximation qu'on veut obtenir. La supposition faite donne $c = 2^{-\mu}$; et comme la formule suppose c^6 négligeable, il faudra que $2^{-2\mu}$ le soit; donc si on veut que l'approximation s'étende jusqu'à 10 décimales, on fera $2^{2\mu} = 10^{10}$, ce qui donne environ $\mu = 16$. Donc en faisant $c = (\frac{1}{2})^{16}$, puis $c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, $c'' = \frac{2\sqrt{c'}}{1+c'}$, etc., on aura $\log\frac{4}{c} = 18\log 2 = \frac{\pi}{2}.2^2\sqrt{(c'c''c'''\ldots 1)}$, la suite c', c'', c''', etc. devant être prolongée jusqu'à un terme qui ne différera de l'unité que dans le 11e ordre de décimales, il suffit pour cela de calculer la série jusqu'au cinquième terme c^v. On trouve en effet les logarithmes suivans

$$\begin{array}{ll} c' \ldots & 7.89278\ \ 34036, \\ c'' \ldots & 9.24404\ \ 20082, \\ c''' \ldots & 9.85286\ \ 34601, \\ c^{iv} \ldots & 9.99379\ \ 84453, \\ c^{v} \ldots & 9.99998\ \ 89306, \\ c^{vi} \ldots & 0.00000\ \ 00000, \end{array}$$

d'où résulte $\log 2 = 0.69314\ 71806\ 5$; la vraie valeur est 0 69314 71805 6. La différence qui est à peine d'une unité décimale du 10e ordre est due à l'imperfection des tables; d'ailleurs l'esprit de cette méthode est de ne pas se servir de tables, et de calculer c', c'', etc. par des extractions de racines quarrées, afin d'en déduire $\log 2$ par l'équation $\log 2 = \frac{64\pi}{9}\sqrt{(c'c''c'''\ldots 1)}$.

Le degré de l'approximation dépend de la première supposition $\frac{4}{c} = 2^{\mu+2}$; on obtient 10 décimales en faisant $\mu = 16$; on en obtiendrait à peu près 20 en faisant $\mu = 32$, et la suite des modules n'exigerait qu'un terme de plus, savoir c^{vi}, mais il faudrait les calculer tous à 20 décimales au moins.

82. Il est remarquable que la formule (1) peut servir à trouver directement le logarithme d'un nombre quelconque, en n'exigeant guère plus de calcul pour l'un que pour l'autre, à pareil degré d'approximation. Par exemple, si l'on veut avoir le logarithme de 401, on fera $\frac{4}{c} = (401)^{\mu}$, ou $c = \frac{4}{(401)^{\mu}}$

et la formule donnera la valeur exacte de log 401, aux quantités près de l'ordre c^{μ}; prenant $\mu = 3$, c^{μ} appartiendra au 15me ordre de décimales; ainsi, en prenant $c = \frac{4}{(401)^3}$, on aura directement la valeur de log 401 approchée jusqu'à 14 décimales au moins, et le calcul se fera sans aller plus loin que c^{v} ou c^{vi}. Aucune autre méthode connue ne peut faire trouver aussi promptement et aussi immédiatement le logarithme de tout nombre donné : celle-ci suppose que π est connu jusqu'au nombre de décimales demandé.

Réciproquement, la valeur de π peut s'exprimer aussi exactement qu'on voudra, par le logarithme d'un nombre qui résulte de quelques extractions de racines quarrées; car on voit, par l'équation (H), qu'en faisant $c = \sqrt{\frac{1}{2}}$, π sera la limite vers laquelle convergent rapidement les termes successifs

$$\log \frac{4}{c^{0}},\ \frac{1}{2}\log\frac{4}{c^{00}},\ \frac{1}{4}\log\frac{4}{c^{000}};\ \text{etc.}$$

Pour savoir jusqu'à quel point chaque terme de cette suite approche de la vraie valeur de π, je désigne par c^{n} le $n^{ième}$ terme de la suite c^{0}, c^{00}, c^{000}, etc., et j'appelle x la valeur approchée de π donnée par ce terme, en sorte qu'on aura $x = \frac{1}{2^{n-2}} \log \frac{4}{c^{n}}$. Je suppose ensuite qu'avec le terme c^{n+1} la quantité x devienne $x - \omega$, on aura $x - \omega = \frac{1}{2^{n}} \log \frac{4}{c^{n+1}}$; mais, suivant l'art. 69, on a $c^{n+1} = \frac{1}{4}(c^{n})^{2} + \frac{1.3}{4.6}(c^{n})^{4}$, donc $\frac{4}{c^{n+1}} = \left(\frac{4}{c^{n}}\right)^{2}\left(1 - \frac{1}{2}(c^{n})^{2}\right)$, et par conséquent, $\log\left(\frac{4}{c^{n+1}}\right) = 2\log\frac{4}{c^{n}} - 2c^{n+1}$, donc $x - \omega = \frac{1}{2^{n-1}} \log\frac{4}{c^{n}} - \frac{2}{2^{n-1}} c^{n+1}$, et par conséquent, $\omega = \frac{1}{2^{n-1}} c^{n+1}$. Mais puisqu'on a d'une manière très approchée $\pi = \frac{1}{2^{n}} \log \frac{4}{c^{n+1}}$, on aura aussi $\log \omega = -(n-3)\log 2 + \log\frac{c^{n+1}}{4} = -(n-3)\log 2 - 2^{n}\pi$, ou en logarithmes vulgaires,

$$\log \omega = -(n-3)\log 2 - 2^{n-3}(10.915).$$

Lorsque $n = 3$, cette formule donne $\log \omega = -10.915$; ainsi le troisième terme $\frac{1}{4}\log\frac{4}{c^{000}}$, donne déjà la valeur de π exacte jusqu'à la dixième décimale.

Lorsque $n = 4$, on a $\log \omega = -22.131$; ainsi le quatrième terme donne 22 décimales exactes, le cinquième en donne 44, le sixième 88 et le

septième 175. D'où l'on voit que $\frac{1}{64}\log\frac{4}{c^{07}}$ est une valeur de π beaucoup plus approchée que celle qu'a donnée Wega avec 140 décimales. Quant à la valeur de c^{07}, elle se déduit de celle de c par de simples extractions de racines quarrées, puisque d'un module c on passe au module suivant c^{0} par la formule $c^{0}=\frac{1-\sqrt{(1-c^2)}}{1+\sqrt{(1-c^2)}}$.

83. Supposons maintenant que les deux fonctions complètes $F'b$, $F'c$, soient entre elles dans un rapport connu, en sorte qu'on ait $F'b=nF'c$; comme on a d'ailleurs $F'c=\frac{\pi}{2}K$ et $F'b=\frac{K}{2^{\mu}}\log\frac{4}{c^{0\mu}}$, il en résultera $\frac{n\pi}{2}=\frac{1}{2^{\mu}}\log\frac{4}{c^{0\mu}}$. Ainsi $\frac{n\pi}{2}$ sera égal à la limite vers laquelle tendent rapidement les termes de la suite

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{4}{c^{0}},\ \tfrac{1}{4}\log\frac{4}{c^{00}},\ \tfrac{1}{8}\log\frac{4}{c^{000}},\ \text{etc.}$$

Le cas de $b=c$ est compris dans cette formule en faisant $n=1$; mais il y a d'autres cas où on peut en faire l'application.

Ainsi nous avons trouvé qu'en faisant $c=\sin 15^{\circ}=\frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})}$, on a $F'b=\sqrt{3}\,.\,F'c$; donc, en calculant la suite c^{0}, c^{00}, etc., d'après le module $c=\sin 15^{\circ}$, $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ sera égal à la limite de la suite $\frac{1}{2}\log\frac{4}{c^{0}}$, $\frac{1}{4}\log\frac{4}{c^{00}}$, etc. L'approximation est telle, que dès le premier terme on a $\pi=\ldots\ldots$ $\frac{2}{\sqrt{3}}\log\frac{2}{\text{tang}\,7^{\circ}\frac{1}{2}}=3.141636$, valeur qui ne diffère de la véritable que dans la cinquième décimale.

Nous verrons ci-après, qu'en faisant $\sin 2\alpha=\text{tang}^2\,15^{\circ}$ et $c=\sin\alpha$, on a $F'b=3F'c$; ainsi, en calculant la suite des modules c^{0}, c^{00}, etc., d'après la valeur $c=\sin\alpha$, on aura $\frac{3\pi}{2}$ égal à la limite de la suite $\frac{1}{2}\log\frac{4}{c^{0}}$, $\frac{1}{4}\log\frac{4}{c^{00}}$, etc. Par le premier terme on obtient déjà $\pi=3.1415926627$, l'erreur n'étant que d'une unité décimale du huitième ordre, d'où l'on peut conclure qu'au cinquième terme l'approximation équivaudrait à 128 décimales.

84. Supposons qu'on veuille trouver le module c tel, que le rapport des deux fonctions complémentaires $F'b$, $F'c$, soit égal à un nombre donné n, rationnel ou irrationnel, il faudra satisfaire à l'équation $\frac{n\pi}{2}=\frac{1}{2^{\mu}}\log\frac{4}{c^{0\mu}}$, où

l'indice μ devra être pris d'après le degré d'approximation qu'on veut obtenir, afin que les quantités de l'ordre $1 - b^{0\mu}$ ou $(c^{0\mu})^2$, soient négligeables.

Soit par exemple, $n = \sqrt{2}$, si l'on prend $\mu = 3$, on aura $\log \frac{4}{c^{000}} = \ldots \pi . 2^{\frac{5}{2}}$, ce qui donne, en logarithmes vulgaires, $\log c^{000} = 2.88398\ 18161\ 9082$. Connaissant c^{000}, on en déduit successivement c^{00}, c^{0}, et enfin c, dont les valeurs logarithmiques sont,

$$c^{00} \ldots . \ 6.74302\ 08705\ 1135$$
$$c^{0} \ldots . \ 8.67230\ 01689\ 4325$$
$$c \ldots . \ 9.61722\ 43146\ 6214.$$

Par ce logarithme, on trouve $c = \sqrt{2} - 1$, et en effet, dans le cas de ce module, on a exactement $F'b = \sqrt{2} . F'c$.

85. Si l'on considère le rapport des fonctions complémentaires dans deux degrés consécutifs de l'échelle des modules, savoir : $\frac{F'b}{F'c}, \frac{F'b^0}{F'c^0}$, on trouvera que le second rapport est double du premier. En effet on a l'équation $F'c = (1 + c^0) F'c^0$, d'où résulte aussi $F'b^0 = (1 + b) F'b$; et puisque $c^0 = \frac{1-b}{1+b}$, on a $1 + c^0 = \frac{2}{1+b}$; donc $\frac{F'b}{F'c} = \frac{1}{2} . \frac{F'b^0}{F'c^0}$; semblablement $\frac{F'b^0}{F'c^0} = \frac{1}{2} . \frac{F'b^{00}}{F'c^{00}}$, etc., de sorte qu'en général

$$\frac{F'b}{F'c} = \frac{1}{2^\mu} . \frac{F'b^{0\mu}}{F'c^{0\mu}}.$$

On aurait de même, en continuant l'échelle dans l'autre sens, $\frac{F'b}{F'c} = 2 \frac{F'b'}{F'c'} = 4 \frac{F'b''}{F'c''}$, etc.

Cette propriété est générale, quelle que soit l'échelle des modules. Dans le cas particulier où $b = c = \sin 45°$, on a donc $F'b = F'c$, $F'b^0 = 2F'c^0$, $F'b^{00} = 4F'c^{00}$, etc., $F'b' = \frac{1}{2} F'b^0$, $F'b'' = \frac{1}{4} F'b^{00}$, etc.

Si le module $c = \sqrt{2} - 1$, on aura $b' = c$ et $c' = b$; donc $\frac{F'b}{F'c} = 2 \frac{F'c}{F'b}$. Ainsi on a dans ce cas $F'b = \sqrt{2} F'c$, et par suite, $F'b^0 = 2\sqrt{2} . F'c^0$, $F'b^{00} = 4\sqrt{2} . F'c^{00}$, etc.; c'est aussi ce qu'on obtiendrait immédiatement par l'équation $F'c' = (1 + c) F'c$, où $c' = b$.

Les deux modules que nous venons de donner pour exemples, sont les seuls dans lesquels l'échelle des modules est la même, à l'ordre près, que celle de leurs complémens.

86. Le module primitif c étant à volonté, toute fonction $F(c,\varphi)$ peut s'exprimer par une fonction semblable $F(c^{0\mu},\varphi^{0\mu})$ ou $F(c'^{\mu},\varphi'^{\mu})$, dont le module est pris dans la même échelle; et réciproquement, ces dernières fonctions, relatives à un terme quelconque de l'échelle, peuvent s'exprimer par la fonction $F(c,\varphi)$ relative au module primitif.

Dans les deux cas de $c=\sqrt{\frac{1}{2}}$ et $c=\sqrt{2}-1$, la même propriété s'applique aux fonctions $F(b^{0\mu},\psi^{0\mu})$, $F(b'^{\mu},\psi'^{\mu})$, qui toutes peuvent être réduites à la fonction $F(c,\varphi)$; la raison en est que les modules complémentaires $b^{0\mu}$, b'^{μ}, sont compris dans l'échelle des modules c, de sorte qu'il n'y a de différence que dans la notation, les b pouvant être changés en c accentués.

Pour nous borner à comparer les fonctions dont les modules sont complémens l'un de l'autre, nous ajouterons ici les équations particulières qui résultent de nos formules.

Dans le cas de $c=b=\sin 45°$, on a des rapports très simples entre les fonctions dont il s'agit, savoir :

$$F(c^{0},\varphi^{0})=2F(b^{0},\varphi'),$$
$$F(c^{00},\varphi^{00})=4F(b^{00},\varphi''),$$
$$F(c^{000},\varphi^{000})=8F(b^{000},\varphi'''),$$
etc.

La réduction entre deux de ces formules, s'opérera à volonté; car on sait comment on peut déduire φ^{0} de φ', φ^{00} de φ'', etc., et réciproquement.

Dans le second cas où $c=\sqrt{2}-1$, on a les équations

$$F(c,\varphi)=\sqrt{2}F(b,\varphi'),$$
$$F(c^{0},\varphi^{0})=2\sqrt{2}F(b^{0},\varphi''),$$
$$F(c^{00},\varphi^{00})=4\sqrt{2}F(b^{00},\varphi'''),$$
etc.

par lesquelles on pourra toujours faire la transformation entre deux fonctions dont les modules sont complémens l'un de l'autre.

Nous avons indiqué ces propriétés avec quelques détails, parce qu'en général il y a très peu de cas où la fonction $F(c,\varphi)$ puisse être transformée en une autre $F(b,\psi)$ relative au module complémentaire. Et la transformation ne réussit dans les deux cas précédens, que parce que l'échelle des b est la même, à l'ordre près, que celle des c.

87. On pourra donc, par la même raison, transformer entre elles, dans les

deux mêmes cas, deux fonctions E dont les modules sont complémens l'un de l'autre. C'est ce qu'il suffira de faire voir dans le cas où le module primitif $c = \sqrt{2} - 1$.

On a en général les deux équations

$$F(c', \varphi') = \frac{1+c}{2} F(c, \varphi),$$

$$(1+c) E(c', \varphi') = E(c, \varphi) - \tfrac{1}{2} b^2 F(c, \varphi) + c \sin \varphi,$$

ce qui suppose entre les amplitudes φ' et φ la relation comprise dans l'équation $\sin(2\varphi' - \varphi) = c \sin \varphi$, ou dans son inverse $\tang(\varphi - \varphi') = b' \tang \varphi'$.

Faisant dans ces formules $c' = b$, $b' = c$, $b^2 = 2c$, on aura les équations suivantes :

$$F(b, \varphi') = \frac{1}{\sqrt{2}} F(c, \varphi),$$

$$E(b, \varphi') = \frac{1}{\sqrt{2}} E(c, \varphi) - \frac{c}{\sqrt{2}} F(c, \varphi) + \frac{c}{\sqrt{2}} \sin \varphi.$$

Ainsi la fonction $E(b, \varphi')$ peut s'exprimer par $E(c, \varphi)$, et réciproquement. Soit $\varphi' = \frac{1}{2}\pi$, on aura $\varphi = \pi$, $E(b, \varphi') = E^1 b$, $E(c, \varphi) = 2E^1 c$, donc

$$E^1 b = \sqrt{2}\,(E^1 c - c F^1 c), \quad F^1 b = \sqrt{2} \,.\, F^1 c.$$

Appliquant à ce cas l'équation générale des fonctions complémentaires $\frac{\pi}{2} = F^1 b E^1 c + F^1 c E^1 b - F^1 c F^1 b$, on en déduira

$$E^1 c = \frac{\pi}{4F^1 b} + \tfrac{1}{2} F^1 b,$$

$$E^1 b = \frac{\pi}{4F^1 c} + c F^1 c.$$

Ainsi les fonctions de seconde espèce $E^1 c$, $E^1 b$, se déterminent par les fonctions de première espèce $F^1 c$, $F^1 b$, ou seulement par l'une d'elles, puisque leur rapport est connu.

CHAPITRE XXI.

Méthode d'approximation appliquée aux fonctions elliptiques de la seconde espèce.

88. Considérons généralement une fonction G composée de la première et de la seconde espèce, en sorte qu'on ait

$$G = \int (A + B \sin^2 \varphi) \frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Si on y substitue les valeurs $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + c^0 \sin^2 \varphi^0 - \Delta^0 \cos \varphi^0)$, $\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{1+c^0}{2} \cdot \frac{d\varphi^0}{\Delta^0}$, on aura la transformée

$$G = \frac{1+c^0}{2}(G^0 - \tfrac{1}{2} B \sin \varphi^0),$$

où l'on suppose $G^0 = \int (A^0 + B^0 \sin^2 \varphi^0) \frac{d\varphi^0}{\Delta^0}$, $A^0 = A + \frac{1}{2}B$, $B^0 = \frac{1}{2}Bc^0$. On trouvera ensuite par de semblables transformations,

$$G^0 = \frac{1+c^{00}}{2}(G^{00} - \tfrac{1}{2} B^0 \sin \varphi^{00}),$$

$$G^{00} = \frac{1+c^{000}}{2}(G^{000} - \tfrac{1}{2} B^{00} \sin \varphi^{000}),$$

etc.

Ainsi la formule intégrale G se ramène successivement aux intégrales semblables G^0, G^{00}, G^{000}, etc., et une seule de ces intégrales suffit pour déterminer toutes les autres.

Supposons que cette suite soit prolongée jusqu'à un terme G^μ assez éloigné pour que le module correspondant c^μ soit de l'ordre des quantités qu'on veut négliger; alors on aura $\Delta^\mu = 1$, et la valeur de G^μ se réduit d'abord à $\int (A^\mu + B^\mu \sin^2 \varphi^\mu) d\varphi^\mu$; observons ensuite qu'on a $B^0 = \frac{1}{2}Bc^0$, $B^{00} = \frac{1}{2}B^0 c^{00} = \frac{1}{4}Bc^0 c^{00}$, $B^{000} = \frac{1}{8}Bc^0 c^{00} c^{000}$, etc.; donc la suite B^0, B^{00}, B^{000}, etc. décroît plus rapidement que la suite c^0, c^{000}, c^{00}, etc. Donc on peut faire, après un certain nombre de termes, $B^\mu = 0$, ce qui donnera

$G^{\mu} = A^{\mu}\varphi^{\mu} = A^{\mu}2^{\mu}\,\Phi$, Φ étant la limite des angles φ, $\frac{1}{2}\varphi^{\circ}$, $\frac{1}{4}\varphi^{\circ\circ}$, etc.

A l'égard de A^{μ}, puisqu'on a $A^{\circ} = A + \frac{1}{2}B$, $A^{\circ\circ} = A^{\circ} + \frac{3}{2}B^{\circ}$, etc., l'expression générale de A^{μ} sera

$$A^{\mu} = A + \tfrac{1}{2}B\left(1 + \frac{c^{\circ}}{2} + \frac{c^{\circ}c^{\circ\circ}}{4} + \frac{c^{\circ}c^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ}}{8} + \text{etc.}\right).$$

Maintenant il est aisé de voir que la valeur de G, déterminée par celle de G^{μ}, est composée de deux parties; l'une $KA^{\mu}\Phi$, K désignant le produit $(1 + c^{\circ})(1 + c^{\circ\circ})(1 + c^{\circ\circ\circ})$, etc., l'autre algébrique ou périodique, savoir :

$$-\left(\frac{1+c^{\circ}}{2}\right)\frac{B}{2}\sin\varphi^{\circ} - \left(\frac{1+c^{\circ}}{2}\right)\left(\frac{1+c^{\circ\circ}}{2}\right)\frac{Bc^{\circ}}{4}\sin\varphi^{\circ\circ} - \text{etc.}$$

Mais comme on a $1 + c^{\circ} = \frac{2\sqrt{c^{\circ}}}{c}$, $1 + c^{\circ\circ} = \frac{2\sqrt{c^{\circ\circ}}}{c^{\circ}}$, etc., cette seconde partie peut se mettre sous la forme

$$-\frac{B}{c}\left(\frac{\sqrt{c^{\circ}}}{2}\sin\varphi^{\circ} + \frac{\sqrt{c^{\circ}c^{\circ\circ}}}{4}\sin\varphi^{\circ\circ} + \text{etc.}\right).$$

Donc la valeur totale de G sera

$$G = KA^{\mu}\Phi - \frac{B}{c}\left(\frac{\sqrt{c^{\circ}}}{2}\sin\varphi^{\circ} + \frac{\sqrt{c^{\circ}c^{\circ\circ}}}{4}\sin\varphi^{\circ\circ} + \frac{\sqrt{c^{\circ}c^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ}}}{8}\sin\varphi^{\circ\circ\circ} + \text{etc.}\right).$$

On peut encore donner à la partie algébrique de cette formule une autre forme qui sera plus facile à calculer dans certains cas. Pour cela soit $\varphi^{\circ} - \varphi = \omega$, $\varphi^{\circ\circ} - \varphi^{\circ} = \omega^{\circ}$, $\varphi^{\circ\circ\circ} - \varphi^{\circ\circ} = \omega^{\circ\circ}$, etc., on aura la suite d'équations $\tang\omega = b\tang\varphi$, $\tang\omega^{\circ} = b^{\circ}\tang\varphi^{\circ} = b^{\circ}\tang(\varphi + \omega)$, $\tang\omega^{\circ\circ} = b^{\circ\circ}\tang\varphi^{\circ\circ} = b^{\circ\circ}\tang(\varphi^{\circ} + \omega^{\circ})$, etc., par lesquelles on calculera successivement les angles ω, ω°, $\omega^{\circ\circ}$, etc. Or la valeur $\varphi^{\circ} = \varphi + \omega$, donne $\sin\varphi^{\circ} = \sin\varphi\cos\omega + \cos\varphi\sin\omega = (1 + b)\sin\varphi\cos\omega = \frac{2}{1+c^{\circ}}\sin\varphi\cos\omega = \frac{c}{\sqrt{c^{\circ}}}\sin\varphi\cos\omega$; on aura de même $\sin\varphi^{\circ\circ} = \frac{c^{\circ}}{\sqrt{c^{\circ\circ}}}\sin\varphi^{\circ}\cos\omega^{\circ} = \frac{c\sqrt{c^{\circ}}}{\sqrt{c^{\circ\circ}}}\sin\varphi\cos\omega\cos\omega^{\circ}$, $\sin\varphi^{\circ\circ\circ} = \frac{c\sqrt{(c^{\circ}c^{\circ\circ})}}{\sqrt{c^{\circ\circ\circ}}}\sin\varphi\cos\omega\cos\omega^{\circ}\cos\omega^{\circ\circ}$, etc. Donc la valeur de G peut être exprimée par cette formule dont la convergence est manifeste

$$G = KA^{\mu}\Phi - \tfrac{1}{2}B\sin\varphi\cos\omega\left(1 + \tfrac{1}{2}c^{\circ}\cos\omega^{\circ} + \tfrac{1}{4}c^{\circ}c^{\circ\circ}\cos\omega^{\circ}\cos\omega^{\circ\circ} + \text{etc.}\right).$$

Dans le cas où $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, la partie algébrique disparaît, et on a la fonction complète $G' = KA^{\mu}.\frac{1}{2}\pi$.

Les suites qui composent la valeur de G seront fort convergentes si on a $c^2 < \frac{1}{2}$, et alors trois termes suffisent pour donner la valeur de G approchée jusqu'à sept décimales environ. Les mêmes formules pourront être employées avec avantage; quand même le module c serait beaucoup plus près de l'unité; car si on avait, par exemple, $c = 0.985$, il en résulterait à peu près $c^0 = \sqrt{\frac{1}{2}}$; d'où l'on voit qu'il n'y aurait qu'un terme de plus à calculer, c'est-à-dire quatre termes en tout, pour avoir la valeur de G avec le même degré d'approximation.

Mais si c est beaucoup plus près de l'unité, ou si ayant $c^2 > \frac{1}{2}$, on veut obtenir un même degré d'approximation avec le moindre nombre possible de transformées, alors il conviendra de se servir de la seconde méthode dont nous avons fait usage en pareil cas, pour les fonctions de la première espèce.

89. Cette méthode consiste à prolonger dans un ordre inverse la série des transformées. Ainsi l'équation entre G et G^0 qui donne

$$G^0 = \frac{2}{1+c^0} G + \frac{1}{2} B \sin \varphi^0,$$

s'applique semblablement aux deux fonctions G et G', et on en déduit

$$G = \frac{2}{1+c} G' + \frac{1}{2} B' \sin \varphi,$$

équation où l'on doit supposer $G' = \int (A' + B' \sin^2 \varphi') \frac{d\varphi'}{\Delta'}$, $A' = A - \frac{1}{2} B'$, $B' = \frac{2B}{c}$. On aura semblablement par des transformées ultérieures

$$G' = \frac{2}{1+c'} G'' + \frac{1}{2} B'' \sin \varphi'',$$

$$G'' = \frac{2}{1+c''} G''' + \frac{1}{2} B''' \sin \varphi''',$$

etc.

Mais lorsque la suite G', G'', etc., sera prolongée jusqu'à un terme suffisamment éloigné G^μ, on pourra faire $c^\mu = 1$, $\Delta^\mu = \cos \varphi^\mu$, et alors la fonction G^μ deviendra $\int (A^\mu + B^\mu \sin^2 \varphi^\mu) \frac{d\varphi^\mu}{\cos \varphi^\mu}$, ce qui donnera, en intégrant,

$$G^\mu = (A^\mu + B^\mu) \log \operatorname{tang} (45^\circ + \tfrac{1}{2} \varphi^\mu) - B^\mu \sin \varphi^\mu,$$

et φ^μ sera égal alors à la limite Φ'.

On connaîtra donc la valeur de G avec toute l'exactitude qu'on peut désirer, en prolongeant la suite des modules c', c'', c''', etc., et celle de leurs complémens b', b'', b''', etc., jusqu'à ce que le dernier terme de ceux-

ci b^μ soit assez petit pour que son quarré soit négligeable. Alors on pourra faire $c^\mu = 1$, et calculant un pareil nombre de termes de la série des amplitudes φ', φ'', φ''', etc., on aura le dernier terme φ^μ qui pourra être pris pour la limite Φ'.

Faisant donc les substitutions nécessaires pour avoir la valeur de G au moyen de G^μ, et observant qu'on a $\frac{2}{1+c} = \frac{c'}{\sqrt{c}}$, $\frac{2}{1+c'} = \frac{c''}{\sqrt{c'}}$, etc., on trouvera cette formule générale

$$G = K'(A^\mu + B^\mu) \log \tang (45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi^\mu) - \frac{B}{c} \cdot \frac{2^\mu c^\mu \sin \varphi^\mu}{\sqrt{(cc'c'' \ldots c^{\mu-1})}}$$
$$+ \frac{B}{c}\left(\sin \varphi + \frac{2}{\sqrt{c}} \sin \varphi' + \frac{4}{\sqrt{cc'}} \sin \varphi'' \ldots\ldots + \frac{2^{\mu-1} \sin \varphi^{\mu-1}}{\sqrt{(cc'c'' \ldots c^{\mu-2})}}\right).$$

On a fait comme ci-dessus $K' = c^\mu \sqrt{\left(\frac{c'c'' \ldots c^{\mu-1}}{c}\right)}$, ou simplement $K' = \sqrt{\left(\frac{c'c'' \ldots c^{\mu-1}}{c}\right)}$, parce que c^μ peut être pris pour l'unité. Quant à la valeur de $A^\mu + B^\mu$, si on l'appelle L^μ, on aura

$$L^\mu = A + \frac{2B^\mu}{cc'c'' \ldots c^{\mu-1}} - \frac{B}{c} - \frac{2B}{cc'} - \frac{4B}{cc'c''} \ldots - \frac{2^{\mu-1} B}{cc'c'' \ldots c^{\mu-1}}.$$

Cette quantité est exprimée par une suite divergente, ce qui importe peu, parce que le nombre des termes à calculer sera toujours assez petit; cependant il est facile, si on le juge à propos, de la mettre sous une autre forme. En effet, considérant L^μ comme composé de L et de la somme des différences successives $L' - L$, $L'' - L'$, etc., on trouve aisément

$$L^\mu = A + \frac{B}{c} + \frac{2B}{cc'}(1 - c') + \frac{4B}{cc'c''}(1 - c'') + \text{etc.},$$

ou, ce qui revient au même,

$$L^\mu = A + B + \frac{Bb}{c}\left[\sqrt{b'} + \sqrt{\left(\frac{b'b''}{c}\right)} + \sqrt{\left(\frac{b'b''b'''}{cc'}\right)} \ldots + \sqrt{\left(\frac{b'b'' \ldots b^\mu}{cc' \ldots c^{\mu-2}}\right)}\right],$$

et sous cette forme la convergence de la suite est manifeste.

On peut également rendre convergente la suite des quantités algébriques comprises dans la valeur de G. Pour cela, soit

$$\psi(\mu) = \frac{2^\mu c^\mu \sin \varphi^\mu}{\sqrt{(cc'c'' \ldots c^{\mu-1})}} - \sin \varphi - \frac{2}{\sqrt{c}} \sin \varphi' - \frac{4}{\sqrt{cc'}} \sin \varphi'' \ldots - \frac{2^{\mu-1} \sin \varphi^{\mu-1}}{\sqrt{(cc'c'' \ldots c^{\mu-2})}},$$

on déduit de là

$$\psi(\mu+1)-\psi(\mu)=\frac{2^{\mu+1}c^{\mu+1}\sin\varphi^{\mu+1}}{\sqrt{(cc'c''\ldots c^{\mu})}}-\frac{2^{\mu}c^{\mu}\sin\varphi^{\mu}}{\sqrt{(cc'\ldots c^{\mu-1})}}-\frac{2^{\mu}\sin\varphi^{\mu}}{\sqrt{(cc'\ldots c^{\mu-1})}}$$
$$=\frac{2^{\mu+1}}{\sqrt{(cc'c''\ldots c^{\mu})}}\left(c^{\mu+1}\sin\varphi^{\mu+1}-\frac{c^{\mu}}{c^{\mu+1}}\sin\varphi^{\mu}\right).$$

Or lorsque b^{μ} est devenu très petit, l'équation entre φ^{μ} et $\varphi^{\mu+1}$, qui est $\tang(\varphi^{\mu}-\varphi^{\mu+1})=b^{\mu+1}\tang\varphi^{\mu+1}$, donne à très peu près $\varphi^{\mu}=\varphi^{\mu+1}+b^{\mu+1}\tang\varphi^{\mu+1}$, ou $\sin\varphi^{\mu}=(1+b^{\mu+1})\sin\varphi^{\mu+1}$. Donc $c^{\mu+1}\sin\varphi^{\mu+1}-\frac{c^{\mu}}{c^{\mu+1}}\sin\varphi^{\mu}=\frac{b^{\mu+1}}{c^{\mu+1}}(1-b^{\mu+1})\sin\varphi^{\mu+1}$. Cette quantité est de l'ordre $b^{\mu+1}$, et par conséquent négligeable, donc on aura pour exprimer $\psi(\mu)$, cette suite convergente :

$$\psi(\mu)=c\sin\varphi+\frac{2}{\sqrt{c}}\left(c'\sin\varphi'-\frac{c}{c'}\sin\varphi\right)$$
$$+\frac{4}{\sqrt{cc'}}\left(c''\sin\varphi''-\frac{c'}{c''}\sin\varphi'\right)$$
$$+\frac{8}{\sqrt{cc'c''}}\left(c'''\sin\varphi'''-\frac{c''}{c'''}\sin\varphi''\right)$$
$$\vdots$$
$$+\frac{2^{\mu}}{\sqrt{(cc'\ldots c^{\mu-1})}}\left(c^{\mu}\sin\varphi^{\mu}-\frac{c^{\mu-1}}{c^{\mu}}\sin\varphi^{\mu-1}\right).$$

Et la valeur de G, exprimée tout entière en suites convergentes, sera

$$G=K'L^{\mu}\log\tang(45^{\circ}+\tfrac{1}{2}\varphi^{\mu})-\frac{B}{c}\psi(\mu).$$

Il ne faut pas perdre de vue que cette approximation est fondée sur ce que, dans la valeur de G^{μ}, on a substitué $\cos\varphi^{\mu}$ au radical Δ^{μ} dont la vraie valeur est $\sqrt{[\cos^2\varphi^{\mu}+(b^{\mu}\sin\varphi^{\mu})^2]}$. Cette substitution est permise tant que $(b^{\mu}\tang\varphi^{\mu})^2$ est une quantité négligeable; mais elle ne pourrait plus avoir lieu si φ^{μ} était assez près de 90°, pour que $b^{\mu}\tang\varphi^{\mu}$ cessât d'être très petit. Supposons, ce qui est le cas le plus défavorable, qu'on ait $\varphi^{\mu}=90^{\circ}$; alors il faudra prolonger les suites d'un terme de plus, ou jusqu'au $(\mu+1)^{\text{ième}}$ terme, ce qui donnera $\tang\varphi^{\mu+1}=\frac{1}{\sqrt{(b^{\mu+1})}}$ ou $b^{\mu+1}\tang\varphi^{\mu+1}=\sqrt{(b^{\mu+1})}$, quantité dont le quarré $b^{\mu+1}$ est très négligeable par rapport à l'unité, puisque $(b^{\mu})^2$ était déjà supposé négligeable. La formule s'appliquera donc sans

aucune difficulté; ainsi le moyen de prévenir toute exception, est de prendre μ assez grand pour que $\varphi^{\mu-1}$ ne surpasse pas 90°, condition qui sera toujours facile à remplir.

Pour avoir la valeur de la fonction complète G^1, on pourrait faire $\varphi=90°$ dans la formule générale; mais cette formule ne se simplifierait pas sensiblement, et elle contiendrait toujours un nombre de termes indéfini. Il sera plus simple, en se conformant à l'observation précédente, de faire $\varphi^{\mu-1}=90°$, ce qui donne $\tang\varphi^{\mu}=\frac{1}{\sqrt{b^{\mu}}}$, $\sin\varphi^{\mu}=\frac{1}{\sqrt{(1+b^{\mu})}}$, et en rétrogradant, $\varphi^{\mu-2}=\pi$, $\varphi^{\mu-3}=2\pi\ldots\varphi^{\mu-i}=2^{i-2}\pi$, $\varphi'=2^{\mu-3}\pi$, $\varphi=2^{\mu-2}\pi=2^{\mu-1}\frac{\pi}{2}$. On aura donc $G(\varphi)=2^{\mu-1}G^1$; mais dans l'hypothèse que $(b^{\mu})^2$ est de l'ordre des quantités négligeables, on a $\sin\varphi^{\mu}=1-\frac{1}{2}b^{\mu}$, et $\log\tang(45°+\frac{1}{2}\varphi^{\mu})=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin\varphi^{\mu}}{1-\sin\varphi^{\mu}}\right)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{4}{b^{\mu}}\right)$; on aura en même temps la quantité $\psi(\mu)=\frac{2^{\mu}c^{\mu}}{cK'}\sin\varphi^{\mu}-\frac{2^{\mu-1}\sqrt{(c^{\mu-1})}}{cK'}=\frac{2^{\mu-1}}{cK'}$; donc

$$2^{\mu-1}G^1=\frac{K'L^{\mu}}{2}\log\left(\frac{4}{b^{\mu}}\right)-\frac{2^{\mu-1}B}{c^2K'},$$

et enfin

$$G^1=\frac{K'L^{\mu}}{2^{\mu}}\log\left(\frac{4}{b^{\mu}}\right)-\frac{B}{c^2K'}.$$

Ces formules pour déterminer tant la fonction indéfinie G que la fonction complète G^1, permettent de pousser l'approximation aussi loin qu'on voudra. Il faudra prolonger le calcul des modules croissans c', c'', c''', etc., et celui de leurs complémens b', $b''\ldots b^{\mu}$, jusqu'à ce que $b^{\mu+1}$ appartienne à l'ordre de décimales qu'on veut négliger, ou à un ordre ultérieur. Il faudra en même temps, s'il s'agit de la fonction non complète G, ne pas donner à φ une valeur plus grande que $2^{\mu-2}\pi$. On calculera alors jusqu'à la même limite les valeurs de K', L^{μ} et $\psi(\mu)$.

90. Pour appliquer ces formules aux arcs d'ellipse ou aux fonctions proprement dites de la seconde espèce, soit $G=E=\int\Delta d\varphi$, on aura $A=1$, $B=-c^2$.

Par la première méthode, l'expression de l'arc indéfini sera

$$E(c,\varphi)=KL\Phi+\frac{c\sqrt{c^{\circ}}}{2}\sin\varphi^{\circ}+\frac{c\sqrt{c^{\circ}c^{\circ\circ}}}{4}\sin\varphi^{\circ\circ}+\frac{c\sqrt{c^{\circ}c^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ}}}{8}\sin\varphi^{\circ\circ\circ}+\text{etc.}$$

Et celle du quart d'ellipse

$$E^{1}(c) = KL\frac{\pi}{2}.$$

Dans ces formules, K représente le produit $(1+c^{0})(1+c^{00})(1+c^{000})$, etc., continué jusqu'à un facteur $1+c^{\mu}$ où c^{μ} soit de l'ordre des quantités négligeables. Cette même quantité peut se mettre sous la forme..... $K = \sqrt{\left(\frac{1}{b}\,.\,b^{0}b^{00}b^{000}\ldots\right)}$ etc., plus commode pour le calcul logarithmique. Enfin la quantité L est donnée par la suite convergente

$$L = 1 - \frac{c^{2}}{2} - \frac{c^{2}c^{0}}{4} - \frac{c^{2}c^{0}c^{00}}{8} - \text{etc.},$$

à laquelle on peut donner cette autre forme

$$L = \frac{c^{2}}{4c^{0}}\left(1 - \frac{c^{02}c^{00}}{2} - \frac{c^{02}c^{00}c^{000}}{4} - \frac{c^{02}c^{00}c^{000}c^{0000}}{8} - \text{etc.}\right),$$

au moyen de la substitution

$$1 - \frac{c^{2}}{2} - \frac{c^{2}c^{0}}{4} = \frac{c^{2}}{4c^{0}}.$$

Ces formules offrent les suites les plus convergentes qu'on puisse désirer pour la rectification de l'ellipse. Elles s'appliquent, comme nous l'avons déjà dit, non-seulement à des valeurs de c plus petites que $\sqrt{\frac{1}{2}}$, mais à des valeurs beaucoup plus grandes et très rapprochées de l'unité.

EXEMPLE.

91. Soit proposé de trouver l'arc $E(c, \varphi)$ lorsque $c = \sin 75^{\circ}$ et $\tang \varphi = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$.

Par les valeurs déjà calculées (art. 73), on a $\log K = 0.2460561$, $\Phi = 30^{\circ}$, $\varphi^{0} = 62^{\circ}36'3''10$, $\varphi^{00} = 119^{\circ}55'47''67$, $\varphi^{000} = 240^{\circ}0'0''19$, ensuite on trouvera

$$\begin{aligned}
L &= 0.3888658,\\
\frac{c\sqrt{c^{0}}}{2}\sin\varphi^{0} &= 0.3290186,\\
\frac{c\sqrt{c^{0}c^{00}}}{4}\sin\varphi^{00} &= 0.0522872,\\
\frac{c\sqrt{c^{0}c^{00}c^{000}}}{8}\sin\varphi^{000} &= -0.0013888,\\
\frac{c\sqrt{c^{0}c^{00}c^{000}c^{0000}}}{16}\sin\varphi^{0000} &= 0.0000010.
\end{aligned}$$

La somme des parties algébriques est 0.3799180, ainsi on a $E(c, \varphi) = \ldots$ $KL.\frac{\pi}{6} + 0.3799180$; on aura en même temps la fonction complète $E^1(c) = KL.\frac{\pi}{2}$, d'où résulterait $E(c, \varphi) = \frac{1}{3}E^1(c) + 0.3799180$. Mais puisque l'arc $E(c,\varphi)$ se mesure par le tiers de $E^1(c)$, on trouvera par les formules de la trisection (art. 60), $E(c,\varphi) = \frac{1}{3}E^1(c) + \frac{c^2 \cos^3 \varphi}{3b}$; le résultat précédent s'accorde parfaitement avec cette formule, car on a en effet $\frac{c^2 \cos^3 \phi}{3b} = 0.3799179$.

Le même calcul donne de plus $\log E^1(c) = 0.0319757$ et $E^1(c) = \ldots$ 1.0764049; donc dans le cas proposé, l'arc $E(c,\varphi) = 0.7387196$; et on voit que la partie déterminée algébriquement, forme plus de la moitié de l'arc. Au reste la valeur trouvée de $E^1(c)$ s'accorde avec celle qu'on déduirait de la formule de l'article 44, en y mettant pour $F^1(\varrho)$ sa valeur trouvée article 70.

92. Si le module c est assez peu différent de l'unité pour qu'on juge nécessaire d'appliquer la seconde méthode, il faudra, dans les formules de l'art. 89, faire $A = 1$, $B = -c^2$, ce qui donnera

$$L^\mu = b^2 - bc\left[\sqrt{b'} + \sqrt{\left(\frac{b'b''}{c}\right)} + \sqrt{\left(\frac{b'b''b'''}{cc'}\right)} \ldots + \sqrt{\left(\frac{b''b''\ldots b^\mu}{cc'\ldots b^{\mu-2}}\right)}\right].$$

ou plus simplement, parce que $b\sqrt{b'} = 1 - a$,

$$L^\mu = b\sqrt{b'}\left[1 - \sqrt{(cb'')} - \sqrt{\left(\frac{cb''b'''}{c'}\right)} - \sqrt{\left(\frac{cb''b'''b''''}{c'c''}\right)} - \text{etc.}\right].$$

Quant à la valeur de K' et à celle de la fonction $\psi(\mu)$, elles ne dépendent point des valeurs de A et de B; ainsi elles restent les mêmes que dans l'article cité. On aura donc, d'après ces valeurs, la fonction indéfinie

$$E(c, \varphi) = K'L^\mu \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi') + c\psi(\mu),$$

et la fonction complète

$$E^1(c) = \frac{K'L^\mu}{2^\mu} \log.\frac{4}{b^\mu} + \frac{1}{K'}.$$

Ces formules pour le calcul des arcs d'ellipse, lorsque le module diffère peu de l'unité, supposent qu'on prend μ assez grand pour que $(b^\mu)^2$ appartienne à l'ordre de décimales qu'on veut négliger, ce qui permet de faire $c^\mu = 1$.

Si on veut avoir les valeurs de $E(c, \varphi)$ et de E^1c approchées seulement jus-

qu'au septième ordre de décimales, il suffira de faire $\mu = 2$ dans les formules précédentes; ce qui donnera $K' = \sqrt{\frac{c'}{c}}$, et parce qu'on a $b'\sqrt{b''} = 1 - c'$, $c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, on trouvera $L^{\mu} = b\sqrt{b'}(1 - \sqrt{(cb'')}) = \frac{b^2}{1+\sqrt{c}} = \frac{b^2}{\sqrt{(1+c)}\cdot\sqrt{(1+c')}}$ $= \frac{1}{2} b^2 \sqrt{\left(\frac{c'c''}{\sqrt{(cc')}}\right)}$, ou enfin $L^{\mu} = \frac{b^2}{2}\sqrt{K'}$. Réduisant ensuite la partie algébrique, ou revenant à la forme primitive de $c\psi(\mu)$, on aura les formules

$$E(c, \varphi) = \tfrac{1}{2} b^2 (K')^{\frac{3}{2}} \log \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi'') - c \sin\varphi - 2\sqrt{c}\sin\varphi' + \frac{4}{K'}\sin\varphi'',$$

$$E^1 c = \frac{b^2}{8}(K')^{\frac{3}{2}} \log \frac{4}{b^2} + \frac{1}{K'}.$$

La dernière est la même que $E^1 c = \frac{1}{2} b^2 (K')^{\frac{1}{2}} F^1 c + \frac{1}{K'}$, et sous cette forme elle offre une relation assez simple entre les fonctions complètes $E^1 c$, $F^1 c$, relation d'autant plus approchée que b'' sera plus petit.

93. Appliquons ces formules à l'exemple de l'art. 91, ce qui est un cas peu favorable puisque la valeur de c est assez éloignée de l'unité. On connaît déjà dans cet exemple les valeurs de c', b', b'', ainsi que celles des amplitudes φ, φ', φ''. Au moyen de ces valeurs le calcul de la fonction $E(c, \varphi)$ se fera ainsi :

$$\text{I}^{re}\text{ partie}\quad \tfrac{1}{2} b^2 (K')^{\frac{3}{2}} \log.\operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi''),\quad \text{ou}\quad \tfrac{1}{2} b^2 (K')^{\frac{1}{2}} F(c, \varphi),$$

$\sqrt{K'}\ldots$	0.0037477 5
$\frac{1}{2} b^2\ldots$	8.5249624
$F(c, \varphi)\ldots$	9.9650547
(I)	8.4937648 5.

La seconde partie, toute algébrique, est composée de trois termes dont voici les valeurs :

$\frac{4}{K'}\sin\varphi'' =$	2.8293085,	(I) =	0.0311720,
$2\sqrt{c}\sin\varphi'\ldots$	— 1.4146540,	(II) =	0.7075475,
$c\sin\varphi\ldots$	— 0.7071070.	$E(c, \varphi) =$	0.7387195.
(II)	0.7075475.		

Ce résultat s'accorde avec celui que nous avons déjà trouvé, et on voit que la partie transcendante contenue dans la fonction $E(c, \varphi)$ est environ 24 fois moindre que la partie algébrique.

On trouverait également que la fonction complète $E'c$ est égale à 1.0764052, comme nous l'avons trouvée par la méthode des modules décroissans.

94. Pour appliquer les formules générales à la rectification de l'hyperbole, il ne s'agit que d'évaluer l'intégrale $G = \int \frac{c^2\, d\varphi \cos^2\varphi}{\Delta}$ qui représente la quantité $\Delta \tang \varphi - \Upsilon$, différence entre l'arc d'hyperbole compté du sommet et sa tangente terminée à l'axe transverse. Or en faisant dans la formule de l'art. 88, $A = c^2$, $B = -c^2$, on a la fonction indéfinie

$$G(c,\varphi) = \tfrac{1}{2} K c^2 \Phi\left(1 - \frac{c^0}{2} - \frac{c^0 c^{00}}{4} - \frac{c^0 c^{00} c^{000}}{8} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{c\sqrt{c^0}}{2} \sin\varphi^0 + \frac{c\sqrt{(c^0 c^{00})}}{4} \sin\varphi^{00} + \frac{c\sqrt{(c^0 c^{00} c^{000})}}{8} \sin\varphi^{000} + \text{etc.},$$

et la fonction définie

$$G'c = Kc^2 . \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{c^0}{2} - \frac{c^0 c^{00}}{4} - \frac{c^0 c^{00} c^{000}}{8} - \text{etc.}\right).$$

Celle-ci est la différence entre l'asymptote et la courbe, laquelle s'exprime ainsi très simplement par une suite fort convergente.

Lorsque l'hyperbole est équilatère, la quantité $G'c$, qui en général a pour valeur $E'c - b^2 F'c$, se réduit à $E'c - \frac{1}{2} F'c$. Mais comme dans le cas particulier où $c^2 = \frac{1}{2} = b^2$, on a $\frac{\pi}{2} = (2E' - F')F'$, la valeur de G' se réduira ultérieurement à $\frac{\frac{1}{2}\pi}{F'}$, et parce que $F' = \frac{1}{2}\pi K$, on aura encore plus simplement $G' = \frac{1}{2K}$ et $\log G' = 9.6269626$.

On peut regarder comme applicable à tous les cas, la formule $\Upsilon = \ldots \Delta \tang \varphi - G(c, \varphi)$; cependant, si c était extrêmement près de l'unité, on pourrait pour déterminer G, faire usage des formules de l'art. 89, après avoir fait $A = c^2$ et $B = -c^2$.

CHAPITRE XXII.

Méthode d'approximation appliquée aux fonctions elliptiques de la troisième espèce.

95. Au lieu de considérer la simple formule $\Pi = \int \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)\,\Delta}$ qui appartient à la troisième espèce, nous considérerons plus généralement la formule

$$H = \int \left(A + \frac{B \sin^2 \varphi}{1 + n \sin^2 \varphi}\right) \frac{d\varphi}{\Delta},$$

qui est composée d'une fonction de la troisième espèce et d'une de la première, affectées de coefficiens constans. Si on appliquait le calcul à la simple fonction Π, la première transformée contiendrait une partie affectée de la fonction de première espèce $F(c^\circ, \varphi^\circ)$; c'est pourquoi il convient, pour l'uniformité des résultats, d'admettre les deux sortes de fonctions dans la formule primitive, ainsi que nous l'avons déjà fait pour les fonctions G (art. 88).

Cela posé, si on fait $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + c^\circ \sin^2 \varphi^\circ - \Delta^\circ \cos \varphi^\circ)$, et $\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{1 + c^6}{2} \cdot \frac{d\varphi^\circ}{\Delta^\circ}$, on aura pour première transformée

$$H = \frac{1 + c^6}{2}\left[H^\circ - \frac{\frac{1}{2} B}{1 + n} \int \frac{d\varphi^\circ \cos \varphi^\circ}{1 + n^\circ \sin^2 \varphi^\circ}\right],$$

les valeurs de H° et de ses coefficiens étant

$$H^\circ = \int \left(A^\circ + \frac{B^\circ \sin^2 \varphi^\circ}{1 + n^\circ \sin^2 \varphi^\circ}\right) \frac{d\varphi^\circ}{\Delta^\circ},$$

$$n^\circ = \frac{n(n + c^2)}{(1 + b)^2 (1 + n)},$$

$$A^\circ = A + \frac{\frac{1}{2} B}{1 + n},$$

$$B^\circ = B \cdot \frac{c^2 + 2n + n^2}{2(1 + b)^2 (1 + n)^2}.$$

Ainsi la fonction $H(n, c, \varphi)$ est ramenée à une fonction semblable $H(n^\circ, c^\circ, \varphi^\circ)$,

dans laquelle les trois élémens n, c, φ ont subi des changemens propres à faciliter les approximations.

La même loi aura lieu dans les transformées ultérieures; de sorte qu'en faisant

$$H^{oo} = \int \left(A^{oo} + \frac{B^{oo} \sin^2 \varphi^{oo}}{1 + n^{oo} \sin^2 \varphi^{oo}}\right) \frac{d\varphi^{oo}}{\Delta^{oo}},$$

$$n^{oo} = \frac{n^o (n^o + c^{o2})}{(1 + b^o)^2 (1 + n^o)},$$

$$A^{oo} = A^o + \frac{\frac{1}{2} B^o}{1 + n^o},$$

$$B^{oo} = B^o \cdot \frac{c^{o2} + 2n^o + n^{o2}}{2(1 + b^o)^2 (1 + n^o)^2},$$

on aura la seconde transformée

$$H^o = \frac{1 + c^{oo}}{2} \left[H^{oo} - \frac{\frac{1}{2} B^o}{1 + n^o} \int \frac{d\varphi^{oo} \cos \varphi^{oo}}{1 + n^{oo} \sin^2 \varphi^{oo}} \right].$$

On peut continuer indéfiniment ces transformations, d'où résulteront une suite infinie de fonctions $H(n, c, \varphi)$, $H(n^o, c^o, \varphi^o)$, $H(n^{oo}, c^{oo}, \varphi^{oo})$, etc., telles, qu'une seule étant connue, on pourra déterminer toutes les autres.

96. Examinons d'abord avec quelque détail la loi de progression des paramètres n^o, n^{oo}, etc. Si on fait $n = mc$, et semblablement $n^o = m^o c^o$, l'équation qui détermine n^o donnera $m^o = \frac{m(m+c)}{1 + mc}$. Mais on peut toujours supposer le paramètre $n < c$, ce qui donne $m < 1$; on aura donc aussi... $m^o < 1$, et même $m^o < m$; car de la valeur précédente on déduit..... $1 + \frac{m^o}{m} = \frac{(1+c)(1+m)}{1+cm}$, $1 - \frac{m^o}{m} = \frac{(1-c)(1-m)}{1+cm}$, ce qui prouve que $\frac{m^o}{m}$, positif ou négatif, est toujours plus petit que l'unité. Donc les termes m, m^o, m^{oo}, etc., sont tous plus petits que l'unité et forment une suite décroissante; et par conséquent la suite des paramètres n, n^o, n^{oo}, etc., décroît plus rapidement que la suite des modules c, c^o, c^{oo}, etc., chaque terme de la première étant plus petit que le terme correspondant de la seconde.

A l'égard des signes de ces paramètres, il y a deux cas à considérer. 1°. Si n est positif ou si n est négatif et plus grand que c^2, ensorte qu'il soit compris dans la forme $-1 + b^2 \sin^2 \theta$, alors n^o sera positif, et il en sera de même de tous les paramètres suivans n^{oo}, n^{ooo}, etc. Dans ce premier cas se trouve compris celui de $n = \pm c$ qui donnera $n^o = c^o$, $n^{oo} = c^{oo}$, etc.; mais ce cas est inutile à considérer, parce que d'après l'art. 49, la fonction H se réduit alors à la première espèce.

2°. Si n est négatif et plus petit que c^2, ensorte qu'on ait $n = -c^2 \sin^2 \theta$

on pourra faire semblablement $n^0 = -c^{0\,2}\sin^2\theta^0$, et l'angle θ^0 se déterminera par l'équation

$$\tang(\theta^0 - \theta) = b\tang\theta,$$

ce qui est la même loi suivant laquelle l'amplitude φ^0 se déduit de φ.

Calculant donc successivement θ^0, θ^{00}, θ^{000}, etc., d'après cette loi, on formera la suite des paramètres $n^0 = -c^{0\,2}\sin^2\theta^0$, $n^{00} = -c^{00\,2}\sin^2\theta^{00}$, etc., qui décroît, comme on voit, avec encore plus de rapidité que dans le premier cas.

Connaissant ainsi la loi de progression des paramètres n, venons à celle des coefficiens A et B dans les transformées successives. Soit, pour abréger,

$$k = \frac{c^2 + 2n + n^2}{(1+b)^2(1+n)^2} = \frac{(1+n)^2 - b^2}{(1+b)^2(1+n)^2};$$

et soit désignée par k^0 une quantité composée de c^0, b^0, n^0, comme k l'est de c, b, n, et ainsi de suite, on aura

$$B^0 = \tfrac{1}{2}kB,\quad B^{00} = \tfrac{1}{4}kk^0B,\quad B^{000} = \tfrac{1}{8}kk^0k^{00}B,\ \text{etc.}$$

Mais puisqu'après un certain nombre μ de termes, les c^μ et n^μ pris dans les suites c^0, c^{00}, etc., n^0, n^{00}, etc., sont assez petits pour être regardés comme nuls, il est clair qu'il en sera de même du terme correspondant k^μ de la suite k, k^0, k^{00}, etc., et qu'ainsi on peut faire en toute sureté $B^\mu = 0$. Quant à la valeur de A^μ, elle sera donnée par la suite

$$A^\mu = A + \frac{\frac{1}{2}B}{1+n} + \frac{\frac{1}{4}kB}{1+n^0} + \frac{\frac{1}{8}kk^0B}{1+n^{00}} + \text{etc.},$$

qu'il faudra prolonger jusqu'au terme qui contiendrait k^μ exclusivement.

Appelons toujours Φ la limite des angles φ, $\frac{\varphi^0}{2}$, $\frac{\varphi^{00}}{4}$, etc., cette limite étant censée atteinte après le nombre de termes μ, on aura $\varphi^\mu = 2^\mu\Phi$, et parce que c^μ est de l'ordre des quantités négligeables, on aura $H^\mu = 2^\mu A^\mu\Phi$.

97. Il est facile maintenant d'avoir le résultat des transformées successives jusqu'à la $\mu^{ième}$ inclusivement. Soit toujours

$$K^\mu = (1+c^0)(1+c^{00})\ldots(1+c^\mu),\ \text{ou}\ K^\mu = \frac{2\sqrt{c^0}}{c}\cdot\frac{2\sqrt{c^{00}}}{c^0}\cdot\frac{2\sqrt{c^{000}}}{c^{00}}\cdot\text{etc.},$$

la valeur de la fonction H sera donnée en général par la formule

$$H = K^{\mu} A^{\mu} \Phi - \frac{\sqrt{c^{\circ}}}{c} \cdot \frac{\frac{1}{2} B}{1+n} \cdot \frac{\text{arc tang}(\sqrt{n^{\circ}} \sin \varphi^{\circ})}{\sqrt{n^{\circ}}}$$
$$- \frac{\sqrt{c^{\circ}}}{c} \cdot \frac{\sqrt{c^{\circ\circ}}}{c^{\circ}} \cdot \frac{\frac{1}{4} kB}{1+n^{\circ}} \cdot \frac{\text{arc tang}(\sqrt{n^{\circ\circ}} \sin \varphi^{\circ\circ})}{\sqrt{n^{\circ\circ}}}$$
$$- \frac{\sqrt{c^{\circ}}}{c} \cdot \frac{\sqrt{c^{\circ\circ}}}{c^{\circ}} \cdot \frac{\sqrt{c^{\circ\circ\circ}}}{c^{\circ\circ}} \cdot \frac{\frac{1}{8} kk^{\circ} B}{1+n^{\circ\circ}} \cdot \frac{\text{arc tang}(\sqrt{n^{\circ\circ\circ}} \sin \varphi^{\circ\circ\circ})}{\sqrt{n^{\circ\circ\circ}}}$$
$$- \text{etc.}$$

Cette suite étant prolongée jusqu'au terme dont le rang est μ inclusivement, l'erreur de la formule, mesurée par les termes suivans, ne pourra être que de l'ordre $c^{\mu+1}$; de sorte que si on ne veut pousser la précision que jusqu'aux quantités de l'ordre c^{μ}, on aura un terme de moins à calculer, tant dans la suite précédente que dans la valeur de K^{μ} et dans celle de A^{μ}.

Au reste les arcs de cercle qui entrent dans la formule générale se changeraient en logarithmes, si n était de la forme $-c^2 \sin^2 \theta$; mais ce changement n'est sujet à aucune difficulté.

Lorsque $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ou $=$ un multiple de $\frac{1}{2}\pi$, tous les arcs de cercle disparaissent, et on a simplement $H = KA^{\mu}\Phi$. Donc la valeur de la fonction complète est

$$H' = KA^{\mu} . \tfrac{1}{2}\pi.$$

Remarquez que la valeur de H exprimée par les transformées successives, se terminerait d'elle-même, si on avait l'une des égalités $n = -1 + b$, $n^{\circ} = -1 + b^{\circ}$, $n^{\circ\circ} = -1 + b^{\circ\circ}$, etc. : alors la fonction H se ramènerait indéfiniment à la première espèce.

Pour qu'on ait en général $-1 + b^{\mu} = n^{\mu} = -(c^{\mu} \sin \theta^{\mu})^2$, il faut que $\cot \theta^{\mu} = \sqrt{b^{\mu}}$, ou qu'on ait $F(c^{\mu}, \theta^{\mu}) = \frac{1}{2} F^1(c^{\mu})$. Mais les paramètres successifs $n = -c^2 \sin^2 \theta$, $n^{\circ} = -c^{\circ 2} \sin^2 \theta^{\circ}$, $n^{\circ\circ} = -c^{\circ\circ 2} \sin^2 \theta^{\circ\circ}$, etc., étant formés d'après la même loi qui lie entre elles les amplitudes θ, θ°, $\theta^{\circ\circ}$, etc., on a $F(c, \theta) = \frac{1 + c^{\circ}}{2} F(c^{\circ}, \theta^{\circ})$, $F(c^{\circ}, \theta^{\circ}) = \frac{1 + c^{\circ\circ}}{2} F(c^{\circ\circ}, \theta^{\circ\circ})$, etc.; et en général $F(c, \theta) = \frac{(1 + c^{\circ})(1 + c^{\circ\circ}) \ldots (1 + c^{\mu})}{2^{\mu}} F(c^{\mu}, \theta^{\mu}) = \frac{1}{2^{\mu+1}} F^1(c)$. Les cas qui donnent lieu à la réduction de la fonction H, sont donc tous ceux où le paramètre n, de forme $-c^2 \sin^2 \theta$, est tel qu'on a $F(c, \theta) = \frac{1}{2^{\mu+1}} F^1(c)$, μ étant un entier. La même réduction aurait encore lieu si on avait $F(c, \theta) = \frac{2\nu + 1}{2^{\mu+1}} F^1(c)$, $2\nu + 1$ étant un nombre impair quelconque.

Les formules d'approximation que nous venons de donner pour déterminer la valeur des fonctions H et H', peuvent s'appliquer à tous les cas, et le plus souvent il ne faudra calculer que fort peu de termes pour obtenir un grand degré de précision. Cependant si la différence $1 - c$ était tellement petite qu'il fallût prolonger assez loin la suite c°, $c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$, etc. pour parvenir à un terme négligeable c^{μ}, il pourrait être préférable de suivre la seconde méthode, c'est-à-dire, de faire les transformations dans un ordre inverse, ainsi que nous l'avons pratiqué en pareil cas relativement aux fonctions de la première et de la seconde espèce.

98. Et d'abord si la différence $1 - c$ est déjà assez petite pour qu'elle puisse être négligée, on pourra intégrer immédiatement la formule $H = \int \left(A + \frac{B \sin^2 \varphi}{1 + n \sin^2 \varphi}\right) \frac{d\varphi}{\Delta}$, en mettant $\cos \varphi$ au lieu de Δ, ce qui donnera

$$H = \left(A + \frac{B}{1+n}\right) \log \operatorname{tang}\left(45^{\circ} + \tfrac{1}{2}\varphi\right) - \frac{B}{1+n} \cdot \frac{\operatorname{arc\,tang}(\sqrt{n} \sin \varphi)}{\sqrt{n}}.$$

Cette intégrale est rigoureuse lorsque $c = 1$; mais s'il y a une différence, quelque petite qu'elle soit, entre 1 et c, elle ne pourra s'appliquer sans erreur à des valeurs de φ plus grandes qu'une certaine limite. En effet, la quantité Δ qui en général est $\sqrt{(\cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)}$, ne se réduit à $\cos \varphi$ que lorsque $\cot \varphi$ est censé beaucoup plus grand que b. C'est pourquoi il convient de chercher une formule qui donne la valeur de H pour toute valeur de φ, dans l'hypothèse seulement qu'on puisse négliger les termes affectés du facteur b élevé au quarré ou à une puissance supérieure.

Pour cet effet nous supposerons qu'il a été fait dans la fonction H une préparation relative au paramètre, de manière que n soit positif et plus petit que c, ou négatif et de la forme $-c^2 \sin^2 \theta$, ce qui se fera par les formules (f') et (g') du chap. XV.

Cela posé, pour avoir la valeur de la fonction H, je la mets sous la forme

$$H = \left(A + \frac{B}{1+n}\right) F(c, \varphi) - \frac{B}{1+n} P,$$

et il restera à déterminer P par la formule

$$P = \int \frac{d\varphi \cos^2 \varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)\Delta}.$$

J'observe ensuite qu'on a $\frac{\cos \varphi}{\Delta} = 1 - \frac{b^2 \sin^2 \varphi}{\Delta(\cos \varphi + \Delta)}$; donc si on fait

$$Q = \int \frac{2 d\varphi \cos \varphi \sin^2 \varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)\Delta(\cos \varphi + \Delta)},$$

on aura

$$P = \frac{\text{arc tang}(\sqrt{n}\sin\varphi)}{\sqrt{n}} - \tfrac{1}{2}b^2 Q.$$

Tout se réduit donc à trouver une valeur approchée de l'intégrale Q. Pour cet effet, j'observe qu'on a $\cos\varphi + \Delta < 2\Delta$, et $\cos\varphi + \Delta > 2\cos\varphi$; donc si on fait

$$Q' = \int \frac{d\varphi \sin^2\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\Delta},$$

$$Q'' = \int \frac{d\varphi \cos\varphi \sin^2\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)(1 - c^2\sin^2\varphi)},$$

on aura $Q < Q'$ et $Q > Q''$. Or en premier lieu, la combinaison des intégrales P et Q′ donne $(1 + n)Q' + P = \int \frac{d\varphi}{\Delta}$, d'où résulte $Q' = \frac{F(c, \varphi) - P}{1 + n}$, donc on a

$$P > \frac{\text{arc tang}(\sqrt{n}\sin\varphi)}{\sqrt{n}} - \frac{\frac{1}{2}b^2}{1+n} F(c, \varphi) + \frac{\frac{1}{2}b^2}{1+n} P,$$

ou

$$P > \left(1 + \frac{\frac{1}{2}b^2}{1+n}\right)\frac{\text{arc tang}(\sqrt{n}\sin\varphi)}{\sqrt{n}} - \frac{\frac{1}{2}b^2}{1+n} F(c, \varphi).$$

On trouve ensuite par l'intégration directe,

$$(c^2 + n)Q'' = \frac{1}{2c}\log\left(\frac{1 + c\sin\varphi}{1 - c\sin\varphi}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}}\text{arc tang}(\sqrt{n}\sin\varphi);$$

ou en rejetant les quantités de l'ordre b^2 qui n'en produiraient que de l'ordre b^4 dans P,

$$(1 + n)Q'' = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1 + c\sin\varphi}{1 - c\sin\varphi}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}}\text{arc tang}(\sqrt{n}\sin\varphi);$$

donc on a

$$P < \left(1 + \frac{\frac{1}{2}b^2}{1+n}\right)\frac{\text{arc tang}(\sqrt{n}\sin\varphi)}{\sqrt{n}} - \frac{\frac{1}{4}b^2}{1+n}\log\left(\frac{1 + c\sin\varphi}{1 - c\sin\varphi}\right).$$

La plus grande différence entre ces deux limites de P a lieu lorsque $\varphi = 90°$, et comme on a dans ce cas $F^1(c) = \log\frac{4}{b}$, $\log\left(\frac{1+c}{1-c}\right) = 2\log\frac{2}{b}$, cette différence $= \frac{b^2}{1+n}\cdot\frac{1}{2}\log 2$. Elle est, comme on voit, de l'ordre des quantités qu'on veut négliger. Ainsi on a avec une exactitude suffisante,

$$P = \frac{1}{\sqrt{n}}\text{arc tang}(\sqrt{n}\sin\varphi) - \frac{\frac{1}{2}b^2}{1+n} F(c, \varphi),$$

ce qui donne la fonction cherchée

$$H = \left(A + \frac{B}{c+n}\right)F(c, \varphi) - \frac{B}{1+n}\cdot\frac{\text{arc tang}(\sqrt{n}\sin\varphi)}{\sqrt{n}};$$

et il en résulte pour la fonction complète,

$$H^1 = \left(A + \frac{B}{c+n}\right)(1 + \tfrac{1}{4}b^2)\log\frac{4}{b} - \frac{B}{1+n}\cdot\frac{\text{arc tang}(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}.$$

Ces valeurs de H et de H^1 sont celles qu'il convient d'employer si les quantités de l'ordre b^2 sont négligeables, et alors il n'y a pas lieu de recourir aux transformations ; mais il convient d'examiner particulièrement le cas où n est négatif.

Le cas de $n = -1 + b^2 \sin^2\theta$, où $n + 1$ serait de l'ordre b^2, ne permet pas qu'on lui applique avec succès les formules précédentes, c'est pourquoi nous l'avons évité par une transformation qui rend n positif.

Le cas de $n = -c^2 \sin^2\theta$ ne souffre aucune difficulté, si θ n'est pas trop près de 90°, parce qu'alors $\frac{b^2}{1+n}$ reste une quantité très petite ; seulement dans ce cas, il faut changer l'expression $\frac{\text{arc tang}(\sqrt{n}\sin\varphi)}{\sqrt{n}}$ en celle-ci..... $\frac{1}{2c\sin\theta}\log\left(\frac{1 + c\sin\theta\sin\varphi}{1 - c\sin\theta\sin\varphi}\right)$. Mais si en même temps θ est très près de 90°, le dénominateur $1 + n$ équivalant à $b^2 + c^2\cos^2\theta$, devient très petit ; cependant tant que $\cos\theta$ sera beaucoup plus grand que b, la fraction $\frac{b^2}{1+n}$ ou $\frac{b^2}{b^2 + c^2\cos^2\theta}$ demeurera très petite, et la méthode précédente sera applicable ; mais si $\cos\theta$ est une quantité très petite de l'ordre b ou d'un ordre supérieur, la fraction $\frac{b^2}{1+n}$ cesse d'être négligeable. Pour obvier à cet inconvénient, il faut recourir à la formule du n° 55, au moyen de laquelle toute fonction de troisième espèce dont le paramètre $n = -c^2\sin^2\theta$, peut être transformée en une autre fonction dont le paramètre $n' = -c^2\sin^2\lambda$, pourvu qu'entre les angles θ et λ on ait la relation $b \tan\theta \tan\lambda = 1$. Alors on a $\frac{b^2}{1+n}\cdot\frac{b^2}{1+n'} = b^2$, donc des deux facteurs $\frac{b^2}{1+n}$, $\frac{b^2}{1+n'}$, il y en aura toujours un plus petit que b ; d'où il suit qu'à l'aide d'une transformation, si elle est nécessaire, l'erreur de la formule n'excédera pas les quantités de l'ordre b ; et parce que dans le cas le plus défavorable, qui est celui de $1 + n = 1 + n' = b$, la valeur de H^1 devient très grande et se rapporte à l'ordre b^{-1}, ou plus exactement à l'ordre $b^{-1}\log\left(\frac{4}{b}\right)$ qui est très peu différent, il s'ensuit que l'erreur absolue étant de l'ordre b, l'erreur relative est en effet de l'ordre b^2, ainsi que dans les cas où n est positif.

Nous sommes entré dans ces détails pour prouver que lorsque $1 - c$ est assez petit pour être négligeable, les formules trouvées pour H et H^1 peuvent donner une approximation suffisante, sans exiger de transformations autres que celles qui ont été indiquées par les articles 54 et 55. Mais

la méthode que nous allons exposer a l'avantage de donner une approximation indéfinie, qui s'applique généralement à tous les cas.

99. L'équation trouvée n° 95 entre H et H°, s'applique aux deux fonctions consécutives H′ et H, et donne la transformée

$$H = \frac{2}{1+c} H' + \frac{\frac{1}{2} B'}{1+n'} \cdot \int \frac{d\varphi \cos\varphi}{1+n \sin^2\varphi};$$

on aura en même temps

$$H' = \int \left(A' + \frac{B' \sin^2.\varphi'}{1+n' \sin^2\varphi'}\right) \frac{d\varphi'}{\Delta'};$$

et les coefficiens n', A′, B′ devront être déduits des équations

$$n = \frac{n'(n'+c'^2)}{(1+b')^2(1+n')}, \quad B = \frac{B'}{2} \cdot \frac{(1+n')^2 - b'^2}{(1+b')^2(1+n')^2}, \quad A = A' + \frac{\frac{1}{2} B'}{1+n'}.$$

On sait comment se calculent c', b', φ', au moyen de c et φ; il ne s'agit donc que d'examiner la loi de formation des quantités n', A′, B′. Et d'abord pour déduire n' de n, on a la formule

$$n' = \frac{2}{(1+c)^2} \left[n - c + \sqrt{(1+n)(c^2+n)}\right];$$

d'où l'on voit qu'il faut faire abstraction du cas où l'on aurait $n = \ldots\ldots - 1 + b^2 \sin^2\theta$; car si ce cas avait lieu, le paramètre n' deviendrait imaginaire, et on tomberait ainsi dans une difficulté plus grande que celle qu'on veut résoudre. Heureusement il n'y a aucun inconvénient à faire cette exception, puisque par la formule du n° 54, toute fonction proposée de troisième espèce dont le paramètre est de la forme $-1 + b^2 \sin^2\theta$, peut être transformée en une autre dont le paramètre soit positif. Nous pouvons donc nous borner à considérer deux cas principaux, celui où n est positif et celui où n est de la forme $-c^2 \sin^2\theta$. Dans ces deux cas, on peut s'assurer que la valeur de n' sera toujours de même forme que celle de n, ainsi rien ne pourra arrêter le calcul des transformées successives.

100. Soit donc en premier lieu $n = -c^2 \sin^2\theta$, et semblablement $n' = \ldots - c'^2 \sin^2\theta'$, on aura par la formule précédente,

$$\sin^2\theta' = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} c \sin^2\theta - \tfrac{1}{2} \cos\theta \Delta(\theta).$$

C'est la même loi suivant laquelle l'amplitude φ' se déduit de φ; elle peut être représentée plus simplement par l'équation $\sin(2\theta' - \theta) = c \sin\theta$. En vertu de cette loi, les angles θ, θ', θ'', etc., forment une suite décroissante qui s'approche sans cesse d'une limite Θ, et qui l'atteint sensiblement après un petit nombre de termes. La suite des paramètres n, n', n'', etc., converge donc de même vers la limite $-\sin^2\Theta$, puisque d'ailleurs la suite c, c', c'', etc., a pour limite l'unité.

En second lieu, si n est positif, soit $1+n=\frac{b^2}{\sin^2\lambda}$, λ étant un angle très petit déterminé par la valeur $\sin\lambda=\frac{b}{\sqrt{(1+n)}}$, de sorte que si on faisait $n=\cot^2\theta$, on aurait $\sin\lambda=b\sin\theta$. Cela posé, la valeur de n' sera donnée par l'équation

$$1+n'=b'\cot^2\tfrac{1}{2}\lambda;$$

et si l'on fait semblablement $1+n'=\frac{b'^2}{\sin^2\lambda'}$, l'angle λ' se déduira de λ par la formule très simple

$$\sin\lambda'=\sqrt{b'}\,.\,\tang\tfrac{1}{2}\lambda.$$

On déduira semblablement λ'' de λ', λ''' de λ'', etc., de sorte qu'on formera la suite des paramètres n, n', n'', etc., d'après les équations $1+n'=\frac{b'^2}{\sin^2\lambda'}$, $1+n''=\frac{b''^2}{\sin^2\lambda''}$, etc.

Remarquons qu'à partir de l'angle λ qui est très petit, les termes de la série λ, λ', λ'', etc., diminuent continuellement, mais de manière que les rapports $\frac{\sin\lambda}{b}$, $\frac{\sin\lambda'}{b'}$, $\frac{\sin\lambda''}{b''}$, etc., convergent vers une quantité constante qui sera leur limite. En effet, des valeurs précédentes on déduit $\frac{\sin\lambda'}{b'}=\frac{\sin\lambda}{b}\cdot\frac{1+c}{1+\cos\lambda}$; on aurait de même $\frac{\sin\lambda''}{b''}=\frac{\sin\lambda'}{b'}\cdot\frac{1+c'}{1+\cos\lambda'}$, etc. Donc après un petit nombre de termes $\frac{\sin\lambda^\mu}{b^\mu}$ sera constant, et par conséquent aussi.... $1+n^\mu$, d'où l'on voit que la suite des paramètres n, n', n'', etc., converge, comme dans le premier cas, vers une limite qu'elle atteint sensiblement au bout de quelques termes.

Le moyen très simple que nous venons d'indiquer pour calculer la suite des paramètres n, n', n'', etc., lorsque le premier n est positif, peut aussi s'appliquer sans difficulté au cas où n est de la forme..... $-c^2\sin^2\theta$; de sorte que nous pourrons supposer qu'il est employé généralement dans tous les cas; et d'après cette supposition, nous allons continuer les calculs nécessaires pour parvenir à l'expression de la valeur de H.

101. Il faut d'abord avoir la loi des coefficiens B^μ, A^μ; pour cela, si l'on fait

$$h'=\frac{(1+b')^2(1+n')^2}{(1+n')^2-b'^2},\quad h''=\frac{(1+b'')^2(1+n'')^2}{(1+n'')^2-b''^2},\text{ etc.},$$

on aura successivement

$$B' = 2h'B, \quad B'' = 2h''B' = 4h'h''B, \quad B''' = 8h'h''h'''B, \text{ etc.}$$

Mais des équations $1 + n' = b' \cot^2 \frac{1}{2}\lambda$, $1 + n = \frac{b^2}{\sin^2 \lambda}$, $b^2 = \frac{4b'}{(1+b')^2}$, on tire

$$h' = \frac{1+n'}{1+n} \cdot \frac{1}{\cos\lambda};$$

on aura semblablement $h'' = \frac{1+n''}{1+n'} \cdot \frac{1}{\cos\lambda'}$, $h''' = \frac{1+n'''}{1+n''} \cdot \frac{1}{\cos\lambda''}$, etc.; donc

$$B' = \frac{2B(1+n')}{(1+n)\cos\lambda}, \quad B'' = \frac{4B(1+n'')}{(1+n)\cos\lambda\cos\lambda'}, \quad B''' = \frac{8B(1+n''')}{(1+n)\cos\lambda\cos\lambda'\cos\lambda''}, \text{ etc.},$$

et en général $B^\mu = \frac{2^\mu B(1+n^\mu)}{(1+n)\cos\lambda\cos\lambda'\ldots\cos\lambda^{\mu-1}}$.

Enfin des équations $A' = A - \frac{\frac{1}{2}B'}{1+n'}$, $A'' = A' - \frac{\frac{1}{2}B''}{1+n''}$, etc., on déduit généralement

$$A^\mu = A - \frac{\frac{1}{2}B'}{1+n'} - \frac{\frac{1}{2}B''}{1+n''} - \ldots - \frac{\frac{1}{2}B^\mu}{1+n^\mu},$$

ou, en faisant les substitutions,

$$A^\mu = A - \frac{B}{1+n}\left(\frac{1}{\cos\lambda} + \frac{2}{\cos\lambda\cos\lambda'} + \frac{4}{\cos\lambda\cos\lambda'\cos\lambda''} \ldots + \frac{2^{\mu-1}}{\cos\lambda\cos\lambda'\ldots\cos\lambda^{\mu-1}}\right).$$

Ces valeurs feront connaître celle du coefficient $A^\mu + \frac{B^\mu}{1+n^\mu}$ qui entre dans l'expression de H^μ. Soit ce coefficient $= L^\mu$, on aura

$$L^\mu = A + \frac{2^\mu B}{(1+n)\cos\lambda\cos\lambda'\ldots\cos\lambda^{\mu-1}}$$
$$- \frac{B}{1+n}\left(\frac{1}{\cos\lambda} + \frac{2}{\cos\lambda\cos\lambda'} + \frac{4}{\cos\lambda\cos\lambda'\cos\lambda''} \ldots + \frac{2^{\mu-1}}{\cos\lambda\cos\lambda'\ldots\cos\lambda^{\mu-1}}\right).$$

Mais comme la suite comprise dans cette formule est divergente, il conviendra de lui donner une autre forme. Pour cet effet j'observe que la formule précédente donne

$$L^{\mu+1} - L^\mu = \frac{2^\mu B(1-\cos\lambda^\mu)}{(1+n)\cos\lambda\cos\lambda'\ldots\cos\lambda^\mu}.$$

Or on a vu qu'à mesure que μ augmente, la quantité $\frac{\sin\lambda^\mu}{b^\mu}$ s'approche de plus en plus d'une certaine limite, et qu'ainsi $\sin\lambda^\mu$ est en général de l'ordre b^μ; donc $1 - \cos\lambda^\mu$ est de l'ordre $(b^\mu)^2$, ou $b^{\mu+1}$; donc la différence $L^{\mu+1} - L^\mu$ est une quantité très petite de l'ordre $2^\mu b^{\mu+1}$, intermédiaire entre b^μ et $b^{\mu+1}$, mais plus proche de ce dernier. On aura donc

En second lieu, si n est positif, soit $1+n=\frac{b^2}{\sin^2\lambda}$, λ étant un angle très petit déterminé par la valeur $\sin\lambda=\frac{b}{\sqrt{(1+n)}}$, de sorte que si on faisait $n=\cot^2\theta$, on aurait $\sin\lambda=b\sin\theta$. Cela posé, la valeur de n' sera donnée par l'équation

$$1+n'=b'\cot^2\tfrac{1}{2}\lambda;$$

et si l'on fait semblablement $1+n'=\frac{b'^2}{\sin^2\lambda'}$, l'angle λ' se déduira de λ par la formule très simple

$$\sin\lambda'=\sqrt{b'}\,.\,\tang\tfrac{1}{2}\lambda.$$

On déduira semblablement λ'' de λ', λ''' de λ'', etc., de sorte qu'on formera la suite des paramètres n, n', n'', etc., d'après les équations $1+n'=\frac{b'^2}{\sin^2\lambda'}$, $1+n''=\frac{b''^2}{\sin^2\lambda''}$, etc.

Remarquons qu'à partir de l'angle λ qui est très petit, les termes de la série λ, λ', λ'', etc., diminuent continuellement, mais de manière que les rapports $\frac{\sin\lambda}{b}$, $\frac{\sin\lambda'}{b'}$, $\frac{\sin\lambda''}{b''}$, etc., convergent vers une quantité constante qui sera leur limite. En effet, des valeurs précédentes on déduit $\frac{\sin\lambda'}{b'}=\frac{\sin\lambda}{b}\cdot\frac{1+c}{1+\cos\lambda}$; on aurait de même $\frac{\sin\lambda''}{b''}=\frac{\sin\lambda'}{b'}\cdot\frac{1+c'}{1+\cos\lambda'}$, etc. Donc après un petit nombre de termes $\frac{\sin\lambda^\mu}{b^\mu}$ sera constant, et par conséquent aussi.... $1+n^\mu$, d'où l'on voit que la suite des paramètres n, n', n'', etc., converge, comme dans le premier cas, vers une limite qu'elle atteint sensiblement au bout de quelques termes.

Le moyen très simple que nous venons d'indiquer pour calculer la suite des paramètres n, n', n'', etc., lorsque le premier n est positif, peut aussi s'appliquer sans difficulté au cas où n est de la forme..... $-c^2\sin^2\theta$; de sorte que nous pourrons supposer qu'il est employé généralement dans tous les cas; et d'après cette supposition, nous allons continuer les calculs nécessaires pour parvenir à l'expression de la valeur de H.

101. Il faut d'abord avoir la loi des coefficiens B^μ, A^μ; pour cela, si l'on fait

$$h'=\frac{(1+b')^2(1+n')^2}{(1+n')^2-b'^2},\quad h''=\frac{(1+b'')^2(1+n'')^2}{(1+n'')^2-b''^2},\text{ etc.},$$

on aura successivement

$$B' = 2h'B, \quad B'' = 2h''B' = 4h'h''B, \quad B''' = 8h'h''h'''B, \text{ etc.}$$

Mais des équations $1 + n' = b' \cot^2 \frac{1}{2}\lambda$, $1 + n = \frac{b^2}{\sin^2 \lambda}$, $b^2 = \frac{4b'}{(1+b')^2}$, on tire

$$h' = \frac{1+n'}{1+n} \cdot \frac{1}{\cos \lambda};$$

on aura semblablement $h'' = \frac{1+n''}{1+n'} \cdot \frac{1}{\cos \lambda'}$, $h''' = \frac{1+n'''}{1+n''} \cdot \frac{1}{\cos \lambda''}$, etc.; donc

$$B' = \frac{2B(1+n')}{(1+n)\cos\lambda}, \quad B'' = \frac{4B(1+n'')}{(1+n)\cos\lambda\cos\lambda'}, \quad B''' = \frac{8B(1+n''')}{(1+n)\cos\lambda\cos\lambda'\cos\lambda''}, \text{ etc.,}$$

et en général $B^\mu = \frac{2^\mu B(1+n^\mu)}{(1+n)\cos\lambda\cos\lambda'\ldots\cos\lambda^{\mu-1}}$.

Enfin des équations $A' = A - \frac{\frac{1}{2}B'}{1+n'}$, $A'' = A' - \frac{\frac{1}{2}B''}{1+n''}$, etc., on déduit généralement

$$A^\mu = A - \frac{\frac{1}{2}B'}{1+n'} - \frac{\frac{1}{2}B''}{1+n''} - \ldots - \frac{\frac{1}{2}B^\mu}{1+n^\mu},$$

ou, en faisant les substitutions,

$$A^\mu = A - \frac{B}{1+n}\left(\frac{1}{\cos\lambda} + \frac{2}{\cos\lambda\cos\lambda'} + \frac{4}{\cos\lambda\cos\lambda'\cos\lambda''} \ldots + \frac{2^{\mu-1}}{\cos\lambda\cos\lambda'\ldots\cos\lambda^{\mu-1}}\right).$$

Ces valeurs feront connaître celle du coefficient $A^\mu + \frac{B^\mu}{1+n^\mu}$ qui entre dans l'expression de H^μ. Soit ce coefficient $= L^\mu$, on aura

$$L^\mu = A + \frac{2^\mu B}{(1+n)\cos\lambda\cos\lambda'\ldots\cos\lambda^{\mu-1}}$$
$$- \frac{B}{1+n}\left(\frac{1}{\cos\lambda} + \frac{2}{\cos\lambda\cos\lambda'} + \frac{4}{\cos\lambda\cos\lambda'\cos\lambda''} \ldots + \frac{2^{\mu-1}}{\cos\lambda\cos\lambda'\ldots\cos\lambda^{\mu-1}}\right).$$

Mais comme la suite comprise dans cette formule est divergente, il conviendra de lui donner une autre forme. Pour cet effet j'observe que la formule précédente donne

$$L^{\mu+1} - L^\mu = \frac{2^\mu B(1-\cos\lambda^\mu)}{(1+n)\cos\lambda\cos\lambda'\ldots\cos\lambda^\mu}.$$

Or on a vu qu'à mesure que μ augmente, la quantité $\frac{\sin\lambda^\mu}{b^\mu}$ s'approche de plus en plus d'une certaine limite, et qu'ainsi $\sin\lambda^\mu$ est en général de l'ordre b^μ; donc $1 - \cos\lambda^\mu$ est de l'ordre $(b^\mu)^2$, ou $b^{\mu+1}$; donc la différence $L^{\mu+1} - L^\mu$ est une quantité très petite de l'ordre $2^\mu b^{\mu+1}$, intermédiaire entre b^μ et $b^{\mu+1}$, mais plus proche de ce dernier. On aura donc

de H, jusqu'au $\mu^{ième}$ terme $-\frac{2^\mu B}{1+n}$, etc. inclusivement. Dans le cas où φ^μ sera éloigné de la limite dont il s'agit, ce qui arrivera lorsque φ n'excède pas 90°, comme on peut toujours le supposer, on pourra ne calculer la série que jusqu'au terme $(\mu-1)^{ième}$ inclusivement, et le résultat sera toujours exact aux quantités près de l'ordre b^μ.

Pour déduire de la formule générale la valeur de la fonction complète H^1, on pourrait faire $\varphi = 90°$, et prolonger la série, comme il vient d'être dit, jusqu'au $(\mu-1)^{ième}$ terme inclusivement. Mais il est plus simple de faire $\varphi = 2^{\mu-1}\frac{\pi}{2} = 2^{\mu-2}\pi$, ce qui donnera successivement $\varphi' = 2^{\mu-3}\pi$, $\varphi'' = 2^{\mu-4}\pi \ldots \varphi^{\mu-1} = \frac{1}{2}\pi$, $\cot\varphi^\mu = \sqrt{b^\mu}$. On parvient ainsi à la limite des valeurs de φ^μ, et en négligeant les quantités de l'ordre b^μ, on aura $\sin\varphi^\mu = 1$, $\log\operatorname{tang}(45° + \frac{1}{2}\varphi^\mu) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{4}{b^\mu}\right)$, et par la substitution de toutes ces valeurs, on trouve

$$2^{\mu-1}H^1 = I^\mu L^\mu . \tfrac{1}{2}\log\frac{4}{b^\mu} - \frac{2^{\mu-1}B}{1+n} . \frac{1+b' . 1+b'' \ldots 1+b^{\mu-1}}{\cos\lambda\cos\lambda' \ldots \cos\lambda^{\mu-2}} . \frac{\operatorname{arc\,tang}\sqrt{n^{\mu-1}}}{\sqrt{n^{\mu-1}}}$$
$$-\frac{2^\mu B}{1+n}\left(\frac{1+b' . 1+b'' \ldots 1+b^{\mu-1}}{\cos\lambda\cos\lambda' \ldots \cos\lambda^{\mu-1}}\right)\left[(1+b^\mu)\frac{\operatorname{arc\,tang}\sqrt{n^\mu}}{\sqrt{n^\mu}} - \left(\frac{1+\cos\lambda^{\mu-1}}{2}\right)\frac{\operatorname{arc\,tang}\sqrt{n^{\mu-1}}}{\sqrt{n^{\mu-1}}}\right].$$

Mais les quantités $1 - \cos\lambda^{\mu-1}$, $n^\mu - n^{\mu-1}$ sont de l'ordre b^μ, et par conséquent négligeables; on a donc plus simplement

$$H^1 = I^\mu\left[\frac{L^\mu}{2^\mu}\log\frac{4}{b^\mu} - \frac{B}{1+n} . \frac{1}{\cos\lambda} . \frac{1}{\cos\lambda'} \ldots \frac{1}{\cos\lambda^{\mu-2}} . \frac{\operatorname{arc\,tang}\sqrt{n^{\mu-1}}}{\sqrt{n^{\mu-1}}}\right],$$

formule où il faudra substituer la valeur connue de L^μ et celle de $I^\mu = (1+b')(1+b'')\ldots(1+b^{\mu-1}) = \sqrt{\left(\frac{c'c''\ldots c^\mu}{c}\right)}$.

Telles sont les formules les plus simples par lesquelles on pourra calculer les valeurs des fonctions H et H^1, lorsque le module c est extrêmement près de l'unité; elles donneront tel degré d'approximation qu'on voudra obtenir, en prolongeant suffisamment les séries qui les composent.

104. Si on compare maintenant cette seconde méthode avec la première, on ne manquera pas de remarquer que celle-ci n'est sujette à aucune exception, et qu'elle n'exige ni considérations de limites, ni transformations; il est donc préférable d'employer la première méthode, même dans le cas où c serait fort près de l'unité, puisqu'alors cette méthode n'a

d'autre inconvénient que celui d'employer quelques termes de plus, et le nombre de ces termes ne peut jamais être bien grand.

Nous remarquerons encore qu'on peut simplifier à quelques égards les formules de la première méthode, en employant des angles subsidiaires λ°, $\lambda^{\circ\circ}$, $\lambda^{\circ\circ\circ}$, etc. pour calculer tant la série des paramètres n°, $n^{\circ\circ}$, etc., que celle des quantités k, k°, $k^{\circ\circ}$, etc. à l'exemple de ce que nous avons pratiqué dans la seconde méthode. Pour cet effet on aura les formules successives

$$\begin{aligned}
1+n &= b \cot^2\tfrac{1}{2}\lambda^{\circ} &&\ldots\ldots \tang\tfrac{1}{2}\lambda^{\circ} = \sqrt{\left(\frac{b}{1+n}\right)},\\
1+n^{\circ} &= b^{\circ} \cot^2\tfrac{1}{2}\lambda^{\circ\circ} = \frac{b^{\circ\circ}}{\sin^2\lambda^{\circ}} &&\ldots\ldots \tang\tfrac{1}{2}\lambda^{\circ\circ} = \frac{\sin\lambda^{\circ}}{\sqrt{b^{\circ}}},\\
1+n^{\circ\circ} &= b^{\circ\circ} \cot^2\tfrac{1}{2}\lambda^{\circ\circ\circ} = \frac{b^{\circ\circ\circ}}{\sin^2\lambda^{\circ\circ}} &&\ldots\ldots \tang\tfrac{1}{2}\lambda^{\circ\circ\circ} = \frac{\sqrt{b^{\circ\circ}}}{\sin\lambda^{\circ\circ}},\\
1+n^{\circ\circ\circ} &= b^{\circ\circ\circ} \cot^2\tfrac{1}{2}\lambda^{\circ\circ\circ\circ} = \frac{b^{\circ\circ\circ\circ}}{\sin^2\lambda^{\circ\circ\circ}} &&\ldots\ldots \tang\tfrac{1}{2}\lambda^{\circ\circ\circ\circ} = \frac{\sin\lambda^{\circ\circ\circ}}{\sqrt{b^{\circ\circ\circ}}},\\
&\text{etc.} && \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
k &= \frac{1+n^{\circ}}{1+n}\cos\lambda^{\circ} \ldots\ldots\ldots \frac{k}{1+n^{\circ}} = \frac{1}{1+n}\cos\lambda^{\circ},\\
k^{\circ} &= \frac{1+n^{\circ\circ}}{1+n^{\circ}}\cos\lambda^{\circ\circ} \ldots\ldots\ldots \frac{kk^{\circ}}{1+n^{\circ\circ}} = \frac{1}{1+n}\cos\lambda^{\circ}\cos\lambda^{\circ\circ},\\
k^{\circ\circ} &= \frac{1+n^{\circ\circ\circ}}{1+n^{\circ\circ}}\cos\lambda^{\circ\circ\circ} \ldots\ldots\ldots \frac{kk^{\circ}k^{\circ\circ}}{1+n^{\circ\circ\circ}} = \frac{1}{1+n}\cos\lambda^{\circ}\cos\lambda^{\circ\circ}\cos\lambda^{\circ\circ\circ},\\
&\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Enfin si l'on fait

$$\begin{aligned}
A^{\mu} = A + \frac{\frac{1}{2}B}{1+n}\Big(1 &+ \tfrac{1}{2}\cos\lambda^{\circ} + \tfrac{1}{4}\cos\lambda^{\circ}\cos\lambda^{\circ\circ}\ldots\\
&+ \frac{1}{2^{\mu}}\cos\lambda^{\circ}\cos\lambda^{\circ\circ}\ldots\cos\lambda^{\mu}\Big),
\end{aligned}$$

et qu'on prenne toujours $K^{\mu} = (1+c^{\circ})(1+c^{\circ\circ})\ldots(1+c^{\mu})$, la valeur de H sera

$$\begin{aligned}
H = K^{\mu}A^{\mu}\Phi &- \frac{\sqrt{c^{\circ}}}{2c}\cdot\frac{B}{1+n}\cdot\frac{\operatorname{arc\,tang}(\sqrt{n^{\circ}}\sin\varphi^{\circ})}{\sqrt{n^{\circ}}}\\
&- \frac{\sqrt{c^{\circ}}}{2c}\cdot\frac{\sqrt{c^{\circ\circ}}}{2c^{\circ}}\cdot\frac{B}{1+n}\cdot\cos\lambda^{\circ}\cdot\frac{\operatorname{arc\,tang}(\sqrt{n^{\circ\circ}}\sin\varphi^{\circ\circ})}{\sqrt{n^{\circ\circ}}}\\
&- \frac{\sqrt{c^{\circ}}}{2c}\cdot\frac{\sqrt{c^{\circ\circ}}}{2c^{\circ}}\cdot\frac{\sqrt{c^{\circ\circ\circ}}}{2c^{\circ\circ}}\cdot\frac{B}{1+n}\cdot\cos\lambda^{\circ}\cos\lambda^{\circ\circ}\cdot\frac{\operatorname{arc\,tang}(\sqrt{n^{\circ\circ\circ}}\sin\varphi^{\circ\circ\circ})}{\sqrt{n^{\circ\circ\circ}}}\\
&- \text{etc.}
\end{aligned}$$

La limite de n^μ étant zéro dans tous les cas, celle de $\sin\lambda^\mu$ sera b^μ, et par conséquent celle de $\cos\lambda^\mu$ sera c^μ. D'où l'on voit combien cette suite est convergente.

CHAPITRE XXIII.

Réductions générales des fonctions elliptiques de la troisième espèce; on en conclut que les fonctions complètes de la troisième espèce peuvent toujours s'exprimer par des fonctions de la première et de la seconde espèce.

105. Si l'on différencie par rapport à n chaque membre de l'équation $\Pi = \int \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta}$, on aura

$$n\frac{d\Pi}{dn} = \int \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^2\Delta} - \Pi:$$

or par la formule du n° 9 on trouve, en faisant $\alpha = (1+n)\left(1+\frac{c^2}{n}\right), \ldots$

$$\frac{2\alpha}{n}\int \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^2\Delta} = \frac{\Delta\sin\varphi\cos\varphi}{1+n\sin^2\varphi} - \frac{c^2}{n^2}\int(1+n\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta}$$
$$+\left(1+\frac{2+2c^2}{n}+\frac{3c^2}{n^2}\right)\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta}.$$

Combinant ces deux équations entre elles, et observant qu'on a

$$c^2\int(1+n\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta} = (c^2+n)\mathrm{F} - n\mathrm{E},$$

on parviendra à l'équation suivante, où l'on ne doit regarder que n comme variable dans Π et dans α,

$$\tfrac{1}{2}\Pi d\alpha + \alpha d\Pi = -\tfrac{1}{2}c^2\mathrm{F}.\frac{dn}{n^2} - \tfrac{1}{2}(\mathrm{F}-\mathrm{E})\frac{dn}{n} + \tfrac{1}{2}\Delta\sin\varphi\cos\varphi.\frac{dn}{1+n\sin^2\varphi}.$$

Multipliant de part et d'autre par $\alpha^{-\frac{1}{2}}$ et intégrant, on aura

$$\sqrt{\alpha}.\Pi = -\tfrac{1}{2}c^2\mathrm{F}\int\frac{dn}{n^2\sqrt{\alpha}} - \tfrac{1}{2}(\mathrm{F}-\mathrm{E})\int\frac{dn}{n\sqrt{\alpha}} + \tfrac{1}{2}\Delta\sin\varphi\cos\varphi\int\frac{dn}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{\alpha}}.$$

Il faut maintenant, pour effectuer les intégrations, considérer successivement les trois cas de l'art 53.

PREMIER CAS, $n = \cot^2\theta$.

106. Alors on a $dn = -\frac{2\cos\theta}{\sin^3\theta}d\theta$, $\sqrt{\alpha} = \frac{\Delta(b,\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$, et l'équation générale devient

$$\frac{\Delta(b,\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\Pi = c^2 F\int\frac{d\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta\,\Delta(b,\theta)} + (F-E)\int\frac{d\theta}{\Delta(b,\theta)}$$
$$-\Delta\sin\varphi\cos\varphi\int\frac{d\theta\cos^2\theta}{(\sin^2\theta+\sin^2\varphi\cos^2\theta)\,\Delta(b,\theta)}.$$

L'intégrale $\int\frac{d\theta}{\Delta(b,\theta)}$ est représentée à l'ordinaire par $F(b,\theta)$; et suivant les réductions connues, on a

$$\int\frac{c^2 d\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta\,\Delta(b,\theta)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\Delta(b,\theta) - E(b,\theta);$$

enfin si l'on fait pour abréger $\cot^2\varphi = n'$, l'intégrale

$\Delta\sin\varphi\cos\varphi\int\frac{d\theta\cos^2\theta}{(\sin^2\theta+\sin^2\varphi\cos^2\theta)\,\Delta(b,\theta)}$ pourra se décomposer ainsi :

$$-\frac{\Delta\sin\varphi}{\cos\varphi}\int\frac{d\theta}{\Delta(b,\theta)} + \frac{\Delta}{\sin\varphi\cos\varphi}\int\frac{d\theta}{(1+n'\sin^2\theta)\,\Delta(b,\theta)},$$

et sous cette forme elle peut être représentée par

$$-\frac{\Delta\sin\varphi}{\cos\varphi}F(b,\theta) + \frac{\Delta}{\sin\varphi\cos\varphi}\Pi(n',b,\theta).$$

Substituant toutes ces valeurs, et désignant, pour plus de clarté, par.... $\Pi(n,c,\varphi)$, $\Delta(c,\varphi)$, $F(c,\varphi)$, $E(c,\varphi)$, les fonctions Π, Δ, F, E; on aura, pour le premier cas, la formule générale qui suit :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\Delta(b,\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\Pi(n,c,\varphi) + \frac{\Delta(c,\varphi)}{\sin\varphi\cos\varphi}\Pi(n',b,\theta)\\ =&\left\{\begin{aligned}&C + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\Delta(b,\theta)F(c,\varphi) + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\Delta(c,\varphi)F(b,\theta)\\ &+F(c,\varphi)F(b,\theta) - F(c,\varphi)E(b,\theta) - E(c,\varphi)F(b,\theta).\end{aligned}\right.\end{aligned}\right\}\qquad(i')$$

La constante C, ajoutée à cette formule, pourrait être fonction de φ, puisqu'elle résulte d'une intégration où φ a été regardée comme constante; mais comme la forme de l'intégrale est telle qu'on peut permuter entre elles les quantités φ et θ, pourvu qu'on fasse de même la permutation entre c et b, il s'ensuit que C ne contient ni θ ni φ, et qu'ainsi C est une constante absolue.

Pour en déterminer la valeur, prenons un cas particulier, et supposons

à la fois φ et θ infiniment petits. Cette supposition donne, en rejetant les infiniment petits du second ordre $F(b, \varphi) = E(c, \varphi) = \varphi$, $F(b, \theta) = E(b, \theta) = \theta$, $\Delta(c, \varphi) = \Delta(b, \theta) = 1$, $\Pi(n, c, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{1 + n \sin^2 \varphi} = \frac{\text{arc tang}\, \varphi \sqrt{(1+n)}}{\sqrt{(1+n)}} = \theta \text{ arc tang } \frac{\varphi}{\theta}$, et semblablement $\Pi(n', b, \theta) \ldots\ldots = \varphi \text{ arc tang } \frac{\theta}{\varphi}$. Substituant toutes ces valeurs, il viendra

$$C = \text{arc tang } \frac{\varphi}{\theta} + \text{arc tang } \frac{\theta}{\varphi} = \tfrac{1}{2}\pi.$$

107. Si l'on veut appliquer la formule (i') au cas où $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, il faut, pour éviter les quantités infinies qui se rencontrent dans les deux membres, faire $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \omega$, et supposer ω infiniment petit. On aura ainsi $n' = \cot^2 \varphi = \text{tang}^2 \omega = \omega^2$; et puisque n' est infiniment petit, la fonction $\Pi(n', b, \theta)$ s'exprimera de cette manière

$$\Pi(n', b, \theta) = \int \frac{d\theta}{(1 + n' \sin^2 \theta)\, \Delta(b, \theta)} = \int \frac{d\theta}{\Delta(b, \theta)} - n' \int \frac{d\theta \sin^2 \theta}{\Delta(b, \theta)}:$$

on aura donc

$$\frac{\Delta}{\sin \varphi \cos \varphi} \Pi(n', b, \theta) - \frac{\Delta \sin \varphi}{\cos \varphi} F(b, \theta) = \omega \Delta F(b, \theta) - \omega \Delta \int \frac{d\theta \sin^2 \theta}{\Delta(b, \theta)},$$

d'où l'on voit que le premier membre se réduit à zéro, lorsqu'on fera $\omega = 0$, et qu'ainsi la supposition de $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ donne cette formule

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta(b, \theta)}{\sin \theta \cos \theta} \Pi^1(n, c) = \tfrac{1}{2}\pi + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Delta(b, \theta) F^1(c) + F^1(c) F(b, \theta) \\ - F^1(c) E(b, \theta) - E^1(c) F(b, \theta) \end{aligned}\right\} \quad (k').$$

Toutes les fois donc que le paramètre n est positif, la fonction complète de troisième espèce $\Pi^1(n, c)$, pourra toujours se déterminer par des fonctions de première et de seconde espèce, savoir, par les fonctions complètes $F^1(c)$, $E^1(c)$, qui se rapportent au module c, et par les fonctions non complètes $F(b, \theta)$ $E(b, \theta)$, qui se rapportent au module complémentaire b, et dont l'amplitude θ se déduit du paramètre n par l'équation.... $\cot \theta = \sqrt{n}$.

Ce théorème est très important dans la théorie des fonctions elliptiques, et son usage sera d'autant plus étendu, que dans beaucoup de problèmes de géométrie ou de mécanique, qui dépendent des fonctions elliptiques, on n'a souvent besoin que des intégrales définies ou complètes. Nous en donnerons ci-après diverses applications.

108. Si dans l'équation (k') on met $\frac{c^2}{n}$ à la place de n; et qu'on fasse $\frac{c^2}{n}$

$= \cot^2\lambda$, afin de mettre en même temps λ au lieu de θ, on aura

$$\frac{\Delta(b,\lambda)}{\sin\lambda\cos\lambda}\Pi'\left(\frac{c^2}{n},c\right) = \tfrac{1}{2}\pi + \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\Delta(b,\lambda)F'(c) + F'(c)F(b,\lambda)$$
$$- F'(c)E(b,\lambda) - E'(c)F(b,\lambda).$$

Mais, en vertu de l'équation $c^2 = n\cot^2\lambda$ ou $c\tang\theta\tang\lambda = 1$, qui se rapporte au module b, on a (n° 18) $F(b,\theta) + F(b,\lambda) = F'(b)$, $E(b,\theta) + E(b,\lambda) = E'(b) + b^2\sin\lambda\sin\theta$; on a en même temps

$$\sin\lambda = \frac{\cos\theta}{\Delta(b,\theta)},\quad \cos\lambda = \frac{c\sin\theta}{\Delta(b,\lambda)},\quad \Delta(b,\lambda) = \frac{c}{\Delta(b,\theta)},\quad \frac{\Delta(b,\lambda)}{\sin\lambda\cos\lambda},$$
$$= \frac{\Delta(b,\theta)}{\sin\theta\cos\theta} = \sqrt{a}.$$

Ajoutant donc l'équation précédente avec l'équation (i'), et observant que d'après la formule du n° 50, on a $\Pi'(n,c) + \Pi'\left(\frac{c^2}{n},c\right) = F'(c) + \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$, on trouve que les angles θ et λ disparaissent entièrement du calcul, et qu'il reste entre les fonctions complètes, pour les modules c et b, cette relation :

$$\frac{\pi}{2} = F'(c)E'(b) + F'(b)E'(c) - F'(c)F'(b),$$

ce qui est une nouvelle démonstration du théorème de l'art 45.

109. Puisqu'on peut exprimer la fonction complète $\Pi'(n,c)$ par des fonctions de la première et de la seconde espèce, on pourra exprimer de la même manière toute fonction non complète $\Pi(n,c,\varphi)$, dont l'amplitude φ est telle qu'on ait $F(c,\varphi) = kF'(c)$, k étant un nombre rationnel. En effet, si cette relation a lieu, il suit des formules démontrées ci-dessus, qu'on a $\Pi(n,c,\varphi) = k\Pi'(n,c) + W$, W étant une quantité déterminable par arcs de cercle. Donc il y a une infinité de cas où la fonction Π, dont le paramètre est à volonté, pourvu qu'il soit positif, pourra se réduire aux fonctions de la première et de la seconde espèce; et ces cas sont déterminés par un symptôme général.

Étant donné l'amplitude φ, on peut trouver par un calcul assez simple, si la condition dont on vient de parler peut être remplie, c'est-à-dire, si la fonction $F(\varphi)$ est dans un rapport rationnel avec la fonction complète F'. Il faut pour cela calculer la valeur approchée de la fonction $F(\varphi)$ par la méthode de l'article 69. Lorsqu'on aura déterminé l'angle Φ, limite des angles φ, $\frac{\varphi^\circ}{2}$, $\frac{\varphi^{\circ\circ}}{4}$, etc., il faudra examiner si cette limite Φ est avec l'angle

droit dans un rapport à la fois simple et très rapproché. Si le rapport était un peu composé, il n'y aurait lieu à aucune réduction, attendu que la réduction exige que le rapport soit exact, et que, pour peu qu'il fût composé, l'équation qui détermine sin φ serait d'un degré très élevé, ce qui rendrait peu probable que la valeur donnée de φ satisfît à cette équation. Mais si le rapport dont il s'agit est exprimé en nombres simples et qu'il paraisse au moins fort approché, il y aura lieu de croire qu'il est exact. Alors on s'assurera par les formules rigoureuses, si la valeur donnée de sin φ répond au rapport k trouvé entre $F(c, \varphi)$ et $F^1(c)$, ou entre Φ et $\frac{1}{2}\pi$. Lorsque cela a lieu, on trouvera également par les formules rigoureuses, la valeur de W qui donne $\Pi(n, c, \varphi) = k\Pi^1(n, c) + W$; ainsi on pourra déterminer $\Pi(n, c, \varphi)$ par des fonctions de la première et de la seconde espèce.

La méthode qu'on vient d'indiquer n'est autre chose que la méthode d'approximation par laquelle on évalue la fonction de première espèce.... $F(c, \varphi)$. Mais on peut pour le même objet employer une autre méthode qui paraît conduire plus directement au but, sans qu'il soit besoin de former l'échelle des modules.

Étant donné l'amplitude φ, on calculera successivement les amplitudes φ_2, φ_3, φ_4, etc., qui donnent $F(\varphi_2)=2F(\varphi)$, $F(\varphi_3)=3F(\varphi)$, $F(\varphi_4)=4F(\varphi)$, etc.; c'est ce qu'on fera par les formules

$$\begin{aligned}
\tang \tfrac{1}{2}\varphi_2 &= \Delta \tang \varphi \\
\tang (\tfrac{1}{2}\varphi_3 + \tfrac{1}{2}\varphi) &= \Delta \tang \varphi_2 \\
\tang (\tfrac{1}{2}\varphi_4 + \tfrac{1}{2}\varphi_2) &= \Delta \tang \varphi_3 \\
\tang (\tfrac{1}{2}\varphi_5 + \tfrac{1}{2}\varphi_3) &= \Delta \tang \varphi_4 \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Il est évident que si l'angle φ est tel qu'on ait $F(c, \varphi) = kF^1(c)$, k étant un nombre rationnel $\frac{\mu}{\nu}$, il y aura nécessairement dans la suite φ_2, φ_3, φ_4, etc., un terme φ_ν tel que $\varphi_\nu = \mu \cdot \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire qu'on devra rencontrer dans cette suite un terme φ_ν qui soit multiple de l'angle droit. Et comme d'ailleurs, par les raisons que nous avons exposées, le rapport $\frac{\mu}{\nu}$ devra être exprimé en nombres assez simples, on n'aura jamais qu'un petit nombre de termes à calculer dans la suite φ_2, φ_3, φ_4, etc., pour reconnaître si les fonctions $F(\varphi)$ et F^1 sont commensurables entre elles, et par suite si $\Pi(n, c, \varphi)$ peut se mesurer par $\Pi^1(n, c)$.

110. Pour revenir à l'équation (i''), nous observerons que cette équation

servira en général à déterminer l'une des fonctions $\Pi(n, c, \varphi)$, $\Pi(n', b, \theta)$, par le moyen de l'autre supposée connue. Ces deux fonctions ont des modules complémens l'un de l'autre, et leurs amplitudes se déduisent réciproquement de leurs paramètres par les équations $n = \cot^2\theta$, $n' = \cot^2\varphi$.

Supposons que l'angle θ, déduit du paramètre n, soit tel qu'on ait $F(b, \theta) = kF^1(b)$, k étant un nombre rationnel; on aura par les propriétés connues, $E(b, \theta) = kE^1(b) + V$, et $\Pi(n', b, \theta) = k\Pi^1(n', b) + W$, les quantités V et W étant déterminables, la première algébriquement, la seconde par arcs de cercle.

Si maintenant on substitue ces valeurs dans l'équation (i'), et qu'ensuite on mette pour $\Pi^1(n', b)$ sa valeur déduite de la formule (k'), on aura, après les réductions, ce résultat très simple

$$\frac{\Delta(b, \theta)}{\sin\theta\cos\theta}\Pi(n, c, \varphi) = (1 - k)\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\Delta(b, \theta)F(c, \varphi) - VF(c, \varphi) - \frac{W\Delta(c, \varphi)}{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

D'où l'on voit que la fonction Π peut alors se réduire indéfiniment aux fonctions de la première espèce, et la seule condition nécessaire pour cette réduction, est que le paramètre n, représenté par $\cot^2\theta$, soit tel que le rapport de $F(b, \theta)$ à $F^1(b)$, soit rationnel. Ainsi nous avons encore pour ces réductions un symptôme général qui comprend une infinité de cas particuliers.

Le cas de $n = c$ qu'on a résolu n° 49, est compris dans le symptôme général, puisqu'en faisant $\cot^2\theta = c$, la valeur de θ qui en résulte, est celle qui, appliquée au module b, donne $F(b, \theta) = \frac{1}{2}F^1(b)$. Aussi en faisant $k = \frac{1}{2}$ et substituant les valeurs de V et W qui sont $V = \frac{1}{2}(1 - c)$, $W = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2\Delta}\text{arc tang}.\frac{\Delta\cos\varphi}{(1+c)\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2\Delta}\times\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tang}.\frac{(1+c)\tang\varphi}{\Delta}\right)$, on retrouve la formule

$$\Pi(c) = \frac{1}{2}F + \frac{\frac{1}{2}F}{1+c}\text{arc tang}.\frac{(1+c)\tang\varphi}{\Delta}.$$

SECOND CAS, $n = -1 + b^2\sin^2\theta$.

111. On aura dans ce cas $\frac{dn}{\sqrt{a}} = 2d\theta\Delta(b, \theta)$, $\sqrt{a} = \frac{b^2\sin\theta\cos\theta}{\Delta(b, \theta)}$ et l'équation générale du n° 105 deviendra

$$\frac{b^2\sin\theta\cos\theta}{\Delta(b, \theta)}\Pi = (F - E)\int\frac{d\theta}{\Delta(b, \theta)} - c^2F\int\frac{d\theta}{(1 - b^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} + \Delta\sin\varphi\cos\varphi\int\frac{d\theta\,\Delta(b, \theta)}{\cos^2\varphi + b^2\sin^2\theta\sin^2\varphi}.$$

Or par les formules connues on a $\int \frac{d\theta}{\Delta(b,\theta)} = F(b,\theta)$ et $\int \frac{d\theta}{(1-b^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$ $= \frac{1}{c^2} E(b,\theta) - \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{\sin\theta\cos\theta}{\Delta(b,\theta)}$; de plus en faisant $b^2 \operatorname{tang}^2\varphi = n'$, on a

$$\Delta \sin\varphi\cos\varphi \int \frac{d\theta\,\Delta(b,\theta)}{\cos^2\varphi + b^2\sin^2\theta\sin^2\varphi} = \frac{\Delta}{\sin\theta\cos\theta}\Pi(n',b,\theta) - \frac{\Delta\cos\varphi}{\sin\varphi} F(b,\theta);$$

donc en faisant toutes ces substitutions on aura pour le second cas, la formule générale

$$\frac{b^2\sin\theta\cos\theta}{\Delta(b,\theta)}[\Pi(n,c,\varphi) - F(c,\varphi)] = \left\{\begin{array}{l} \frac{\Delta(c,\varphi)}{\sin\varphi\cos\varphi}[\Pi(n',b,\theta) - \cos^2\varphi F(b,\theta)] \\ + F(c,\varphi)F(b,\theta) - E(c,\varphi)F(b,\theta) - F(c,\varphi)E(b,\theta) \end{array}\right\} (l').$$

On n'a point ajouté de constante, parce qu'en faisant $\theta = 0$, les deux membres s'évanouissent.

112. Si on veut savoir ce que donne cette équation lorsque $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, il faudra trouver la valeur de $\frac{\Delta(c,\varphi)}{\sin\varphi\cos\varphi}\Pi(n',b,\theta)$ à cette limite; et pour cela, il faut d'abord supposer $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \omega$, ω étant infiniment petit. Or puisque $n' = b^2 \operatorname{tang}^2\varphi = b^2 \cot^2\omega$, il en résulte $\frac{b^2}{n'} = \operatorname{tang}^2\omega$, et la formule du n° 49 donne

$$\Pi(n',b,\theta) + \Pi(\operatorname{tang}^2\omega,b,\theta) = F(b,\theta) + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(c,\varphi)} \operatorname{arc\,tang} \cdot \frac{\Delta(c,\varphi)\operatorname{tang}\theta}{\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta(b,\theta)}.$$

Mais ω étant infiniment petit, on a

$$\Pi(\operatorname{tang}^2\omega, b, \theta) = F(b,\theta) - M\operatorname{tang}^2\omega,$$

M étant une quantité finie; donc

$$\frac{\Delta(c,\varphi)}{\sin\varphi\cos\varphi}\Pi(n',b,\theta) = \frac{\cos\varphi\,\Delta(c,\varphi)}{\sin^3\varphi} M + \operatorname{arc\,tang} \cdot \frac{\Delta(c,\varphi)\operatorname{tang}\theta}{\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta(b,\theta)}.$$

Le second membre se réduit à $\frac{1}{2}\pi$ lorsqu'on fait $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; donc on aura pour déterminer $\Pi^1(n,c)$, l'équation

$$\frac{b^2\sin\theta\cos\theta}{\Delta(b,\theta)}[\Pi^1(n,c) - F^2(c)] = \left.\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} + F^1(c)F(b,\theta) \\ \quad - E^1(c)F(b,\theta) - F^1(c)E(b,\theta) \end{array}\right\} (m');$$

d'où l'on voit que la fonction complète de troisième espèce $\Pi^1(n,c)$, s'exprime généralement par des fonctions de la première et de la seconde espèce.

Nous observerons que les formules (l') et (m') auraient pu se déduire de celles qui ont été données art. 54, 106 et 107; mais il n'était pas inutile de faire voir comment on pouvait y parvenir directement.

La fonction non complète $\Pi(n, c, \varphi)$ s'exprimera de même par des fonctions de la première et de la seconde espèce, si l'amplitude φ est telle qu'on ait $F(c, \varphi) = kF^1(c)$, k étant un nombre rationnel. Car alors on a $\Pi(n, c, \varphi) = k\Pi^1(n, c) + W$, W étant une quantité déterminable par arcs de cercle.

113. Supposons que l'angle θ, déterminé par le paramètre..... $n = -1 + b^2 \sin^2\theta$, soit tel que pour le module b on ait $F(b, \theta) = kF^1(b)$, k étant rationnel; alors on aura par les propriétés connues $\Pi(n', b, \theta) = k\Pi^1(n', b) + W$, W étant une quantité déterminable par des arcs de cercle. On aura en même temps $E(b, \theta) = kE^1(b) + V$, V étant une quantité déterminable algébriquement. Il suffira donc d'avoir la valeur de $\Pi^1(n', b)$ où l'on a $n' = b^2 \tang^2\varphi$.

Pour cet effet, j'observe que la formule du n° 50 donne

$$\Pi^1(n', b) + \Pi^1(\cot^2\varphi, b) = F^1(b) + \frac{\pi \sin\varphi \cos\varphi}{2\Delta(c, \varphi)};$$

ensuite par la formule de l'art. 107, on a

$$\Pi^1(\cot^2\varphi, b) = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(c, \varphi)}\left\{\begin{array}{l}\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\Delta(c, \varphi)F^1(b) + F^1(b)F(c, \varphi)\\ -E^1(b)F(c, \varphi) - F^1(b)E(c, \varphi)\end{array}\right\}.$$

Faisant toutes ces substitutions dans l'équation (t') et réduisant, on aura

$$\Pi(n, c, \varphi) = \left(1 - \frac{\Delta(b, \theta)}{b^2 \sin\theta\cos\theta}V\right)F(c, \varphi) + \frac{\Delta(c, \varphi)\Delta(b, \theta)}{b^2 \sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta}W.$$

D'où l'on voit que la fonction de troisième espèce $\Pi(n, c, \varphi)$ se réduira indéfiniment à la fonction de première espèce $F(c, \varphi)$; et la seule condition nécessaire pour cette réduction, est que l'angle θ déduit du paramètre $n = -1 + b^2 \sin^2\theta$, soit tel qu'on ait $F(b, \theta) = kF^1(b)$, k étant un nombre rationnel.

Ainsi dans le cas de $n = -c$, où l'on a $\sin^2\theta = \frac{1}{1+c}$, cette valeur de θ est celle qui donne $F(b, \theta) = \frac{1}{2}F^1(b)$; la réduction est donc possible. On trouve ensuite par les formules du n° 60, $V = \frac{1}{2}(1 - c)$, $W = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2\Delta}$ arc tang $\frac{(1-c)\tang\varphi}{\Delta}$; et substituant ces valeurs dans la formule de l'article précédent, on en tire

$$\Pi(-c) = \frac{1}{2}F + \frac{\frac{1}{2}}{1-c}\text{arc tang}\,.\,\frac{(1-c)\tang\varphi}{\Delta},$$

ce qui s'accorde avec la formule du n° 49.

114. Si dans l'équation (t') on fait $n = -c^2$ ou $\theta = \frac{1}{2}\pi$, on trouvera

encore la même équation qu'au n° 51. Mais si on fait $n = -1 + \omega^2$, ω étant supposé infiniment petit, on aura $\sin\theta = \frac{\omega}{b}$, ou $\theta = \frac{\omega}{b}$, et la substitution faite en négligeant les puissances supérieures de ω donnera

$$\Pi^1(n, c) = \frac{\frac{1}{2}\pi}{b\omega} + F^1(c) - \frac{1}{b^2} E^1(c).$$

Telle doit donc être la valeur de l'intégrale $\int \frac{d\varphi}{(\cos^2\varphi + \omega^2 \sin^2\varphi)\,\Delta}$, lorsqu'on suppose ω infiniment petit et $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Pour vérifier ce résultat par l'intégration directe, j'observe que b étant la valeur de Δ lorsque $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on peut faire

$$\Pi = \int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + \omega^2 \sin^2\varphi} \cdot \frac{1}{b} + \int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + \omega^2 \sin^2\varphi}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{b}\right).$$

La première partie a pour intégrale $\frac{1}{b\omega}$ arc tang (ω tang φ), et en faisant $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, elle devient $\frac{\frac{1}{2}\pi}{b\omega}$. La seconde partie se décompose en ces deux autres

$$T = \int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{b}\right), \quad V = \int \frac{\omega^2 \sin^2\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi(\cos^2\varphi + \omega^2 \sin^2\varphi)}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{\Delta}\right).$$

Or en intégrant par parties on a $T = \tang\varphi\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{b}\right) - c^2 \int \frac{d\varphi \sin^2\varphi}{\Delta^3}$, expression dont le premier terme $\tang\varphi\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{b}\right) = \frac{(b - \Delta)\tang\varphi}{b\Delta}$ ..... $= -\frac{c^2 \sin\varphi \cos\varphi}{b\Delta(b + \Delta)}$, s'évanouit lorsque $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; donc on a simplement.....

$$T = -\int \frac{c^2 \sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3} = \int \frac{\Delta^2 - 1}{\Delta^3}\, d\varphi = F^1(c) - \frac{1}{b^2} E^1(c).$$

Nous avons déjà les deux premiers termes de la valeur de $\Pi^1(n, c)$; un troisième terme serait donné par l'intégrale V qu'on peut mettre sous la forme

$$V = \omega^2 \int \frac{c^2\, d\varphi \sin^2\varphi}{(\cos^2\varphi + \omega^2 \sin^2\varphi)\,(b + \Delta)\, b\Delta};$$

et en procédant de la même manière, on trouve que le premier terme de V, développé suivant les puissances ascendantes de ω, est en même temps le premier terme de l'intégrale plus simple $\omega^2 \int \frac{c^2 d\varphi \sin^2\varphi}{2b^3(\cos^2\varphi + \omega^2 \sin^2\varphi)}$, lequel a pour expression $\frac{c^2\omega}{2b^3} \cdot \frac{\pi}{2}$. Réunissant toutes ces parties, on aura

$$\Pi^1(n, c) = \frac{\pi}{2b\omega} + F^1(c) - \frac{1}{b^2} E^1(c) + \frac{\pi c^2}{4b^3}\omega + \text{etc.}$$

TROISIÈME CAS, $n = -c^2 \sin^2 \theta$.

115. La substitution de cette valeur de n dans l'équation générale du n° 105, donne

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Delta(c,\theta)\Pi = (F-E)\int\frac{d\theta}{\Delta(c,\theta)} - F\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\,\Delta(c,\theta)}$$
$$+\Delta\sin\varphi\cos\varphi\int\frac{c^2 d\theta\sin^2\theta}{(1-c^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)\,\Delta(c,\theta)}.$$

Dans cette formule et dans toutes celles qui en seront déduites, les fonctions Δ, F, E, étant toujours relatives au module c, nous n'y joindrons que la désignation de l'amplitude, c'est-à-dire qu'au lieu de $\Delta(c,\theta)$, $F(c,\theta)$, $E(c,\theta)$, nous écrirons simplement $\Delta(\theta)$, $F(\theta)$, $E(\theta)$. Cela posé, on a par les formules connues,

$$\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\,\Delta(\theta)} = F(\theta) - E(\theta) - \Delta(\theta)\cot\theta;$$

et si l'on fait $n' = -c^2\sin^2\varphi$, on aura

$$\int\frac{c^2\sin^2\theta}{1-c^2\sin^2\varphi\sin^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\Delta(\theta)} = \frac{1}{\sin^2\varphi}[\Pi(n',\theta) - F(\theta)].$$

Donc la formule générale pour le troisième cas, est

$$\cot\theta\Delta(\theta)[\Pi(n,\varphi) - F(\varphi)] = \cot\varphi\Delta(\varphi)[\Pi(n',\theta) - F(\theta)]$$
$$+E(\theta)F(\varphi) - F(\theta)E(\varphi)\ldots\ldots\ (n').$$

On n'a pas ajouté de constante, parce que la forme de l'équation fait voir que si on change φ en θ et réciproquement, la constante devrait changer de signe, ce qui prouve qu'elle est nulle.

116. Si dans la formule précédente on fait $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on aura immédiatement

$$\Pi^1(n) = F^1 + \frac{\tang\theta}{\Delta(\theta)}[F^1E(\theta) - E^1F(\theta)]\ldots\ldots\ldots(p').$$

Ainsi dans le troisième cas, comme dans les deux premiers, la fonction complète de troisième espèce $\Pi^1(n)$, s'exprimera toujours par des fonctions de la première et de la seconde espèce.

Il en est de même de la fonction non complète $\Pi(n, c, \varphi)$ ou $\Pi(n,\varphi)$, si l'amplitude φ est telle qu'on ait $F(\varphi) = kF^1$, k étant un nombre rationnel; car alors on aurait $\Pi(n,\varphi) = k\Pi^1(n) + W$, W étant une quantité déterminable par logarithmes.

Il est remarquable que les formules (n') et (p') qu'on vient de trouver pour le troisième cas, sont plus simples que les formules analogues pour

le premier et le second cas, puisqu'elles ne contiennent point les fonctions F et E relatives au module complémentaire b.

Remarquons encore que la valeur de $\Pi^1(n)$ serait indéterminée si on avait $\theta = \frac{1}{2}\pi$ ou $n = -c^2$. Mais alors on a généralement pour toute valeur de φ,

$$\Pi(-c^2, \varphi) = \frac{1}{b^2} E(\varphi) - \frac{c^2 \sin\varphi \cos\varphi}{b^2 \Delta(\varphi)};$$

et par conséquent lorsque $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on a

$$\Pi^1(-c^2) = \frac{1}{b^2} E^1.$$

117. Revenons à la formule générale (n'), et supposons que l'angle θ, déduit du paramètre $n = -c^2 \sin^2\theta$, soit tel qu'on ait $F(\theta) = kF^1$, k étant rationnel; on aura alors $E(\theta) = kE^1 + V$, et $\Pi(n', \theta) = k\Pi^1(n') + W$, V étant une quantité déterminable algébriquement, et W étant déterminable par logarithmes. Ces valeurs et celle de la fonction $\Pi^1(n')$ tirée de la formule (p') étant substituées dans l'équation (n'), il en résultera

$$\Pi(n, \varphi) = \left(1 + \frac{V \tang \theta}{\Delta(\theta)}\right) F(\varphi) + \frac{W \cot\varphi\, \Delta(\varphi)}{\cot\theta\, \Delta(\theta)}.$$

D'où il suit que la fonction $\Pi(n, \varphi)$ pourra être ramenée indéfiniment aux fonctions de la première espèce, si le paramètre satisfait à la condition mentionnée. Nous avons déjà donné (n° 97) un symptôme semblable de réduction, mais celui qu'on vient d'indiquer est beaucoup plus général.

Soit, par exemple, $n = -1 + b = -c^2 \sin^2\theta$, on aura $\sin^2\theta = \frac{1}{1+b}$, ce qui donne $F(\theta) = \frac{1}{2} F^1$. On a alors par les formules du n° 60,

$$E(\theta) = \frac{1}{2} E^1 + \frac{1}{2}(1 - b),$$

et
$$\Pi(n', \theta) = \frac{1}{2}\Pi^1(n') + \frac{\sin\varphi}{4\Delta\cos\varphi} \log\left(\frac{\Delta - (1-b)\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta + (1-b)\sin\varphi\cos\varphi}\right);$$

d'où résulte

$$\Pi(n, \varphi) = \frac{1+b}{2b} F(\varphi) + \frac{1}{4b} \log\left(\frac{\Delta - (1-b)\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta + (1-b)\sin\varphi\cos\varphi}\right),$$

ce qui s'accorde avec la formule du n° 55.

Nous terminerons ces recherches par une observation générale; c'est que toutes les fois que la fonction de troisième espèce Π est réductible indéfiniment aux espèces inférieures, elle est toujours réductible à la première espèce, c'est-à-dire qu'elle s'exprime par la seule fonction $F(c, \varphi)$. Il n'y a d'exception à cette règle générale que lorsque $n = -c^2$, et lorsque..... $n = -1$, seuls cas où la fonction de seconde espèce $E(\varphi)$ entre dans l'expression de Π, ainsi qu'on le voit par les formules du n° 51.

CHAPITRE XXIV.

Réduction générale des fonctions elliptiques dont le paramètre est imaginaire.

118. Soit $p = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1+\zeta\sin^2\varphi)\Delta}$, ζ étant un coefficient constant, on aura en différenciant et introduisant un second coefficient constant k, l'équation générale

$$\frac{dp}{1+kp^2} = \frac{d\varphi}{\Delta}\cdot\frac{1-(2+\zeta)\sin^2\varphi+(1+2\zeta)c^2\sin^4\varphi-\zeta c^2\sin^6\varphi}{(1+\zeta\sin^2\varphi)^2(1-c^2\sin^2\varphi)+k\sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi)}.$$

Pour opérer le développement du second membre, on supposera que son dénominateur soit le produit des trois facteurs $(1+n\sin^2\varphi)(1+n'\sin^2\varphi)(1+m\sin^2\varphi)$, ce qui donnera les trois équations de condition

$$\left.\begin{aligned} nn'm &= -c^2\zeta^2, \\ (1+n)(1+n')(1+m) &= b^2(1+\zeta)^2, \\ (c^2+n)(c^2+n')(c^2+m) &= -b^2c^2k. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Cela posé, connaissant les deux paramètres n et n', on pourra par ces équations déterminer le troisième paramètre m et les deux coefficiens ζ et k. Et d'abord on aura pour déterminer ζ, l'équation

$$1 = \frac{c^2\zeta^2}{nn'} + \frac{b^2(1+\zeta)^2}{(1+n)(1+n')},$$

d'où l'on déduit

$$\zeta = \frac{-b^2 \pm \sqrt{\left[\frac{1+n}{n}\cdot\frac{1+n'}{n'}(c^2+n)(c^2+n')\right]}}{b^2+c^2\cdot\frac{1+n}{n}\cdot\frac{1+n'}{n'}}. \qquad (2)$$

Ensuite on aura m et k par les équations

$$m = -\frac{c^2\zeta^2}{nn'}$$

$$k = -(c^2+n)(c^2+n')\cdot\frac{c^2+m}{b^2c^2}.$$

Ces quantités étant connues, on aura par le développement de l'équation

supposée, la formule

$$\frac{dp}{1+kp^2}=\frac{d\varphi}{\Delta}\left[\frac{1}{\zeta}+\frac{A}{1+n\sin^2\varphi}+\frac{A'}{1+n'\sin^2\varphi}+\frac{B}{1+m\sin^2\varphi}\right];$$

où il faudra substituer les valeurs suivantes des coefficiens A, A′, B;

$$\left.\begin{aligned}
A&=\frac{n^3+(2+\zeta)n^2+(1+2\zeta)c^2n+\zeta c^2}{n(n-n')(n-m)},\\
A'&=\frac{n'^3+(2+\zeta)n'^2+(1+2\zeta)c^2n'+\zeta c^2}{n'(n'-n)(n'-m)},\\
B&=\frac{m^3+(2+\zeta)m^2+(1+2\zeta)c^2m+\zeta c^2}{m(m-n)(m-n')}.
\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

On peut d'ailleurs remarquer qu'ayant l'équation identique

$$\frac{A}{1+n\sin^2\varphi}+\frac{A'}{1+n'\sin^2\varphi}=-\frac{1}{\zeta}-\frac{B}{1+m\sin^2\varphi}+\frac{1-(2+\zeta)\sin^2\varphi+\text{etc.}}{1+(n+n'+m)\sin^2\varphi+\text{etc.}};$$

il en résulte les deux équations suivantes pour déterminer les deux coefficiens A et A′ par le moyen de B,

$$\begin{aligned}
A+A'&=1-\frac{1}{\zeta}-B,\\
An'+A'n&=m(B-1)-(n+n')\left(B+\frac{1}{\zeta}\right)-2-\zeta.
\end{aligned}$$

On aura enfin par l'intégration, cette formule générale

$$A\Pi n+A'\Pi n'+B\Pi m+\frac{1}{\zeta}F=\int\frac{dp}{1+kp^2},\qquad(4)$$

qui servira à déterminer l'une des trois fonctions Πn, $\Pi n'$, Πm, par le moyen des deux autres.

119. Cette formule contient comme cas particuliers les formules du chapitre XV, savoir, la formule (f') en faisant $m=-1$, et la formule (g') en faisant $m=0$. Mais elle est susceptible d'une infinité d'autres applications qui peuvent répandre un nouveau jour sur la théorie des fonctions elliptiques de la troisième espèce. Si on prend les paramètres n et n' tous deux de la forme $-1+b^2\sin^2\mu$, le troisième m sera de la même forme; si on les prend tous deux de la forme $-c^2\sin^2\lambda$, le troisième m sera de cette même forme. Mais si on supposait n et n' l'un de la forme $-1+b^2\sin^2\mu$, l'autre de la forme $-c^2\sin^2\lambda$, on trouverait pour l'expression du troisième m une quantité imaginaire; et ce résultat était facile à prévoir; car si l'expression de m se rapportait à la forme $-1+b^2\sin^2\alpha$, il s'ensuivrait que la fonction dont le paramètre est $-c^2\sin^2\lambda$ pourrait s'exprimer par les deux fonctions dont les paramètres sont $-1+b^2\sin^2\mu$ et $-1+b^2\sin^2\alpha$, ce

qui est contraire à la nature de ces fonctions. De même, si m se rapportait à la forme $-c^2 \sin^2 \alpha$, alors la fonction dont le paramètre est..... $-1+b^2 \sin^2 \mu$ pourrait s'exprimer par les deux fonctions dont les paramètres sont $-c^2 \sin^2 \lambda$ et $-c^2 \sin^2 \alpha$, ce qui est également contraire à la nature de ces fonctions.

Puis donc que dans l'hypothèse précédente la valeur de m doit toujours être imaginaire, il paraît s'ensuivre que toute fonction dont le paramètre est imaginaire, pourra s'exprimer par deux autres fonctions dont les paramètres sont réels, l'un étant de la forme $-1+b^2 \sin^2 \mu$, l'autre de la forme $-c^2 \sin^2 \lambda$. C'est ce que nous allons démontrer d'une manière directe et avec tous les développemens qu'exige cette proposition l'une des plus importantes de la théorie des fonctions elliptiques.

120. Soit le paramètre imaginaire donné $n = \nu(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$, ν étant positif et $\cos\theta$ pouvant être positif ou négatif à volonté; ce paramètre sera toujours accompagné, dans l'intégrale réelle dont on cherche l'expression, d'un autre paramètre $n' = \nu(\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta)$. D'après ces deux données il faut trouver la valeur des fonctions $\Pi(n, c, \varphi)$, $\Pi(n', c, \varphi)$, ou simplement Πn, $\Pi n'$, exprimées par deux autres fonctions dont les paramètres sont réels.

Pour cela il ne s'agit que de substituer les valeurs de n et n' dans les formules trouvées pour la résolution des équations (1). Soit pour abréger $h = \frac{b^2\nu}{\nu^2 + 2c^2\nu\cos\theta + c^2}$, on trouvera

$$\zeta = -\nu h \pm \nu\sqrt{(1 + 2h\cos\theta + h^2)},$$

$$m = -\frac{c^2\zeta^2}{\nu^2} = -c^2[2h^2 + 2h\cos\theta + 1 \mp 2h\sqrt{(1 + 2h\cos\theta + h^2)}],$$

$$k = -(c^4 + 2c^2\nu\cos\theta + \nu^2)\frac{c^2 + m}{b^2c^2};$$

d'où l'on voit que les trois quantités ζ, m, k, sont toujours réelles; il en est de même du coefficient B dont la valeur est

$$B = \frac{m^3 + (2+\zeta)m^2 + (1+2\zeta)c^2m + \zeta c^2}{m(m^2 - 2m\nu\cos\theta + \nu^2)}.$$

Quant aux coefficiens A et A′ qui contiennent chacun une partie imaginaire, ils se tireront facilement des équations

$$A + A' = 1 - \frac{1}{\zeta} - B,$$

$$An' + A'n = m(B-1) - 2\nu\cos\theta\left(B + \frac{1}{\zeta}\right) - 2 - \zeta.$$

Il y a deux valeurs de ζ et par conséquent deux de m, et deux des autres coefficiens. Les valeurs de m méritent une attention particulière, parce qu'elles sont les paramètres réels des fonctions par lesquelles nous voulons exprimer les fonctions Πn, $\Pi n'$, dont les paramètres sont imaginaires.

Soient m et m' les deux valeurs de m, on pourra supposer :

$$m + c^2 = -2hc^2\left[h + \cos\theta - \sqrt{(1 + 2h\cos\theta + h^2)}\right],$$
$$m' + c^2 = -2hc^2\left[h + \cos\theta + \sqrt{(1 + 2h\cos\theta + h^2)}\right];$$

de là résulte

$$(m + c^2)(m' + c^2) = -4c^4h^2\sin^2\theta;$$

il faut donc que des deux facteurs $m + c^2$, $m' + c^2$, l'un soit positif et l'autre négatif; d'ailleurs comme m et m' sont tous deux négatifs, et que $1 + m$ est positif, ainsi que $1 + m'$, d'après la seconde des équations (1), on satisfera à toutes ces conditions en prenant [1]

$$m = -c^2\sin^2\lambda, \qquad m' = -1 + b^2\sin^2\mu,$$

et on déterminera immédiatement les angles λ et μ par les formules

$$\sin\lambda = \frac{\xi}{\nu} = -h + \sqrt{(1 + 2h\cos\theta + h^2)},$$
$$\cos^2\mu = \frac{2hc^2}{b^2}\left[h + \cos\theta + \sqrt{(1 + 2h\cos\theta + h^2)}\right].$$

La première donne

$$\cos^2\lambda = 2h\left[-h - \cos\theta + \sqrt{(1 + 2h\cos\theta + h^2)}\right],$$

donc $\cos^2\lambda\cos^2\mu = \frac{4h^2c^2\sin^2\theta}{b^2}$. Ainsi l'angle λ étant déterminé par la première formule, on en déduira μ par la formule très simple :

$$\cos\mu = \frac{2hc\sin\theta}{b\cos\lambda}.$$

121. Cela posé, 1°. en partant de la valeur $m = -c^2\sin^2\lambda$, et des valeurs correspondantes des coefficiens ζ, k, B, A, A'; faisant de plus

$$f = \mathrm{A} + \mathrm{A}' = 1 - \frac{1}{\zeta} - \mathrm{B},$$
$$g = \mathrm{A}n' + \mathrm{A}'n = m(\mathrm{B} - 1) - 2\nu\cos\theta\left(\mathrm{B} + \frac{1}{\zeta}\right) - 2 - \zeta,$$

---

[1] Il y a des cas où l'on doit prendre m et m' dans l'ordre inverse, savoir..... $m = -1 + b^2\sin^2\mu$ et $m' = -c^2\sin^2\lambda$.

on déduira de l'équation (4)

$$\int \frac{f+g\sin^2\varphi}{1+2\nu\cos\theta\sin^2\varphi+\nu^2\sin^4\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta} = \int\frac{dp}{1+kp^2} - \frac{1}{\zeta}\mathrm{F} - \mathrm{B}\Pi(m). \qquad (5)$$

Soit $c^4+2c^2\nu\cos\theta+\nu^2=\tau^2$, on aura $k=-\frac{\tau^2\cos^2\lambda}{b^2}$, donc.....

$$\int\frac{dp}{1+kp^2} = \frac{b}{2\tau\cos\lambda}\log\left(\frac{b+p\tau\cos\lambda}{b-p\tau\cos\lambda}\right).$$

2°. En partant de la valeur $m'=-1+b^2\sin^2\mu$, et désignant de même avec un accent les coefficiens correspondans :

$$\zeta' = -\nu[h+\sqrt{(1+2h\cos\theta+h^2)}],\quad p' = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1+\zeta'\sin^2\varphi)\Delta},$$

$$\mathrm{B}' = \frac{m'^3+(2+\zeta')m'^2+(1+2\zeta')c^2m'+c^2\zeta'}{m'^3-2m'^2\nu\cos\theta+m'\nu^2},$$

$$k' = (c^4+2c^2\nu\cos\theta+\nu^2)\frac{\cos^2\mu}{c^2} = \frac{\tau^2\cos^2\mu}{c^2},$$

$$f' = 1-\frac{1}{\zeta'}-\mathrm{B}',$$

$$g' = m'(\mathrm{B}'-1)-2\nu\cos\theta\left(\mathrm{B}'+\frac{1}{\zeta'}\right)-2-\zeta';$$

on aura cette seconde équation

$$\int\frac{f'+g'\sin^2\varphi}{1+2\nu\cos\theta\sin^2\varphi+\nu^2\sin^4\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta} = \int\frac{dp'}{1+k'p'^2} - \frac{1}{\zeta'}\mathrm{F} - \mathrm{B}'\Pi m', \qquad (6)$$

où l'intégrale $\int\frac{dp'}{1+k'p'^2} = \frac{c}{\tau\cos\mu}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{p'\tau\cos\mu}{c}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{c}{\tau\cos\mu}\operatorname{arc\,tang}\frac{\tau\cos\mu\sin\varphi\cos\varphi}{c\Delta(1+\zeta'\sin^2\varphi)}$.

Au moyen de ces deux équations, toute formule intégrale proposée

$$\int\frac{\alpha+\beta\sin^2\varphi}{1+2\nu\cos\theta\sin^2\varphi+\nu^2\sin^4\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}, \qquad (7)$$

dans laquelle le dénominateur $1+2\nu\cos\theta\sin^2\varphi+\nu^2\sin^4\varphi$ est le produit des deux facteurs imaginaires $1+\nu\sin^2\varphi(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$, $1+\nu\sin^2\varphi(\cos\theta-\sqrt{-1}\sin\theta)$, pourra toujours s'exprimer par les deux fonctions Πm, $\Pi m'$, dont les paramètres sont réels, l'un étant de la forme $-c^2\sin^2\lambda$, l'autre de la forme $-1+b^2\sin^2\mu$. Car connaissant les coefficiens f, g, f', g', α, β, il sera aisé de satisfaire à l'équation identique

$$\alpha+\beta\sin^2\varphi = \mathrm{M}(f+g\sin^2\varphi)+\mathrm{M}'(f'+g'\sin^2\varphi), \qquad (8)$$

où M et M' sont des coefficiens constans, par lesquels on multipliera les équations (5) et (6), afin qu'en ajoutant les produits, le premier membre soit égal à l'intégrale proposée.

122. Il est bon de prévenir une difficulté que pourrait offrir l'équation (5),

relativement au terme $\int \frac{dp}{1+kp^2} = \frac{b}{2\tau\cos\lambda}\log.\frac{b+p\tau\cos\lambda}{b-p\tau\cos\lambda}$. Puisqu'on a $p = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1+\zeta\sin^2\varphi)\Delta}$, on voit que p est zéro lorsque $\varphi = 0$ et lorsque $\varphi = 90°$; entre ces deux valeurs il devra y avoir un *maximum*, mais on pourrait craindre que ce *maximum* ne fût infini, et c'est ce qui arriverait si ζ était négatif et plus grand que l'unité. Or cette supposition, qui rendrait p infini, ne peut jamais avoir lieu, et même on ne saurait avoir $p = \frac{b}{\tau\cos\lambda}$, ce qui rendrait infini le logarithme précédent; en effet nous avons établi ci-dessus les équations (1) en supposant identique l'équation

$$(1+\zeta\sin^2\varphi)^2(1-c^2\sin^2\varphi)+k\sin^2\varphi\cos^2\varphi=(1+n\sin^2\varphi)(1+n'\sin^2\varphi)(1+m\sin^2\varphi).$$

Le second membre est toujours positif, quelque valeur qu'on donne à $\sin\varphi$, depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = 90°$; donc le premier membre est toujours positif, et par conséquent $1+kp^2$ est toujours positif; mettant au lieu de k sa valeur $-\frac{\tau^2\cos^2\lambda}{b^2}$, on en conclura que $b^2-p^2\tau^2\cos^2\lambda$ est positif, et par conséquent aussi $b-p\tau\cos\lambda$; donc on a toujours $p < \frac{b}{\tau\cos\lambda}$, et il n'est pas à craindre que la quantité logarithmique comprise dans le second membre de l'équation (5) devienne infinie.

Soit maintenant $\Phi'm$, la valeur du premier membre de cette équation, lorsque la fonction est complète ou lorsqu'on a $\varphi = 90°$, il faudra faire $p = 0$, et on aura simplement

$$\Phi'm = -\frac{1}{\zeta}F' - B\Pi'm,$$

ou en substituant la valeur de $\Pi'm$, suivant la formule (p'') de l'art. 116

$$\Phi'm = -\left(\frac{1}{\zeta}+B\right)F'c - \frac{B\tang\lambda}{\Delta(c,\lambda)}[F'cE(c,\lambda)-E'cF(c,\lambda)].$$

Si nous passons maintenant à l'examen de la formule (6), nous verrons que la quantité $p' = \frac{\sin\varphi\sin\varphi}{(1+\zeta'\sin^2\varphi)\Delta}$, qui est nulle lorsque $\varphi = 0$ et lorsque $\varphi = 90°$, deviendra infinie entre ces deux limites, si le coefficient ζ' qui est négatif [puisqu'on a $\zeta' = -\nu h - \nu\sqrt{(1+2h\cos\theta+h^2)}$], est en même temps plus grand que l'unité. Lorsqu'on aura donc $1+\zeta'\sin^2\varphi = 0$, ou $\sin^2\varphi = -\frac{1}{\zeta'}$, l'arc dont la tangente $= \frac{p'\tau\cos\mu}{c}$ sera $\frac{1}{2}\pi$, et l'amplitude φ continuant à croître depuis $\sin^2\varphi = -\frac{1}{\zeta'}$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, cet arc croîtra depuis $\frac{1}{2}\pi$ jusqu'à π.

Appelons $\Phi' m'$ l'intégrale donnée par le premier membre de l'équation (6), lorsque $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, nous aurons en général la formule

$$\Phi' m' = \tfrac{1}{2}\pi \pm \tfrac{1}{2}\pi - \frac{1}{\zeta'} F' c - B' \Pi' (c, m'),$$

où le terme $\pm \frac{1}{2}\pi$ devra être pris avec le signe supérieur si $(-\zeta')$ est > 1, et avec le signe inférieur si $(-\zeta')$ est < 1. A l'égard de $\Pi'(c, m')$, on en trouve la valeur par la formule (m') de l'art. 112, qui donne

$$\Pi'(c, m') = F' c + \frac{\Delta(b, \mu)}{b^2 \sin\mu \cos\mu}\left[\frac{\pi}{2} + F' c F(b, \mu) - E' c F(b, \mu) - F' c E(b, \mu)\right].$$

De tout cela il résulte que la valeur de l'intégrale proposée (7), devenue complète lorsque $\varphi = 90°$, sera $M\Phi' m + M'\Phi' m'$, M et M' étant des coefficiens constans déterminés par l'équation (8).

Ainsi les fonctions complètes de troisième espèce, même dans le cas des paramètres imaginaires, peuvent s'exprimer par des fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce.

123. Les formules générales que nous venons de développer ne sont sujettes à aucune exception, mais il ne sera pas inutile d'en faire l'application à quelques cas qui présentent des réductions remarquables.

Soit d'abord $\nu = c$, θ étant à volonté, en sorte que les paramètres imaginaires proposés soient $n = c(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$, $n' = c(\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta)$. Dans ce cas, puisque $nn' = c^2$, et $n + n' = 2c\cos\theta$, l'équation qui détermine ζ devient $1 = \zeta^2 + \frac{b^2(1+\zeta)^2}{1 + 2c\cos\theta + c^2}$; elle donne immédiatement $\zeta = -1$ et $\zeta = \frac{c^2 + c\cos\theta}{1 + c\cos\theta}$, c'est ce qu'on trouverait d'une manière moins simple par les formules générales où il faudrait faire $h = \frac{b^2}{2c + 2c^2\cos\theta}$.

La solution $\zeta = -1$ est celle que nous avons désignée par ζ'; ainsi faisant $\zeta' = -1$, on en déduira $m' = -1$, $\mu = 0$, $B' = 0$, $f' = 2$, $g' = 2c\cos\theta$, $p' = \frac{\tang\varphi}{\Delta}$, $\tau = c\sqrt{(1 + 2c\cos\theta + c^2)}$, et l'équation (6) donne pour le cas dont il s'agit le résultat suivant,

$$\int \frac{2 + 2c\cos\theta\sin^2\varphi}{1 + 2c\cos\theta\sin^2\varphi + c^2\sin^4\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta} = F + \frac{c}{\tau}\,\text{arc tang}\cdot\left(\frac{\tau}{c}\cdot\frac{\tang\varphi}{\Delta}\right).$$

Cette intégrale, au reste, se déduit directement de la formule du n° 49, en faisant $n = c(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$, $n' = c(\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta)$, car ces deux paramètres satisfont à la condition $nn' = c^2$.

Les données pour former l'autre intégrale sont

$$\zeta = \frac{c^2 + c\cos\theta}{1 + c\cos\theta},$$
$$m = -c^2 \sin^2\lambda,$$
$$\sin\lambda = \frac{c + \cos\theta}{1 + c\cos\theta}, \ \operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\lambda) = \frac{b}{1+c}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta,$$
$$k = -\epsilon^2, \ \epsilon = \frac{c\sin\theta\sqrt{(1 + 2c\cos\theta + c^2)}}{1 + c\cos\theta},$$
$$B = 1 - \frac{1}{\zeta},$$
$$f = 0, \ g = -2(1 + c\cos\theta),$$
$$p = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1 + \zeta\sin^2\varphi)\Delta}, \int\frac{dp}{1 + kp^2} = \frac{1}{2\epsilon}\log\frac{1 + \epsilon p}{1 - \epsilon p}.$$

Il ne resterait plus qu'à substituer les valeurs connues de ζ, B, ϵ, f, g, dans l'équation (5) qui devient

$$\int\frac{2(1 + c\cos\theta)\sin^2\varphi}{1 + 2c\cos\theta\sin^2\varphi + c^2\sin^4\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{1}{2\epsilon}\log\cdot\frac{1 - \epsilon p}{1 + \epsilon p} + \frac{1}{\zeta}F - \left(\frac{1}{\zeta} - 1\right)\Pi m,$$

et en appelant $\Phi' m$ la valeur du premier membre lorsque $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on aura

$$\Phi' m = \frac{1}{\zeta}F' - \left(\frac{1}{\zeta} - 1\right)\Pi' m.$$

On aurait de même pour l'autre intégrale,

$$\Phi' m' = F' + \frac{c}{\epsilon}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

124. Par ces formules on résout complètement le cas assez général où l'on a $n = c(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$; mais il y aurait un changement à faire à la seconde formule si on avait $\cos\theta = -c$, ou si le paramètre était $n = -c^2 + bc\sqrt{-1}$. Alors on aurait $\zeta = 0$, $m = -\zeta^2$, $\epsilon = c$; mais avant de faire la substitution des valeurs de ζ et m, il faut pour éviter les quantités infinies mettre la fonction $\frac{1}{\zeta}F + B\Pi m$ sous la forme..... $\frac{1}{\zeta}\int\frac{d\varphi}{\Delta}\left(1 + \frac{\zeta - 1}{1 - \zeta^2\sin^2\varphi}\right) = \int\frac{d\varphi}{\Delta}\left(\frac{1 - \zeta\sin^2\varphi}{1 - \zeta^2\sin^2\varphi}\right)$; puis faisant $\zeta = 0$, cette intégrale se réduit à F, de sorte que la seconde équation sera dans ce cas particulier,

$$\int\frac{2b^2\sin^2\varphi}{1 - 2c^2\sin^2\varphi + c^2\sin^4\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta} = F - \frac{1}{2c}\log\cdot\frac{\Delta + c\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta - c\sin\varphi\cos\varphi}.$$

L'autre équation sera pour le même cas,

$$\int\frac{2 - 2c^2\sin^2\varphi}{1 - 2c^2\sin^2\varphi + c^2\sin^4\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta} = F + \frac{1}{b}\operatorname{arc\,tang}\cdot\frac{b\operatorname{tang}\varphi}{\Delta}$$

Ces deux équations peuvent se vérifier aisément par la différentiation. Il en résulte que l'intégrale $\frac{a+\mathcal{C}\sin^4\varphi}{1-2c^2\sin^2\varphi+c^2\sin^4\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}$ se déterminera toujours aisément par la fonction de première espèce F, en y joignant un arc de cercle et un logarithme, ou l'un des deux seulement. Il y a en outre un cas où la fonction F disparaît de l'intégrale qui reste ainsi exprimée par un arc de cercle et un logarithme; car en prenant la différence des deux formules précédentes, on obtient

$$\int\frac{\cos^2\varphi}{1-2c^2\sin^2\varphi+c^2\sin^4\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}=\frac{1}{2b}\text{arc tang}.\left(\frac{b\tang\varphi}{\Delta}\right)+\frac{1}{4c}\log.\frac{\Delta+c\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta-c\sin\varphi\cos\varphi}.$$

125. Si l'on fait $\cos\varphi=x$, les intégrales que nous venons de considérer seront comprises dans la formule

$$Z=\int\frac{f+gx^2}{a+\gamma x^4}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(\alpha+2\mathcal{C}x^2-\gamma x^4)}};$$

pour réduire celle-ci, soit $\sqrt{(\alpha+2\mathcal{C}x^2-\gamma x^4)}=px$, on aura la transformée

$$Z=-\frac{1}{4\alpha}\int\frac{(g\alpha-f\mathcal{C}+\frac{1}{2}fp^2)dp}{(\frac{1}{2}p^2-\mathcal{C})^2+\alpha\gamma}-\frac{f}{4\alpha}\int\frac{dp}{\sqrt{[(\frac{1}{2}p^2-\mathcal{C})^2+\alpha\gamma]}}.$$

Ainsi l'intégrale ne dépendra en général que des fonctions F, et dans le cas de $f=0$, elle se réduira entièrement aux arcs de cercle et aux logarithmes.

Une semblable réduction s'applique à la formule plus générale

$$Z=\int\frac{f+gx^2}{a+2\mathcal{C}x^2+\gamma x^4}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(a+2\varepsilon x^2+\gamma x^4)}};$$

car si on fait $\sqrt{(\alpha+2\varepsilon x^2+\gamma x^4)}=px$, on aura la transformée

$$Z=-\frac{f}{2\alpha}\int\frac{dp}{p^2+2\mathcal{C}-2\varepsilon}-\frac{f}{2\alpha}\int\frac{dp}{\sqrt{[(p^2-2\varepsilon)^2-4\alpha\gamma]}}+\left(\frac{fb}{\alpha}-g\right)\int\frac{dp}{(p^2+2\mathcal{C}-2\varepsilon)\sqrt{[(p^2-2\varepsilon)^2-4\alpha\gamma]}},$$

dans laquelle le dernier terme, contenant une fonction de troisième espèce, disparaîtrait si on avait $f\mathcal{C}-g\alpha=0$. Ainsi l'intégrale

$$Z=\int\frac{a+\mathcal{C}x^2}{a+2\mathcal{C}x^2+\gamma x^4}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(a+2\varepsilon x^2+\gamma x^4)}},$$

se réduit à $-\frac{1}{2}\int\frac{dp}{p^2+2\mathcal{C}-2\varepsilon}-\frac{1}{2}\int\frac{dp}{\sqrt{[(p^2-2\varepsilon)^2-4\alpha\gamma]}}$, et ne dépend que des fonctions de la première espèce.

126. Pour appliquer nos formules générales à un second exemple, soit $n=-1+b(\cos\lambda+\sqrt{-1}\sin\lambda)$; en comparant cette valeur à la formule

$n = \nu(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$, on aura $\nu\cos\theta = -1 + b\cos\lambda$, $\nu\sin\theta = b\sin\lambda$, d'où résultent les valeurs

$$\nu^2 = 1 - 2b\cos\lambda + b^2,$$
$$b^2 = 1 + 2\nu\cos\theta + \nu^2,$$
$$h = -\frac{1}{2\cos\theta} = \frac{\frac{1}{2}\nu}{1 - b\cos\lambda}.$$

On a donc $\zeta = -\nu h \pm \nu h$, c'est-à-dire que les deux valeurs de ζ sont $\zeta = 0$, $\zeta' = -2\nu h$.

La valeur $\zeta = 0$ donne $m = 0$, ce qui fait la même difficulté que nous avons déjà rencontrée (art. 124); on la résoudra de la même manière, et parce qu'on a dans ce cas $B + \frac{1}{\zeta} = \frac{c^2}{\nu^2}$, on trouvera que les deux termes $\frac{1}{\zeta}F + B\Pi m$ se réduisent à $\frac{c^2}{\nu^2}F$. D'ailleurs les substitutions donnent immédiatement $f = 1 - \frac{c^2}{\nu^2} = 2\left(1 + \frac{\cos\theta}{\nu}\right)$, $g = -2\left(1 + \frac{c^2\cos\theta}{\nu}\right)$, $k = -\nu^2$; on aura donc pour la première intégrale

$$\int \frac{\nu + \cos\theta - (\nu + c^2\cos\theta)\sin^2\varphi}{1 + 2\nu\cos\theta\sin^2\varphi + \nu^2\sin^4\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{1}{4}\log\frac{\Delta + \nu\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta - \nu\sin\varphi\cos\varphi} - \frac{c^2}{2\nu}F;$$

et on peut remarquer que cette équation se déduirait immédiatement de la formule du n° 54, en faisant $n = -1 + b\cos\lambda + b\sin\lambda\sqrt{-1}$; car alors l'équation de condition $(1 + n)(1 - m) = b^2$, donnerait $1 - m = \ldots\ldots$ $b(\cos\lambda - \sqrt{-1}.\sin\lambda)$, et par conséquent $-m = n'$.

Pour avoir l'autre intégrale il faut continuer de faire les substitutions dans les valeurs des coefficiens (art. 121); elles donnent les résultats suivans :

$$\zeta' = -\frac{\nu^2}{1 - b\cos\lambda} = -2\nu h = \frac{\nu}{\cos\theta},$$
$$m' = -\frac{c^2\nu^2}{(1 - b\cos\lambda)^2} = -\frac{c^2}{\cos^2\theta} = -1 + b^2\sin^2\mu,$$
$$\sin\mu = \frac{\cos\lambda - b}{1 - b\cos\lambda},\quad \cos\mu = \frac{c\sin\lambda}{1 - b\cos\lambda} = -\frac{c}{b}\tang\theta,$$
$$k' = \frac{b^2}{c^2}\nu^2\cos^2\mu = \nu^2\tang^2\theta,$$
$$B' = 1 + \frac{\cos\theta}{\nu},$$
$$f' = -\frac{2\cos\theta}{\nu},\quad g' = \frac{2c^2\cos\theta}{\nu},$$

au moyen desquels la seconde intégrale est

$$\int \frac{1 - c^2\sin^2\varphi}{1 + 2\nu\cos\theta\sin^2\varphi + \nu^2\sin^4\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{1}{2}F + \frac{\nu + \cos\theta}{2\cos\theta}\Pi m' + \frac{1}{2\sin\theta}\text{arc tang.}\left(\frac{-\nu\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi}{(\cos\theta + \nu\sin^2\varphi)\Delta}\right).$$

On observera dans l'application de cette formule que $\cos\theta$ est négatif; car on a $0 = c^2 + 2\nu\cos\theta + \nu^2$, et ν doit toujours être pris positivement, comme module de la racine imaginaire $\nu(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$.

Dans l'expression du second membre le dénominateur $\cos\theta + \nu\sin^2\varphi$ pourrait être zéro, si $\cos\theta$ qui est négatif est plus petit que ν; et comme on a $1 + \frac{\cos\theta}{\nu} = \frac{b(b-\cos\lambda)}{1-2b\cos\lambda+b^2}$, il est clair que ce cas aura lieu si on a $\cos\lambda < b$. Alors l'arc qui répond à la valeur de φ pour laquelle..... $\nu\sin^2\varphi + \cos\theta = 0$, sera $\frac{\pi}{2}$ et lorsqu'on fera $\varphi = \frac{\pi}{2}$, l'arc correspondant sera π. Au contraire, si on a $\cos\lambda > b$, l'arc compris dans la formule deviendra un *maximum* pour une valeur de φ comprise entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$, et il sera nul lorsque $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Cela posé, si on appelle comme ci-dessus $\Phi^1 m$ et $\Phi^1 m'$ les valeurs complètes des deux intégrales trouvées, valeurs qu'on obtient en faisant $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on aura en général

$$\Phi^1 m = -\frac{c^2}{2\nu^2}\mathrm{F}^1,$$

$$\Phi^1 m' = \tfrac{1}{2}\mathrm{F}^1 + \frac{\nu+\cos\theta}{2\cos\theta}\Pi^1 m' + \frac{1}{2\sin\theta}\left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}\right),$$

le signe $+$ ayant lieu dans $\pm\frac{1}{2}\pi$, si $\cos\lambda < b$ et le signe $-$, si $\cos\lambda > b$.

Si on avait $\cos\lambda = b$, il faudrait prendre $\frac{\pi}{2}$ à la place de $\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}$; d'ailleurs les formules trouvées dans ce cas s'accorderaient avec celles qu'on a données art. 124, pour le cas de $\cos\theta = -c$, puisque dans les deux cas on aurait $n = -c^2 + bc\sqrt{-1}$.

127. Il est très remarquable que dans le cas d'un paramètre imaginaire de la forme $n = -1 + b(\cos\lambda + \sqrt{-1}\sin\lambda)$, la transformation dont on a fait usage pour les approximations (art. 95), conduit immédiatement à la réduction des fonctions Πn, $\Pi n'$.

En effet, d'après cette valeur de n, les formules de l'art. cité donnent

$$n^0 = -\frac{\nu^2}{(1+b)^2} = -1 + b^{02}\cos^2\tfrac{1}{2}\lambda;$$

et puisque le nouveau paramètre n^0 est réel, la solution est donnée immédiatement par la première transformée

$$\Pi n = \frac{1+c^0}{2}\left[p\Pi^0 + q\mathrm{F}^0 + \frac{\frac{1}{2}n}{1+n}\int\frac{d\varphi^0\cos\varphi^0}{1+n^0\sin^2\varphi^0}\right],$$

où l'on a

$$p = \frac{\sin\lambda}{\nu^2}\left[\sin\lambda + (\cos\lambda - b)\sqrt{-1}\right],$$

$$q = \frac{c^2}{2b\nu^2}\left[\cos\lambda - b - \sin\lambda . \sqrt{-1}\right],$$

$$\frac{\frac{1}{2}n}{1+n} = \frac{1}{2b}\left[b - \cos\lambda + \sin\lambda . \sqrt{-1}\right].$$

La valeur de Πn est donc exprimée en fonction de n°, c°, φ°, comme il suit :

$$\Pi n = \frac{1-b}{2b\nu^2}(\cos\lambda - b - \sqrt{-1}\sin\lambda)\,F(c^\circ, \varphi^\circ)$$
$$+ \frac{\sin\lambda}{(1+b)\nu^2}\left[\sin\lambda + (\cos\lambda - b)\sqrt{-1}\right]\Pi(n^\circ, c^\circ, \varphi^\circ)$$
$$+ \frac{1}{4b\nu}(b - \cos\lambda + \sqrt{-1}\sin\lambda)\log.\left(\frac{1+b+\nu\sin\varphi^\circ}{1+b-\nu\sin\varphi^\circ}\right);$$

d'où l'on voit que la fonction Πn dont le paramètre est imaginaire, ne dépend que d'un logarithme et de la fonction $\Pi(n^\circ, c^\circ, \varphi^\circ)$ dont le paramètre est réel et de la forme $-1 + b^{\circ 2}\cos^2\frac{1}{2}\lambda$.

Connaissant la valeur de Πn, on aura en même temps celle de $\Pi n'$, en changeant dans la formule précédente le signe de $\sqrt{-1}$. Et par deux facteurs convenables on pourra former une intégrale réelle..... $(M + N\sqrt{-1})\Pi n + (M - N\sqrt{-1})\Pi n'$ qui ne contienne point la fonction Π°, et une autre qui ne contienne point de logarithme. Ces deux intégrales sont

$$\int \frac{f + g\sin^2\varphi}{1 + 2\nu\cos\theta\sin^2\varphi + \nu^2\sin^4\varphi} . \frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{1}{2\nu}\log.\left(\frac{1+b+\nu\sin\varphi^\circ}{1+b-\nu\sin\varphi^\circ}\right) - \left(\frac{1-b}{\nu^2}\right)F(c^\circ, \varphi^\circ),$$

$$\int \frac{f' + g'\sin^2\varphi}{1 + 2\nu\cos\theta\sin^2\varphi + \nu^2\sin^4\varphi} . \frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{2}{1+b}\,\Pi(n^\circ, c^\circ, \varphi^\circ),$$

les intégrales comprises dans les premiers membres étant les mêmes qui ont été semblablement dénommées art. 126.

128. En comparant la première formule, à celle que nous avons déjà trouvée, on prouve assez facilement l'identité des deux expressions ; car on a

$$F(c, \varphi) = \frac{1+c^\circ}{2} . F(c^\circ, \varphi^\circ) = \frac{1}{1+b}F(c^\circ, \varphi^\circ), \text{ ainsi } \frac{c^2}{\nu^2}F(c, \varphi) = \frac{1-b}{\nu^2}F(c^\circ, \varphi^\circ);$$

de même puisqu'on a $\sin\varphi^\circ = \frac{(1+b)\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}$, l'identité des deux quantités logarithmiques est manifeste.

Il n'est pas aussi facile de démontrer, relativement à la seconde intégrale, l'identité de ses deux expressions. Celle que nous venons de trou-

ver $\frac{2}{1+b}\Pi(n^\circ, c^\circ, \varphi^\circ)$ réduite ainsi à un seul terme, est beaucoup plus simple que l'autre expression qui comprend à la fois les deux fonctions F, $\Pi m'$, et un arc de cercle dont la tangente est fort composée. Cependant on ne saurait douter que cette seconde expression ne soit identique à la première, et nous allons faire voir comment on peut s'en assurer par le calcul effectif.

L'équation qui reste à vérifier pourra être mise sous cette forme :

$$(1+c^\circ)\Pi(n^\circ, c^\circ, \varphi^\circ) = F(c, \varphi) + \frac{b\cos\lambda - b^2}{1 - b\cos\lambda}\Pi(m, c, \varphi) + \frac{\nu}{b\sin\lambda}\Psi,$$

où l'on a

$$n^\circ = -\frac{\nu^2}{(1+b)^2} = -1 + b^{\circ 2}\cos^2\tfrac{1}{2}\lambda, \quad m = -1 + b^2\sin^2\mu,$$

$$\cos\mu = \frac{c\sin\lambda}{1 - b\cos\lambda}, \quad \operatorname{tang}\Psi = \frac{\nu b\sin\lambda\sin\varphi\cos\varphi}{(1 - b\cos\lambda - \nu^2\sin^2\varphi)\Delta},$$

$$\nu^2 = 1 - 2b\cos\lambda + b^2 = (1+b)^2(1 - b^{\circ 2}\cos^2\tfrac{1}{2}\lambda).$$

Il faut observer que l'arc Ψ croîtra continuellement avec φ, si l'on a $1 - b\cos\lambda < \nu^2$, ou $\cos\lambda < b$, de sorte qu'en faisant $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on aura $\Psi = \pi$. Au contraire si on a $\cos\lambda > b$, l'arc Ψ sera zéro aux deux limites $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Pour mettre plus d'uniformité dans les dénominations, soit $\lambda = \pi - 2\mathcal{C}$, on aura $n^\circ = -1 + b^{\circ 2}\sin^2\mathcal{C}$, $\cos\mu = \frac{c\sin 2\mathcal{C}}{1 + b\cos 2\mathcal{C}}$, $\nu = (1+b)\sqrt{(1 - b^{\circ 2}\sin^2\mathcal{C})}$ $= (1+b)\Delta(b^\circ, \mathcal{C})$, $\operatorname{tang}\Psi = \frac{b\nu\sin 2\mathcal{C}\sin\varphi\cos\varphi}{(1 + b\cos 2\mathcal{C} - \nu^2\sin^2\varphi)\Delta}$, et l'équation à vérifier sera

$$(1+c^\circ)\Pi(n^\circ, c^\circ, \varphi^\circ) = F(c, \varphi) - \frac{b(b + \cos 2\mathcal{C})}{1 + b\cos 2\mathcal{C}}\Pi(m, c, \varphi) + \frac{\nu}{b\sin 2\mathcal{C}}\Psi;$$

équation qui, outre les quantités ordinaires b, c, φ, et celles qui en dérivent, comme b°, c°, φ°, ne contient d'arbitraire que l'angle $\mathcal{C}$, puisque cet angle sert à déterminer μ et ν par les équations $\cos\mu = \frac{c\sin 2\mathcal{C}}{1 + b\cos 2\mathcal{C}}$, $\nu = (1+b)\Delta(b^\circ, \mathcal{C})$, et ensuite les paramètres n° et m dont les valeurs sont $n = -1 + b^{\circ 2}\sin^2\mathcal{C}$, $m = -1 + b^2\sin^2\mu$.

Cela posé, on pourrait réduire la fonction $\Pi(n^\circ, c^\circ, \varphi^\circ)$ à la fonction $\Pi(n, c, \varphi)$; mais on reviendrait au paramètre imaginaire n, d'où l'on est parti; ainsi la seule marche à suivre est de réduire la fonction $\Pi(m, c, \varphi)$ à une nouvelle fonction $\Pi(m^\circ, c^\circ, \varphi^\circ)$ au moyen des formules de l'art. 95. Elles donnent une valeur positive de m°, savoir,

$$m^\circ = \frac{m(m+c^2)}{(1+b)^2(1+m)} = \frac{\cos^2\mu(1-b^2\sin^2\mu)}{(1+b)^2\sin^2\mu};$$

faisant donc $m^\circ = \cot^2\gamma$, on aura

$$\cot\gamma = \pm\frac{\cos\mu\sqrt{(1-b^2\sin^2\mu)}}{(1+b)\sin\mu} = \frac{c^\circ\sin 2\mathcal{C}\sqrt{(1-b^{\circ 2}\sin^2\mathcal{C})}}{1-2\sin^2\mathcal{C}+b^{\circ 2}\sin^4\mathcal{C}}.$$

Soit, pour le module b°, $F(b^\circ, \mathcal{C}_2) = 2F(b^\circ, \mathcal{C})$, on aura par les formules de la duplication (art. 21)

$$\tang\mathcal{C}_2 = \frac{\sin 2\mathcal{C}\sqrt{(1-b^{\circ 2}\sin^2\mathcal{C})}}{1-2\sin^2\mathcal{C}+b^{\circ 2}\sin^4\mathcal{C}};$$

donc $\cot\gamma = c^\circ\tang\mathcal{C}_2$, ou $1 = c^\circ\tang\mathcal{C}_2\tang\gamma$, ce qui correspond à l'équation transcendante $F(b^\circ, \mathcal{C}_2) + F(b^\circ, \gamma) = F^1 b^\circ$, ou, ce qui revient au même, à l'équation

$$2F(b^\circ, \mathcal{C}) + F(b^\circ, \gamma) = F^1 b^\circ.$$

Cette équation qui, pour le module b°, établit une relation entre les paramètres $n^\circ = -1 + b^{\circ 2}\sin^2\mathcal{C}$ et $m^\circ = \cot^2\gamma$, est comprise dans un symptôme général que nous ferons connaître dans le chapitre suivant; il en résulte que la fonction $\Pi(n^\circ, c^\circ, \varphi^\circ)$ peut se réduire à la fonction $\Pi(m^\circ, c^\circ, \varphi^\circ)$, et par conséquent à la fonction $\Pi(m, c, \varphi)$. Or la possibilité de la réduction étant démontrée, il devient inutile de développer ici les calculs plus longs que difficiles par lesquels on parviendrait à l'équation générale que nous voulions vérifier. Nous nous bornerons seulement à faire voir l'exactitude de cette équation dans le cas des fonctions complètes.

129. Soit donc $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, et par suite $\varphi^\circ = \pi$; si on suppose $\cos\lambda < b$, ou $b + \cos 2\mathcal{C} > 0$, ce qui donne $\Psi^1 = \pi$, l'équation à vérifier sera

$$2(1+c^\circ)\Pi^1(n^\circ, c^\circ) = F^1 c - \left(\frac{b\cos 2\mathcal{C}+b^2}{1+b\cos 2\mathcal{C}}\right)\Pi^1(m, c) + \frac{\nu}{b\sin 2\mathcal{C}}\cdot\pi,$$

et on aura

$$n^\circ = -1 + b^{\circ 2}\sin^2\mathcal{C}, \quad \nu^2 = 1 + 2b\cos 2\mathcal{C} + b^2 = (1+b)^2(1-b^{\circ 2}\sin^2\mathcal{C}),$$

$$\sin\mu = \frac{b+\cos 2\mathcal{C}}{1+b\cos 2\mathcal{C}}, \quad \cos\mu = \frac{c\sin 2\mathcal{C}}{1+b\cos 2\mathcal{C}}, \quad \Delta(b, \mu) = \frac{c\nu}{1+b\cos 2\mathcal{C}}.$$

Maintenant, par la formule de l'art. 112, on a

$$\Pi^1(m, c) = F^1 c + \frac{\Delta(b,\mu)}{b^2\sin\mu\cos\mu}\left(\frac{\pi}{2} - M\right),$$

$$\Pi^1(n^\circ, c^\circ) = F^1 c^\circ + \frac{\Delta(b^\circ, \mathcal{C})}{b^{\circ 2}\sin\mathcal{C}\cos\mathcal{C}}\left(\frac{\pi}{2} - M^\circ\right),$$

$$M = F^1 c\, E(b, \mu) + E^1 c\, F(b, \mu) - F^1 c\, F(b, \mu)$$

$$M^\circ = F^1 c^\circ E(b^\circ, \mathcal{C}) + E^1 c^\circ F(b^\circ, \mathcal{C}) - F^1 c^\circ F(b^\circ, \mathcal{C}).$$

Substituant ces valeurs dans notre équation, et observant que $(1+c^\circ)F'c^\circ = F'c$, le premier membre deviendra $2F'c + \frac{\nu}{b\sin 2\mathcal{C}}(\pi - 2M^\circ)$, et le second membre $\frac{c^2}{1+b\cos 2\mathcal{C}}F'c + \frac{\nu}{b\sin 2\mathcal{C}}\left(\frac{\pi}{2} + M\right)$. Ainsi tout se réduit à vérifier l'équation

$$\frac{b\nu\sin 2\mathcal{C}}{1+b\cos 2\mathcal{C}}F'c = 2M^\circ + M - \tfrac{1}{2}\pi.$$

Il faut pour cela substituer le module b au module b°, dans l'expression de M°; or on a d'abord les valeurs des fonctions complètes, savoir,

$$F'c^\circ = \frac{1+b}{2}F'c, \quad E'c^\circ = \frac{1}{1+b}E'c + \frac{b}{1+b}F'c,$$

ensuite on exprimera $F(b^\circ, \mathcal{C})$ par $F(b, \delta)$, en établissant l'équation $\sin(2\mathcal{C} - \delta) = b\sin\delta$, de même qu'on exprime $F(c', \varphi')$ par $F(c, \varphi)$, au moyen de l'équation $\sin(2\varphi' - \varphi) = c\sin\varphi$. Ainsi en prenant l'amplitude δ telle que $\operatorname{tang}\delta = \frac{\sin 2\mathcal{C}}{b + \cos 2\mathcal{C}}$, ou $\sin\delta = \frac{\sin 2\mathcal{C}}{\nu}$, on aura

$$F(b^\circ, \mathcal{C}) = \frac{1+b}{2}F(b, \delta),$$

$$E(b^\circ, \mathcal{C}) = \frac{1}{1+b}E(b, \delta) - \tfrac{1}{2}(1-b)F(b, \delta) + \frac{b}{1+b}\sin\delta;$$

substituant ces valeurs dans l'expression de M°, on aura

$$2M^\circ = F'c\,E(b, \delta) + (E'c - F'c)F(b, \delta) + b\sin\delta\,F'c;$$

l'équation à vérifier se réduit donc à celle-ci :

$$\frac{b\nu\sin 2\mathcal{C}}{1+b\cos 2\mathcal{C}}F'c = F'c\,[E(b, \mu) + E(b, \delta) + b\sin\delta] - \tfrac{1}{2}\pi$$
$$+ (E'c - F'c)\,[F(b, \mu) + F(b, \delta)].$$

Mais d'après la valeur trouvée de $\operatorname{tang}\delta$ et celle de $\operatorname{tang}\mu$, on a..... $1 = c\operatorname{tang}\mu\operatorname{tang}\delta$, ce qui répond à l'équation $F(b, \mu) + F(b, \delta) = F'b$; on a en même temps $E(b, \mu) + E(b, \delta) = E'b + b^2\sin\mu\sin\delta$. Substituant ces valeurs et effaçant la partie qui se détruit par la propriété des fonctions complémentaires, il ne restera plus que l'équation

$$\frac{b\nu\sin 2\mathcal{C}}{1+b\cos 2\mathcal{C}} = b\sin\delta + b^2\sin\mu\sin\delta,$$

laquelle devient identique, en substituant les valeurs connues de $\sin\delta$ et $\sin\mu$.

130. L'équation générale (4) que nous avons établie entre trois fonctions dont les paramètres sont n, n', m, peut servir à donner une seconde solu-

tion du problème qui a pour but d'exprimer une fonction dont le paramètre est imaginaire, par deux autres fonctions dont les paramètres soient réels.

Représentons par m le paramètre imaginaire donné $m = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\nu(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$, et par n et n' les deux autres paramètres qui doivent être réels. Il faudra d'abord satisfaire à l'équation $nn'm = -c^2\zeta^2$, ou $nn'\nu(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = -c^2\zeta^2$. Soit pour cet effet $r^2 = \frac{nn'\nu}{c^2}$, on aura $\zeta^2 = r^2[\cos(\pi - \theta) - \sqrt{-1}\sin(\pi - \theta)]$, et par conséquent

$$\zeta = r\left(\cos\frac{\pi - \theta}{2} - \sqrt{-1}\sin\frac{\pi - \theta}{2}\right).$$

Cela posé, la seconde des équations (1), deviendra, en faisant..... $(1 + n)(1 + n') = b^2\mathrm{N}$,

$$\mathrm{N}(1 + \nu\cos\theta + \nu\sin\theta.\sqrt{-1}) = (1 + \zeta)^2;$$

elle se divise en deux autres, savoir :

$$\mathrm{N}(1 + \nu\cos\theta) = 1 + 2r\sin\tfrac{1}{2}\theta - r^2\cos\theta,$$
$$\mathrm{N}\nu\sin\theta = 2r\cos\tfrac{1}{2}\theta - r^2\sin\theta;$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{N} = 1 - \frac{r}{\sin\frac{1}{2}\theta},$$
$$(r^2 + \nu)\sin\tfrac{1}{2}\theta - r(1 + \nu) = 0;$$

la dernière donne

$$r = \frac{1 + \nu \pm \sqrt{(1 + 2\nu\cos\theta + \nu^2)}}{2\sin\frac{1}{2}\theta} = \frac{1 + \nu \pm}{2\sin\frac{1}{2}\theta} \pm \sigma$$

en faisant pour abréger $\sigma = \sqrt{(1 + 2\nu\cos\theta + \nu^2)}$, et on remarquera que cette valeur qui détermine entièrement ζ est indépendante du module c. On aura ensuite, en prenant le signe inférieur de σ,

$$(1 + n)(1 + n') = b^2\mathrm{N} = \frac{b^2(\sigma - \nu - \cos\theta)}{2\sin^2\frac{1}{2}\theta},$$
$$nn' = \frac{c^2r^2}{\nu} = \frac{c^2(1 + \nu - \sigma)^2}{4\nu\sin^2\frac{1}{2}\theta};$$

j'observe qu'on a $(1 + \nu - \sigma)(1 + \nu + \sigma) = 4\nu\sin^2\frac{1}{2}\theta$; donc

$$nn' = \frac{c^2(1 + \nu - \sigma)}{1 + \nu + \sigma},$$

et par suite

$$n + n' = -\frac{(c^2 + \nu)(1 + \nu - \sigma)}{2\nu\sin^2\frac{1}{2}\theta} = -\frac{2(c^2 + \nu)}{1 + \nu + \sigma},$$
$$(c^2 + n)(c^2 + n') = -\frac{4c^2b^2\nu\cos^2\frac{1}{2}\theta}{(1 + \nu + \sigma)(1 - \nu + \sigma)};$$

or la quantité $1 - \nu + \sigma$ est toujours positive; cela est évident si $\nu = 1$ ou < 1; si ν est > 1, la quantité σ égale à $\sqrt{(1 + 2\nu\cos\theta + \nu^2)}$, est toujours comprise entre $\nu + 1$ et $\nu - 1$; on peut donc faire $\sigma = \nu + \cos\alpha$, et on aura $1 - \nu + \sigma = 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{1}{2}\alpha$, quantité toujours positive. Elle ne serait zéro que dans le cas où l'on aurait $\cos\theta = -1$, mais alors le paramètre proposé m serait réel.

La valeur de nn' étant positive, il faut que n et n' soient tous deux de même signe; celle de $n + n'$ étant négative, il s'ensuit qu'ils sont tous deux négatifs. Enfin, puisque le produit $(c^2 + n)(c^2 + n')$ est négatif, il faut que l'un des facteurs $c^2 + n$, $c^2 + n'$, soit positif, et l'autre négatif. Donc l'un des paramètres n, n', est plus petit que c^2, et l'autre plus grand que c^2.

Soit n le plus petit paramètre et n' le plus grand, on aura par la résolution des équations précédentes, et en faisant $\tau = \sqrt{(c^4 + 2c^2\nu\cos\theta + \nu^2)}$,

$$n = -\left(\frac{c^2 + \nu - \tau}{1 + \nu + \sigma}\right), \quad n' = -\left(\frac{c^2 + \nu + \tau}{1 + \nu + \sigma}\right).$$

Nous savons déjà qu'on peut supposer $n = -c^2\sin^2\lambda$, ainsi l'angle λ sera donné par la formule

$$\sin^2\lambda = \frac{c^2 + \nu - \tau}{c^2(1 + \nu + \sigma)} = \frac{1 + \nu - \sigma}{c^2 + \nu + \tau}.$$

Quant à l'autre paramètre n', il doit être négatif et plus grand que c^2; mais il faut encore que $1 + n'$ soit positif; car puisqu'on a $(1 + n)(1 + n') = \frac{b^2(\sigma - \nu - \cos\theta)}{2\sin^2\frac{1}{2}\theta}$, il est clair que $1 + n'$ aura le même signe que $\sigma - \nu - \cos\theta$. Soit 1° $\nu + \cos\theta$ positif $= k$, on aura $\sigma - \nu - \cos\theta = \sigma - k = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{\sigma^2 - k^2}{\sigma + k} = \frac{\sin^2\theta}{\sigma + k}$, quantité positive; soit 2° $\nu + \cos\theta$ négatif $= -k$, on aura $\sigma - \nu - \cos\theta = \sigma + k$, quantité encore positive. Donc dans tous les cas $1 + n'$ est positif; et puisque $c^2 + n'$ est négatif, il s'ensuit qu'on pourra toujours faire $n' = -1 + b^2\sin^2\mu$, et l'angle μ sera déterminé directement par la formule

$$\sin^2\mu = \frac{b^2 + \sigma - \tau}{b^2(1 + \nu + \sigma)} = \frac{2(1 + \nu\cos\theta + \sigma)}{(1 + \nu + \sigma)(b^2 + \sigma + \tau)}.$$

Les valeurs de n et de n' étant ainsi trouvées, on aura celles des coefficiens ζ et k comme il suit:

$$\zeta = -\frac{2\nu\sin\frac{1}{2}\theta}{\sigma + \nu + \sigma}\left(\sin\tfrac{1}{2}\theta - \sqrt{-1}\cos\tfrac{1}{2}\theta\right),$$

$$k = \frac{\sigma + \nu - 1}{\sigma + \nu + 1}\left(c^2 + \nu\cos\theta + \nu\sin\theta.\sqrt{-1}\right).$$

Il ne reste donc plus pour achever la solution que de déterminer les coefficiens A, A′, B, ce qu'on fera par les formules du n° 118.

131. Cette solution a l'avantage de faire connaître immédiatement par des formules assez simples les paramètres réels n et n' des fonctions par lesquelles peut être exprimée toute fonction Πm dont le paramètre est imaginaire; on trouve ainsi par une seule formule l'expression de la fonction Πm; mais le calcul des coefficiens est plus compliqué que dans la première méthode, et il paraît que celle-ci mérite la préférence.

Si on applique cette nouvelle solution au second exemple, on aura..... $\sigma = b$, $\tau = b\nu$, ce qui donnera $n = \frac{b\nu - c^2 - \nu}{1 + b + \nu} = -1 + b$, et $n' = \ldots\ldots$ $-\left(\frac{c^2 + \nu + b\nu}{1 + b + \nu}\right) = -1 + b^2 \sin^2\mu$, $\sin\mu = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta}{1 + b + \nu}$. La fonction Πn dont le paramètre $n = -1 + b$, s'exprime par la fonction de première espèce F, jointe à une quantité logarithmique (art. 55); ainsi la fonction Πm dont le paramètre est imaginaire s'exprime par ces deux quantités et par la fonction $\Pi n'$ dont le paramètre est réel et de la forme $-1 + b^2 \sin^2\mu$, laquelle sera accompagnée de l'intégrale $\int \frac{dp}{1 + kp^2}$, où k est imaginaire. On voit que le tout formera une expression plus composée que celle qui résulte de la première méthode, c'est pourquoi nous n'entrerons point dans le détail de son développement.

132. Nous observerons enfin que la formule qui a fourni deux solutions du problème que nous nous sommes proposé dans ce chapitre, n'est pas la seule qui puisse être employée à cet usage, et qu'il en est plusieurs autres qui conduiraient au même but; mais il nous suffira de faire mention de la méthode suivante dont l'application pourrait dans certains cas présenter quelques avantages.

Ayant pris deux coefficiens constans ζ et k, soit $p = \frac{\Delta \sin\varphi \cos\varphi}{1 + \zeta \sin^2\varphi}$, on aura, en faisant pour abréger $D = 1 + \zeta \sin^2\varphi$, l'équation

$$\frac{dp}{1 + kp^2} = \frac{d\varphi}{\Delta} \cdot \frac{D[1 - 2(1 + c^2)\sin^2\varphi + \zeta c^2 \sin^4\varphi] - 2\zeta\Delta^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi}{D^2 + k\Delta^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi}.$$

Supposons le dénominateur $D^2 + k\Delta^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi = (1 + n\sin^2\varphi)\ldots\ldots$ $(1 + n'\sin^2\varphi)(1 + m\sin^2\varphi)$, on aura les trois équations de condition,

$$\left.\begin{aligned} kc^2 &= nn'm, \\ (1 + \zeta)^2 &= (1 + n)(1 + n')(1 + m), \\ \left(1 + \frac{\zeta}{c^2}\right)^2 &= \left(1 + \frac{n}{c^2}\right)\left(1 + \frac{n'}{c^2}\right)\left(1 + \frac{m}{c^2}\right), \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

au moyen desquelles, étant donnés les deux paramètres n et n', on pourra déterminer le troisième m et les deux constantes ζ et k, tels qu'on ait entre les fonctions Πn, $\Pi n'$, Πm, l'équation

$$\int \frac{dp}{1+kp^2} = \frac{\zeta}{k} F + A\Pi n + A'\Pi n' + B\Pi m. \qquad \text{(b)}$$

Appliquons cette formule, comme ci-dessus, au cas de deux paramètres imaginaires $n = \nu(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$, $n' = \nu(\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta)$, où nous pourrons supposer $\nu < c$; car si on avait $\nu > c$, le paramètre n pourrait, en vertu du théorème de l'art. 49, être remplacé par le paramètre $\frac{c^2}{n} = \frac{c^2}{\nu}(\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta)$, où l'on aurait $\frac{c^2}{\nu} < c$.

Dans cette hypothèse, si l'on fait $(1+n)(1+n') = 1 + 2\nu\cos\theta + \nu^2 = \beta^2$, $\left(1+\frac{n}{c^2}\right)\left(1+\frac{n'}{c^2}\right) = 1 + \frac{2\nu\cos\theta}{c^2} + \frac{\nu^2}{c^4} = \gamma^2$, on aura pour déterminer ζ et m les deux équations

$$1 + \zeta = \beta\sqrt{(1+m)},$$
$$1 + \frac{\zeta}{c^2} = \gamma\sqrt{\left(1+\frac{m}{c^2}\right)}.$$

Soit $\sqrt{(1+m)} = x$, ou $m = x^2 - 1$, on aura l'équation $(\beta x - b^2)^2 = \gamma^2(x^2 - b^2)$, d'où résulte

$$x = \frac{\beta \pm \gamma}{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}.$$

On voit d'abord que les deux valeurs de x comprises dans cette formule sont positives; car on a par supposition $\nu < c$, et $\beta^2 - \nu^2\gamma^2 = \ldots \left(\beta^2 + \frac{\nu^2 b^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{\nu^2}{c^2}\right)$. Si on observe de plus que l'équation qui détermine directement m ou $x^2 - 1$, est

$$\left(1 - \frac{\nu^2}{c^2}\right)m^2 + 4m\left(1 - \frac{\nu^2}{c^2}\right)(1 + \nu\cos\theta) - 4\nu^2\sin^2\theta = 0,$$
$$- 4m\beta^2$$

on en conclura que son dernier terme étant négatif, les deux valeurs de m sont l'une positive, l'autre négative, c'est-à-dire que des deux valeurs positives de x, l'une est plus grande que l'unité, l'autre plus petite.

La valeur positive de m pourra être représentée par $\cot^2\mu$; quant à la valeur négative, elle devra être de la forme $-c^2\sin^2\lambda$; car en vertu de l'équation $\left(\frac{\beta x - b^2}{c^2}\right)^2 = \gamma^2\left(1 + \frac{m}{c^2}\right)$, il est visible que $1 + \frac{m}{c^2}$ doit être

positif, et comme dans le cas de m négatif, cette même quantité devra être plus petite que l'unité, on pourra la représenter par $\cos^2\lambda$, ce qui donnera $m = -c^2 \sin^2\lambda$, et l'angle λ sera déterminé par l'équation.... $\gamma \cos\lambda = \pm\left(\frac{bx - b^2}{c^2}\right)$, où l'on devra mettre pour x la plus petite valeur $x = \frac{c - \nu\gamma}{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}$, ce qui donnera $\cos\lambda = \pm\left(\frac{c^2\gamma - \nu c}{c^2 - \nu^2}\right) = \pm\left(\frac{c^2 - b^2}{c^2\gamma + \nu c}\right)$, le signe $\pm$ devant être déterminé de manière que $\cos\lambda$ soit positif; λ étant connu, on aura μ par l'équation

$$\sin\lambda \cot\mu = \frac{2\nu \sin\theta}{\sqrt{(c^2 - \nu^2)}}.$$

On voit maintenant la possibilité d'exprimer toute fonction de troisième espèce, dont le paramètre n est imaginaire, par le moyen de deux fonctions de même espèce, dont les paramètres sont réels, l'une ayant le paramètre positif $m = \cot^2\mu$, l'autre ayant le paramètre négatif $m' = -c^2 \sin^2\lambda$.

Il n'y a de différence entre cette solution et la précédente, que dans la valeur du paramètre d'espèce circulaire, qui est maintenant positif et représenté par $\cot^2\mu$, tandis que dans l'autre solution il était négatif et de la forme $-1 + b^2 \sin^2\mu$; mais on sait que ces deux formes sont réductibles l'une et l'autre, et qu'ainsi il n'y a aucune différence essentielle dans les deux solutions.

Quant au développement des formules pour déterminer les coefficiens A, A', B, et achever la solution, il ne saurait maintenant offrir aucune difficulté, et nous ne croyons pas devoir nous y arrêter.

133. *Conclusion.* Puisque toute fonction elliptique de troisième espèce, dont le paramètre est imaginaire, peut se réduire à deux fonctions de la même espèce, dont les paramètres sont réels, il s'ensuit:

1°. Que toute fonction complète de troisième espèce, dont le paramètre est imaginaire, peut toujours se réduire aux fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce.

2°. Que toute fonction de cette sorte, non complète, mais dont l'amplitude φ est telle qu'on ait $F(c, \varphi) = kF'c$, k étant un nombre rationnel, pourra également s'exprimer par des fonctions de la première et de la seconde espèce.

3°. Qu'une fonction Πn, dont le paramètre est imaginaire, pourra se réduire indéfiniment à la première espèce, si l'on peut satisfaire en même temps aux deux conditions nécessaires pour que les fonctions Πm, $\Pi m'$,

dont elle dépend, soient susceptibles d'une semblable réduction. On a déjà vu un exemple de ces réductions (art. 124), et il serait facile d'en produire plusieurs autres.

CHAPITRE XXV.

D'un symptôme général pour reconnaître si deux fonctions données de troisième espèce, qui ne diffèrent que par les paramètres, peuvent se réduire l'une à l'autre.

134. Nous avons admis trois formes dans les paramètres, savoir, $n = \cot^2\theta$, $n = -1 + b^2 \sin^2\theta$, $n = -c^2 \sin^2\theta$; et nous avons fait voir que toute fonction qui se rapporte à la première forme, peut être convertie en une fonction qui se rapporte à la seconde forme, et réciproquement. Cette conversion se fait par la formule du n° 54, et sans rien changer aux deux autres élémens de chaque fonction, qui sont le module c et l'amplitude φ. Mais une fonction dont le paramètre appartient à la troisième forme, ne peut jamais être réduite qu'à une fonction dont le paramètre est de la même forme. C'est pourquoi nous nous bornerons à comparer successivement, pour les trois formes du paramètre, deux fonctions qui se rapportent à une même forme.

Soit 1°. $n = \cot^2\theta$; la formule (i') du n° 106 prouve que la fonction $\Pi(\cot^2\theta, c, \varphi)$ peut se réduire à la fonction $\Pi(\cot^2\varphi, b, \theta)$ qui diffère de la première par ses trois élémens. Semblablement la fonction $\Pi(\cot^2\lambda, c, \varphi)$ pourra se réduire à la fonction $\Pi(\cot^2\varphi, b, \lambda)$; mais les fonctions $\Pi(\cot^2\varphi, b, \theta)$, $\Pi(\cot^2\varphi, b, \lambda)$ qui ne diffèrent que par l'amplitude, peuvent se comparer entre elles et avec la fonction complète $\Pi^1(\cot^2\varphi, b)$, d'une infinité de manières par les formules des n°s 56 et 59. Supposons en général qu'on ait l'équation

$$iF(b, \lambda) \pm kF(b, \theta) = lF^1(b),$$

i, k, l étant des nombres entiers; alors il s'ensuivra par les principes connus,

$$i\Pi(\cot^2\varphi, h, \lambda) \pm k\Pi(\cot^2\varphi, b, \theta) = l\Pi^1(\cot^2\varphi, b) + W,$$

W étant une quantité déterminable par arcs de cercle. Mais la fonction complète de troisième espèce $\Pi^1(\cot^2\varphi, b)$ est réductible aux fonctions de la première et de la seconde espèce; donc l'équation précédente donne le moyen de réduire l'une à l'autre les deux fonctions $\Pi(\cot^2\varphi, b, \lambda)$, $\Pi(\cot^2\varphi, b, \theta)$. Donc en général les deux fonctions $\Pi(\cot^2\theta, c, \varphi)$, $\Pi(\cot^2\lambda, c, \varphi)$ pourront se réduire l'une à l'autre, si les angles θ et λ des paramètres sont tels qu'on ait $i\mathrm{F}(b, \lambda) \pm k\mathrm{F}(b, \theta) = l\mathrm{F}^1(b)$, i, k, l étant des nombres entiers à volonté.

Soit 2°. $n = -1 + b^2\sin^2\theta$, la fonction $\Pi(n, c, \varphi)$ pourra se réduire à la fonction $\Pi(b^2\tang^2\varphi, b, \theta)$ par la formule du n° 111. De même si l'on a $n' = -1 + b^2\sin^2\lambda$, la fonction $\Pi(n', c, \varphi)$ pourra se réduire à la fonction $\Pi(b^2\tang^2\varphi, b, \lambda)$. Mais on verra, comme dans le cas précédent, que les deux fonctions $\Pi(b^2\tang^2\varphi, b, \theta)$, $\Pi(b^2\tang^2\varphi, b, \lambda)$, peuvent se réduire l'une à l'autre, si les angles θ et λ, déduits des paramètres n et n', sont tels qu'on ait $i\mathrm{F}(b, \lambda) \pm k\mathrm{F}(b, \theta) = l\mathrm{F}^1(b)$, k, i, l étant des entiers. Donc cette condition ayant lieu, il sera toujours possible de réduire l'une à l'autre les deux fonctions $\Pi(n, c, \varphi)$, $\Pi(n', c, \varphi)$.

Soit 3°. $n = -c^2\sin^2\theta$, la fonction $\Pi(-c^2\sin^2\theta, c, \varphi)$ pourra se réduire à la fonction $\Pi(-c^2\sin^2\varphi, c, \theta)$ par la formule du n° 115; semblablement la fonction $\Pi(-c^2\sin^2\lambda, c, \varphi)$ pourra se réduire à la fonction $\Pi(-c^2\sin^2\varphi, c, \lambda)$. Supposons qu'entre les angles θ et λ, déduits des paramètres, on ait la relation $i\mathrm{F}(c, \lambda) \pm k\mathrm{F}(c, \theta) = l\mathrm{F}^1(c)$, i, k, l étant des entiers; alors on aura par les principes connus,

$$i\Pi(-c^2\sin^2\varphi, c, \lambda) \pm k\Pi(-c^2\sin^2\varphi, c, \theta) = l\Pi^1(-c^2\sin^2\varphi, c) + W,$$

W étant une quantité déterminable par logarithmes. Donc la fonction $\Pi(-c^2\sin^2\varphi, c, \lambda)$ pourra être exprimée par la fonction $\Pi(-c^2\sin^2\varphi, c, \theta)$, et réciproquement. Donc en général, si la condition mentionnée a lieu, les deux fonctions $\Pi(-c^2\sin^2\theta, c, \varphi)$, $\Pi(-c^2\sin^2\lambda, c, \varphi)$ seront réductibles l'une à l'autre.

On voit directement un exemple de cette réduction dans la formule du n° 55. Mais le symptôme général que nous venons d'indiquer, donne les moyens de multiplier à l'infini ces sortes de comparaisons, et prouve que toute fonction donnée de troisième espèce peut être transformée en une infinité d'autres qui n'en différeront que par le paramètre.

La formule du n° 49, qui est la plus simple et la plus remarquable des formules de comparaison, est comprise dans le symptôme général donné pour

les deux premières formes, puisqu'en faisant $n = \cot^2 \theta$ et $\frac{c^2}{n} = \cot^2 \lambda$, on a entre les angles θ et λ la relation $c \tang \theta \tang \lambda = 1$, d'où résulte $F(b, \theta) + F(b, \lambda) = F^1 b$.

La même formule servirait à comparer les deux fonctions Πn et $\Pi \frac{c^2}{n}$ dans le cas où on aurait $n = -1 + b^2 \sin^2 \theta$, $\frac{c^2}{n} = -1 + b^2 \sin^2 \lambda$, car il en résulte encore $1 = c \tang \theta \tang \lambda$.

CHAPITRE XXVI.

De l'intégrale $Z = \int \frac{dz}{(1+pz^2)\sqrt[3]{(1+qz^2)}}$.

135. Cette intégrale se ramène aisément aux fonctions elliptiques en faisant $1 + qz^2 = y^3$; mais le calcul mérite d'être développé dans quelques cas particuliers, à cause des réductions qu'ils présentent et qui peuvent jeter un nouveau jour sur l'usage des fonctions elliptiques.

Supposons d'abord q positif, p étant à volonté positif ou négatif, si on fait $\sqrt[3]{(1+qz^2)} = y$, et $a^3 = \frac{q}{p} - 1$, on aura pour première transformée

$$Z = \frac{3\sqrt{q}}{2p} \int \frac{y\,dy}{(a^3+y^3)\sqrt{(y^3-1)}}.$$

Cette intégrale peut se décomposer en deux autres; soit pour cet effet,

$$P = \int \frac{y\,dy}{(a^2-ay+y^2)\sqrt{(y^3-1)}},$$

$$Q = \int \frac{y^2\,dy}{(a^3+y^3)\sqrt{(y^3-1)}},$$

et on aura

$$Z = \frac{3\sqrt{q}}{2ap}(P - Q).$$

L'intégrale Q se trouve immédiatement; car si on met au lieu de y sa valeur en fonction de z, on aura

$$Q = \frac{2p}{3\sqrt{q}} \int \frac{dz}{1+pz^2} = \frac{2\sqrt{p}}{3\sqrt{q}} \text{arc tang } (z\sqrt{p}).$$

Ainsi la quantité Q est donnée par un arc de cercle si p est positif, et par un logarithme si p est négatif. Tout se réduit donc à trouver la valeur de l'autre intégrale P.

Pour cela, soit $y = 1 + x^2$, on aura

$$P = \int \frac{2(1+x^2)\,dx}{(x^4+(2-\alpha)x^2+\alpha^2-\alpha+1)\sqrt{(x^4+3x^2+3)}}.$$

Cette intégrale dépend en général des fonctions elliptiques dont le paramètre est imaginaire, et nous avons donné pour cet objet les formules nécessaires. Mais dans le cas de $\alpha = 2$, l'intégrale P ne dépend que d'une fonction de troisième espèce dont le paramètre est réel, et c'est ce cas dont nous allons développer le calcul.

136. Ayant donc fait $\alpha = 2$, ou $q = 9p$, il s'agira de trouver l'intégrale

$$P = \int \frac{2(1+x^2)\,dx}{(x^4+3)\sqrt{(x^4+3x^2+3)}}.$$

Pour cela, soit $r = \sqrt[4]{3}$ et $x = r \text{ tang } \frac{1}{2}\varphi$; soit de plus $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})} = \sin 15^\circ$, on aura la transformée

$$P = \int \frac{d\varphi}{\Delta}\left(\frac{1-r^2}{6r} + \frac{1}{6r}\cdot\frac{r^2+\cos\varphi}{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}\right),$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{1-r^2}{6r}F + \frac{r}{6}\Pi\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6r}\int \frac{d\varphi\cos\varphi}{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)\,\Delta}.$$

Pour avoir cette dernière intégrale, soit $\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)} = u\sin\varphi$, la différentielle $\frac{d\varphi\cos\varphi}{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)\Delta}$ deviendra $-\frac{du}{u^2-\frac{1}{4}r^2}$, et son intégrale sera..... $\frac{1}{r}\log\left(\frac{u+\frac{1}{2}r}{u-\frac{1}{2}r}\right)$; on a donc

$$P = \frac{1-r^2}{6r}F + \frac{r}{6}\Pi\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6r^2}\log\left(\frac{\Delta+\frac{1}{2}r\sin\varphi}{\Delta-\frac{1}{2}r\sin\varphi}\right).$$

On n'ajoute point de constante, parce que cette intégrale s'évanouit lorsque $\varphi = 0$, valeur qui répond à celle de $z = 0$.

La valeur de P dépend donc de la fonction elliptique de troisième espèce $\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)$, et il faut examiner si, à raison du paramètre $-\frac{1}{2}$, cette fonction ne pourrait pas se réduire indéfiniment à la première espèce.

Ayant le module $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})}$, et son complément $b = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$,

on voit immédiatement que le paramètre $n = -\frac{1}{2}$ se rapporte à la forme $n = -1 + b^2 \sin^2\theta$, en faisant $\sin^2\theta = \frac{n+1}{b^2} = 4 - 2\sqrt{3}$, ou $\sin\theta = \sqrt{3} - 1$. Or cette valeur de $\sin\theta$ est celle qui, suivant l'article 24, satisfait à l'équation $F(b, \theta) = \frac{1}{3} F'(b)$. Donc la réduction de la fonction $\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)$ est possible, et elle s'effectuera par la formule du n° 113 qui donne

$$\Pi\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{V\Delta(b, \theta)}{b^2 \sin\theta \cos\theta}\right) F(c, \varphi) + \frac{W\Delta(b, \theta)\Delta(b, \varphi)}{b^2 \sin\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi}.$$

Il s'agit donc de faire les substitutions dans cette formule; or la valeur connue de θ donne $\frac{\Delta(b, \theta)}{b^2 \sin\theta \cos\theta} = \frac{2}{r}$; on a ensuite par les formules du n° 60 $V = \frac{1}{2} b^2 \sin\theta \sin\theta_2 (1 + \sin\theta)$, $\cos\theta_2 = 1 - \sin\theta = 2 - \sqrt{3}$, $\sin\theta_2 = r \sin\theta$; donc $V = \frac{1}{2r}$. On a en second lieu par les formules du même article,

$$W = \frac{1}{3\sqrt{\alpha'}} \text{arc tang} \frac{n'\sqrt{\alpha'} \sin\theta \sin\theta_2}{1 + n'} + \frac{1}{3\sqrt{\alpha'}} \text{arc tang} \frac{n'\sqrt{\alpha'} \sin^2\theta \sin\theta_2}{1 + n' - n' \cos^2\theta \cos\theta_2}.$$

Substituant les valeurs de θ et θ_2, faisant de plus $n' = b^2 \tang^2 \varphi$ et $\sqrt{\alpha'} = \frac{\Delta}{\sin\varphi \cos\varphi}$, on aura

$$W = \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{3\Delta} \text{arc tang} \frac{r \tang\varphi}{2\Delta} + \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{3\Delta} \text{arc tang} \frac{r\Delta \tang\varphi}{1 + r^2\Delta^2}.$$

Donc la fonction $\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)$ se réduit à la première espèce par la formule

$$\Pi\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) F + \frac{2}{3r} \text{arc tang} \frac{r \tang\varphi}{2\Delta} + \frac{2}{3r} \text{arc tang} \frac{r\Delta \tang\varphi}{1 + r^2\Delta^2}.$$

Substituant cette valeur dans celle de l'intégrale P, on aura enfin

$$P = \frac{1}{6r} \log\left(\frac{\Delta + \frac{1}{2} r \sin\varphi}{\Delta - \frac{1}{2} r \sin\varphi}\right) + \frac{1}{9} \text{arc tang} \frac{r \tang\varphi}{2\Delta} + \frac{1}{9} \text{arc tang} \frac{r\Delta \tang\varphi}{1 + r^2\Delta^2}.$$

D'où l'on voit que l'intégrale P devient finalement indépendante des fonctions elliptiques, et que son expression ne renferme que des arcs de cercle et des logarithmes. Il en est par conséquent de même de l'intégrale proposée Z dans le cas où l'on a $\alpha = 2$, ou $\frac{\alpha}{p} = 9$.

Si on veut avoir la valeur de Z lorsque $z = \infty$, il faudra faire $\varphi = \pi$, ce qui donne $P = \frac{2\pi}{9}$; d'ailleurs dans le même cas on a $Q = \frac{\pi}{9}$; donc..... $Z = \frac{\pi}{4\sqrt{p}}$.

et qu'ensuite pour faire disparaître les puissances impaires de la variable sous le radical, on suppose $x = \frac{p+qy}{1+y}$, on aura pour déterminer p et q, les équations

$$2pq + \lambda(p+q) + 2\mu = 0,$$
$$2pq - \lambda(p+q) + 2\nu = 0,$$

lesquelles donneront toujours pour p et q des valeurs réelles, en prenant convenablement λ, μ, ν (art. 5).

Cela posé, si l'on fait pour abréger

$$\begin{aligned} M &= p^2 - \lambda p + \nu = (p - \tfrac{1}{2}\lambda)(p-q), \\ N &= q^2 - \lambda q + \nu = (q - \tfrac{1}{2}\lambda)(q-p), \\ P &= p^2 + \lambda p + \mu = (p + \tfrac{1}{2}\lambda)(p-q), \\ Q &= q^2 + \lambda q + \mu = (q + \tfrac{1}{2}\lambda)(q-p), \end{aligned}$$

on aura

$$x^2 + \lambda x + \mu = \frac{P+Qy^2}{(1+y)^2},$$
$$x^2 - \lambda x + \nu = \frac{M+Ny^2}{(1+y)^2},$$

et la transformée en y sera

$$V = (q-p)\int \frac{dy}{(1+y)^2} \cdot \frac{(p+qy)^2 + m(1+y)^2}{\sqrt{[4(P+Qy^2)(M+Ny^2)]}},$$

soit pour abréger $Y = \sqrt{[4(P+Qy^2)(M+Ny^2)]}$, on aura par le développement de la quantité précédente

$$V = (m+q^2)(q-p)\int \frac{dy}{Y} - 2q(q-p)^2 \int \frac{dy}{(1+y)Y} + (q-p)^3 \int \frac{dy}{(1+y)^2 Y},$$

mais par la différentiation, on a

$$d\left(\frac{Y}{1+y}\right) = \frac{4dy}{Y}\left[QN(y^2-1) + \frac{MQ+NP+2QN}{1+y} - \frac{(M+N)(P+Q)}{(1+y)^2}\right],$$

ou en substituant les valeurs de M, N, P, Q,

$$d\left(\frac{Y}{1+y}\right) = (q^2 - \tfrac{1}{4}\lambda^2)(q-p)^2 \frac{(y^2-1)4dy}{Y} + 2q(q-p)^3 \frac{4dy}{(1+y)Y} - (q-p)^4 \frac{4dy}{(1+y)^2 Y},$$

donc

$$V = \frac{1}{4(q-p)} \cdot \frac{Y}{1+y} + (q^2 - \tfrac{1}{4}\lambda^2)(q-p)\int \frac{y^2 dy}{Y} + (m + \tfrac{1}{4}\lambda^2)(q-p)\int \frac{dy}{Y}.$$

Or les intégrales $\int \frac{dy}{Y}$, $\int \frac{y^2 dy}{Y}$, se ramènent par les transformations connues, aux fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce, donc l'intégrale V ne dépend généralement que de ces deux fonctions.

pourvu qu'on prenne l'intégrale depuis $v = t = \frac{x\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{(1+x^3)}}$ jusqu'à .... $v = u = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{(1+x^3)}}$. L'intégration étant donc effectuée entre ces limites toutes deux variables, on aura généralement

$$Z = \tfrac{1}{6}\log\left(\frac{1+u+u^2}{1-2u+u^2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\text{ arc tang }\frac{2u+1}{\sqrt{3}}$$
$$-\tfrac{1}{6}\log\left(\frac{1+t+t^2}{1-2t+t^2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\text{ arc tang }\frac{2t+1}{\sqrt{3}}.$$

Si on veut avoir l'intégrale lorsque $z = \infty$, il faudra supposer $\sqrt[3]{(1+x^3)} = \omega$, ω étant infiniment petit; on fera donc $t = -\frac{\sqrt[3]{2}}{\omega}$, et $u = \frac{\sqrt[3]{2}}{\omega}$, ce qui donnera $Z = \frac{\pi\sqrt{3}}{4}$; résultat conforme à celui que nous avons trouvé par l'autre méthode, puisqu'on a dans ce cas $p = \frac{1}{3}$.

138. Revenons maintenant à la formule générale, et supposons que q est négatif, ou, ce qui revient au même, considérons directement la formule

$$Z = \int\frac{dz}{(1-pz^2)\sqrt[3]{(1-qz^3)}},$$

dans laquelle nous supposons q positif, p étant à volonté positif ou négatif. Si on fait $\sqrt[3]{(1-qz^3)} = y$ et $a^3 = \frac{q}{p} - 1$, on aura la transformée

$$Z = \frac{3\sqrt{q}}{2p}\int\frac{-ydy}{(a^3+y^3)\sqrt{(1-y^3)}},$$

qui peut se mettre sous la forme $Z = \frac{3\sqrt{q}}{2ap}(P - Q)$, en faisant

$$P = \int\frac{-ydy}{(a^2-ay+y^2)\sqrt{(1-y^3)}},$$
$$Q = \int\frac{-y^2dy}{(a^3+y^3)\sqrt{(1-y^3)}}.$$

On trouve immédiatement la valeur de la seconde intégrale

$$Q = \frac{2p}{3\sqrt{q}}\int\frac{dz}{1-pz^2} = \frac{\sqrt{p}}{3\sqrt{q}}\log\left(\frac{1+z\sqrt{p}}{1-z\sqrt{p}}\right);$$

pour avoir celle de la première, soit $y = 1 - x^2$, on aura la nouvelle transformée

$$P = \int\frac{2(1-x^2)\,dx}{(x^4-(2-a)x^2+a^2-a+1)\sqrt{(x^4-3x^2+3)}}.$$

Cette intégrale dépend en général des fonctions elliptiques dont le paramètre est imaginaire, et elle peut être ramenée à celles dont le paramètre est réel. Mais dans le cas de $\alpha = 2$, la solution se simplifie beaucoup et devient tout à fait indépendante des fonctions elliptiques; c'est ce qu'on vérifiera aisément en traitant la formule

$$P = \int \frac{2(1-x^2)\,dx}{(x^4+3)\sqrt{(x^4-3x^2+3)}},$$

comme celle de l'exemple précédent.

139. On peut aussi, dans le même cas, parvenir directement au résultat de l'intégration sans le secours des fonctions elliptiques. Et d'abord comme la valeur de q peut être prise à volonté, supposons $q = 3$, ce qui donnera $p = \frac{1}{3}$, et la formule proposée deviendra

$$Z = \int \frac{3dz}{(3-z^2)\sqrt[3]{(1-3z^2)}}.$$

Soit $\sqrt[3]{(1-3z^2)} = 1 - \frac{z}{x}$, on aura la transformée

$$Z = \frac{3}{2}\int \frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)(3x^2-1)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{3x^4+1}{3x^4+2x^2-1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(3x^4+6x^2-1)}}.$$

La première partie est rationnelle; la seconde semble devoir se décomposer en deux fonctions elliptiques de la troisième espèce, à cause des deux facteurs du dénominateur $3x^4+2x^2-1$. Mais si on examine les choses avec plus d'attention, on trouvera qu'en faisant $\sqrt{(3x^4+6x^2-1)} = px$, la seconde partie devient $-\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{dp}{p^2-4}$, de sorte que la valeur totale de Z est

$$Z = \frac{3}{2}\int \frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)(3x^2-1)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{dp}{p^2-4}.$$

Ainsi cette intégrale se détermine entièrement par les arcs de cercle et les logarithmes.

L'intégrale $\int \frac{dz}{(3\pm z^2)\sqrt[3]{(1\pm z^2)}}$ que nous venons de déterminer dans ses deux différens cas, se trouve mentionnée page 116, dans la liste que Fuss a donnée des ouvrages d'Euler; mais le mémoire qui la concerne n'a pas encore été publié. Nous avons voulu faire voir par un exemple aussi remarquable, que la théorie des fonctions elliptiques conduit d'une manière sûre aux expressions les plus simples des intégrales qui s'y rapportent.

140. Indépendamment des deux cas dont nous venons de parler, il y en a un troisième où l'intégrale Z ne dépend que des arcs de cercle et des logarithmes. C'est celui où l'on aurait

$$Z = \int \frac{3dz}{(3 - z^2)\sqrt[3]{(1 + z^2)}},$$

intégrale qui se rapporte à la formule générale du n° 135, en faisant $q = 1$, $p = -\frac{1}{3}$ et $\alpha^2 = -4$. On ne saurait alors éviter de rencontrer dans l'intégrale P des fonctions elliptiques dont le paramètre est imaginaire; mais la réduction de ces intégrales conduira à un résultat entièrement indépendant des fonctions elliptiques. Nous n'entrerons point dans le détail de ces réductions, et nous nous bornerons à prouver par une autre voie, que l'intégrale Z peut être déterminée par les arcs de cercle et les logarithmes.

Pour cet effet, soit $1 + z^2 = 4y^3$, on aura la transformée

$$Z = \frac{9}{2\sqrt[3]{4}} \int \frac{ydy}{(1 - y^3)\sqrt{(4y^3 - 1)}}.$$

Mais si on considère l'intégrale $T = \int \frac{tdt}{(t^3 - 1)^{\frac{2}{3}}}$, et qu'on fasse $\sqrt[3]{(t^3 - 1)} = \frac{t}{y} - 1$, on aura $t = \frac{2y\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{(4y^3 - 1)}}$, $\frac{t^2dt}{(t^3 - 1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{dt}{y} - \frac{tdy}{yy}$;

donc

$$T = \frac{3}{2}\int \frac{ydy}{1 - y^3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\int \frac{ydy}{(1 - y^3)\sqrt{(4y^3 - 1)}}.$$

Ainsi on connaîtra l'intégrale Z si T est connu; or il suffit de faire $t^3 = \frac{1}{1 - u^3}$, et on aura $T = \int \frac{du}{1 - u^3}$; donc Z se déterminera par l'équation

$$Z\,\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}} = \int \frac{du}{1 - u^3} - \frac{3}{2}\int \frac{ydy}{1 - y^3},$$

et par conséquent Z peut s'exprimer par les arcs de cercle et les logarithmes.

141. Revenons maintenant à la valeur générale de P (art. 135), afin d'en faire le développement pour toute valeur de α; j'observe d'abord qu'on a identiquement

$$\int \frac{3y^2dy}{(\alpha^3 + y^3)\sqrt{(y^3 - 1)}} = \int \frac{dy}{(\alpha + y)\sqrt{(y^3 - 1)}} + \int \frac{(2y - \alpha)\,dy}{(\alpha^2 - \alpha y + y^2)\sqrt{(y^3 - 1)}}.$$

Soit $y = 1 + x^2$, on pourra faire le premier membre $= 3Q$, Q étant donné par un arc de cercle ou un logarithme, et on aura

$$\int \frac{2-\alpha+2x^2}{x^4+(2-\alpha)x^2+1-\alpha+\alpha^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(x^4+3x^2+3)}} = \tfrac{3}{2}Q - \int \frac{dx}{(\alpha+1+x^2)\sqrt{(x^4+3x^2+3)}}.$$

Ainsi l'intégrale X formant le premier membre de cette équation, s'exprimera par la quantité connue Q et l'intégrale $T = \int \frac{dx}{(\alpha+1+x^2)\sqrt{(x^4+3x^2+3)}}$ qui ne dépend que d'une fonction de la troisième espèce dont le paramètre est réel. Cherchons l'expression de cette intégrale.

Soit comme ci-dessus $r^4 = 3$, $c^2 = \frac{2-r^2}{4}$, $x = r \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi$, on aura $T = \frac{1}{2r}\int \frac{d\varphi}{\Delta} \cdot \frac{1}{\alpha+1+r^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi}$: or par le développement du dernier facteur on obtient

$$\frac{\alpha+1-r^2}{\alpha+1+r^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi} = 1 - \frac{2r^2[\alpha+1+r^2-(\alpha+1-r^2)\cos\varphi]}{4r^2(\alpha+1)+(\alpha+1-r^2)^2 \sin^2\varphi}.$$

Soit donc $n = \frac{(\alpha+1-r^2)^2}{4r^2(\alpha+1)}$, on aura l'intégrale cherchée

$$T = \frac{1}{2r(\alpha+1-r^2)}\left[F - \frac{(\alpha+1+r^2)}{2(\alpha+1)}\Pi n\right] + \frac{1}{4r(\alpha+1)}\int \frac{d\varphi \cos\varphi}{1+n\sin^2\varphi}.$$

On voit donc que l'intégrale T s'exprime au moyen de la fonction de troisième espèce $\Pi(n)$ dont le paramètre est réel.

Cette intégrale s'exprimerait encore plus simplement si on avait.... $\alpha = r^2 - 1 = \sqrt{3} - 1$, car de cette valeur on déduit :

$$T = \frac{1}{2r^3}\int \frac{d\varphi}{\Delta} \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{1}{4r^3}\left[F + \int \frac{d\varphi \cos\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}\right].$$

Le cas de $\alpha = -1$ donnerait également un résultat très simple; mais ce cas ne saurait avoir lieu, puisqu'il supposerait $q = 0$.

Le cas de $\alpha = 0$ donne $T = \frac{1}{2}Q$ et $P = Q$, ce qui laisserait Z indéterminé, mais alors on a directement $Z = \frac{3}{2\sqrt{q}}\int \frac{dy}{y^2\sqrt{(y^3-1)}}$; or..... $\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(y^3-1)}} = \frac{1}{y}\sqrt{(y^3-1)} - \frac{1}{2}\int \frac{y dy}{\sqrt{(y^3-1)}}$, et cette dernière intégrale ne dépend que des fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce.

La valeur de T étant connue on aura l'intégrale $X = \frac{3}{2}Q - T$, laquelle tiendra lieu de la seconde équation que donnerait la méthode générale d'intégration (121); mais elle ne fournit aucune lumière pour la première intégrale qui, soit seule, soit combinée avec celle-ci, donnera l'intégrale proposée P. C'est pourquoi il faut faire tout au long les calculs qui conduisent à cette seconde intégrale.

142. La substitution de $x = r \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi$ dans la valeur de P, donnera, en faisant $c^2 = 1 - a + a^2$,

$$\frac{2dx}{\sqrt{(x^4+3x^2+3)}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta} \frac{1+x^2}{x^4+(2-a)x^2+c^2}$$
$$= \frac{(1+\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi}{2(c^2+3)+[(2-a)r^2-c^2-3]\sin^2\varphi + 2\cos\varphi\,(c^2-3)}.$$

Il faut multiplier les deux termes de cette fraction par la quantité qui résulte du dénominateur, en changeant le signe de $\cos\varphi$; alors le dénominateur du produit sera

$$48c^2 + [4r^2(2-a)(c^2+3) - 48c^2]\sin^2\varphi + [c^2+3-r^2(2-a)^2]\sin^4\varphi.$$

Soit ce dénominateur $= 48c^2(1 + 2\nu\cos\theta\sin^2\varphi + \nu^2\sin^4\varphi)$, on aura

$$\nu = \frac{c^2+3-r^2(2-a)}{4cr^2} = \frac{a^2+(r^2-1)a+(r^2-1)^2}{4cr^2},$$

$$\nu\cos\theta = \frac{(2-a)(c^2+3)-4c^2r^2}{8c^2r^2}, \quad \nu\sin\theta = \frac{a(1+a)(2-a)}{8c^2}.$$

On voit par cette valeur de $\nu\sin\theta$, que le paramètre ne sera point imaginaire dans trois cas, savoir, lorsque $a = 0$, $a = -1$, $a = 2$.

Soit le nouveau dénominateur $1 + 2\nu\cos\theta\sin^2\varphi + \nu^2\sin^4\varphi = D$, la forme connue du numérateur permettra de supposer

$$\frac{1+x^2}{x^4+(2-a)x^2+c^2} = L + \frac{M+N\sin^2\varphi}{D} + \frac{(M'+N'\sin^2\varphi)\cos\varphi}{D},$$

ce qui donnera en substituant et intégrant

$$P = \frac{L}{r}F(c,\varphi) + \int\frac{M+N\sin^2\varphi}{rD}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta} + \int\frac{(M'+N'\sin^2\varphi)\,d\varphi\cos\varphi}{rD\Delta}.$$

La dernière intégrale dépend des fractions rationnelles; ainsi tout se réduit à obtenir l'intégrale

$$V' = \int\frac{M+N\sin^2\varphi}{1+2\nu\cos\theta\sin\varphi+\nu^2\sin^4\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

D'après les valeurs connues de ν et θ, il faut chercher l'expression des paramètres m et m'; on aura pour cet effet

$$h = \frac{b^2\nu}{r^2+2c^2\nu\cos\theta+c^2} = \frac{(2r^2+3)[c^2+3-r^2(2-a)]}{c(a^2+2a+4)},$$

$$H = \frac{(a+1)[c^2+3+r^2(2-a)]}{c(a^2+2a+4)},$$

$$\frac{\xi}{r} = H - h = \sin\lambda = \frac{a^3-3a^2+4-3r^2a^2}{c(a^2+2a+4)}; \quad m = -c^2\sin^2\lambda;$$

$$\cos\lambda = \frac{2br^2\alpha(2-\alpha)\sqrt{(\alpha+1)}}{\zeta(\alpha^2+2\alpha+4)}.$$

Cette dernière valeur suppose $\alpha+1$ positif; si $\alpha+1$ était négatif, la valeur de m serait plus grande que c^2 et alors m serait de la forme $-1+b^2\sin^2\mu$, tandis que m' serait au contraire de la forme $-c^2\sin^2\lambda$. On aura ensuite dans l'hypothèse de $\alpha+1$ positif,

$$\frac{\zeta'}{2} = -\mathrm{H} - h = -\left(\frac{\alpha+1+r^2}{\zeta}\right),$$

$$m' = -c^2\left(\frac{\alpha+1+r^2}{\zeta}\right)^2 = -1+b^2\sin^2\mu,$$

$$\sin\mu = \frac{\alpha+1-r^2}{\zeta},\quad \cos\mu = \frac{2r\sqrt{(\alpha+1)}}{\zeta},\quad \zeta' = -\nu\sin\mu.$$

Il n'est pas nécessaire de former l'intégrale en ζ', m', etc., parce que cette intégrale, qui contient des arcs de cercle, doit s'accorder avec celle que nous avons déjà trouvée, et c'est ce dont on peut s'assurer, sans faire tous les développemens, en comparant le paramètre négatif $m' = -1+b^2\sin^2\mu$, avec le paramètre positif $n = \frac{(\alpha+1-r^2)^2}{4r^2(\alpha+1)}$. Celui-ci étant désigné par $\cot^2\gamma$, on aura $\cot\gamma = \frac{\alpha+1-r^2}{2r\sqrt{(\alpha+1)}}$, d'où $\tang\frac{1}{2}\gamma = \frac{r}{\sqrt{(\alpha+1)}}$; or on trouvera facilement d'après ces valeurs qu'on a $\mathrm{F}(b,\gamma)+\mathrm{F}(b,\mu) = \mathrm{F}'b$, et qu'ainsi les deux paramètres m' et n dont les angles sont μ et γ, peuvent être réduits l'un à l'autre.

Il reste donc à former la seconde intégrale; pour cela connaissant ν et λ, on aura $\zeta = \nu\sin\lambda$, $m = -c^2\sin^2\lambda$, ce qui servira à calculer les coefficiens

$$\mathrm{B} = \frac{c^2\sin\lambda(\cos^4\lambda - b^2\sin^4\lambda) - \nu(b^2+c^2\cos^4\lambda)}{\sin\lambda(c^4\sin^4\lambda + 2c^2\nu\cos\theta\sin^2\lambda + \nu^2)},$$

$$f = 1 - \frac{1}{\zeta} - \mathrm{B},$$

$$g = m(\mathrm{B}-1) - 2\nu\cos\theta\left(\mathrm{B}+\frac{1}{\zeta}\right) - 2 - \zeta,$$

$$i^2 = -k = (c^4+2c^2\nu\cos\theta+\nu^2)\frac{\cos^2\lambda}{b^2},\quad p = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1+\zeta\sin^2\varphi)\Delta},$$

et on aura l'intégrale

$$\int\frac{f+g\sin^2\varphi}{1+2\nu\cos\theta\sin^2\varphi+\nu^2\sin^4\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+ip}{1-ip}\right) - \frac{1}{\zeta}\mathrm{F} - \mathrm{B}\Pi m.$$

Cette intégrale et celle que nous avons déjà trouvée serviront à déterminer l'intégrale P, mais nous nous contentons d'indiquer le calcul dans lequel

on ne peut guère éviter la prolixité, quand on ne donne aucune valeur particulière à α.

Nous remarquerons que dans les deux cas où l'on aurait $\alpha = r^2 - 1$ ou $\alpha = -r^2 - 1$, le dénominateur $1 + 2\nu \cos\theta \sin^2\varphi + \nu^2 \sin^4\varphi$, se réduirait à $1 - 2c^2 \sin^2\varphi + c^2 \sin^4\varphi$; ainsi les intégrales cherchées P et Z, seraient indépendantes des fonctions elliptiques et pourraient être assignées par les arcs de cercle et les logarithmes. (*Voyez* l'art. 124.)

Enfin, le cas de $\alpha^3 = -4$ dont nous avons déjà parlé, étant traité par les formules générales, on trouverait que $1 + \alpha$ étant négatif, il faut faire $m = -1 + b^2 \sin^2\mu$ et $m' = -c^2 \sin^2\lambda$; ce qui donnerait $\mathfrak{C} = 1 + \sqrt[3]{2}$, $\sin\mu = \sqrt{3} - 1$, $\sin\lambda = \frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt[3]{2}}$. Or, ces valeurs sont précisément celles qui donnent $F(c, \lambda) = \frac{1}{3} F'c$ et $F(b, \mu) = \frac{1}{3} F'b$; on peut donc réduire dans ce cas les fonctions qui ont des paramètres imaginaires aux simples fonctions de la première espèce $F(c, \varphi)$, $F(b, \varphi)$; on trouvera ensuite que ces dernières disparaissent entièrement du calcul, ce qui est conforme au résultat déjà trouvé (art. 140).

CHAPITRE XXVII.

De quelques autres intégrales qui conduisent à des résultats remarquables.

§ Ier. *De l'intégrale* $V = \int \frac{(m + x^2)\,dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \iota x^4)}}$.

143. Cette intégrale, où les deux polynomes du numérateur et du dénominateur manquent de second terme, est généralement réductible aux fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce.

En effet, si l'on décompose le polynome sous le radical en facteurs réels du second degré, de cette manière

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \iota x^4 = \iota(x^2 + \lambda x + \mu)(x^2 - \lambda + \nu),$$

et qu'ensuite pour faire disparaître les puissances impaires de la variable sous le radical, on suppose $x = \frac{p+qy}{1+y}$, on aura pour déterminer p et q, les équations

$$2pq + \lambda(p+q) + 2\mu = 0,$$
$$2pq - \lambda(p+q) + 2\nu = 0,$$

lesquelles donneront toujours pour p et q des valeurs réelles, en prenant convenablement λ, μ, ν (art. 5).

Cela posé, si l'on fait pour abréger

$$\begin{aligned} M &= p^2 - \lambda p + \nu = (p - \tfrac{1}{2}\lambda)(p-q), \\ N &= q^2 - \lambda q + \nu = (q - \tfrac{1}{2}\lambda)(q-p), \\ P &= p^2 + \lambda p + \mu = (p + \tfrac{1}{2}\lambda)(p-q), \\ Q &= q^2 + \lambda q + \mu = (q + \tfrac{1}{2}\lambda)(q-p), \end{aligned}$$

on aura

$$x^2 + \lambda x + \mu = \frac{P+Qy^2}{(1+y)^2},$$
$$x^2 - \lambda x + \nu = \frac{M+Ny^2}{(1+y)^2},$$

et la transformée en y sera

$$V = (q-p)\int \frac{dy}{(1+y)^2} \cdot \frac{(p+qy)^2 + m(1+y)^2}{\sqrt{[4(P+Qy^2)(M+Ny^2)]}},$$

soit pour abréger $Y = \sqrt{[4(P+Qy^2)(M+Ny^2)]}$, on aura par le développement de la quantité précédente

$$V = (m+q^2)(q-p)\int \frac{dy}{Y} - 2q(q-p)^2 \int \frac{dy}{(1+y)Y} + (q-p)^3 \int \frac{dy}{(1+y)^2 Y},$$

mais par la différentiation, on a

$$d\left(\frac{Y}{1+y}\right) = \frac{4dy}{Y}\left[QN(y^2-1) + \frac{MQ+NP+2QN}{1+y} - \frac{(M+N)(P+Q)}{(1+y)^2}\right],$$

ou en substituant les valeurs de M, N, P, Q,

$$d\left(\frac{Y}{1+y}\right) = (q^2 - \tfrac{1}{4}\lambda^2)(q-p)^2 \frac{(y^2-1)4dy}{Y} + 2q(q-p)^3 \frac{4dy}{(1+y)Y} - (q-p)^4 \frac{4dy}{(1+y)^2 Y},$$

donc

$$V = \frac{1}{4(q-p)} \cdot \frac{Y}{1+y} + (q^2 - \tfrac{1}{4}\lambda^2)(q-p)\int \frac{y^2 dy}{Y} + (m + \tfrac{1}{4}\lambda^2)(q-p)\int \frac{dy}{Y}.$$

Or les intégrales $\int \frac{dy}{Y}$, $\int \frac{y^2 dy}{Y}$, se ramènent par les transformations connues, aux fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce, donc l'intégrale V ne dépend généralement que de ces deux fonctions.

144. Considérons maintenant la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{X}}$, dans laquelle $X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4$; et supposons que par la substitution $x = f + \frac{g}{1 - h\cos\varphi}$, cette différentielle devienne $\frac{nd\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}}$, ce qui a lieu en effet dans un grand nombre de cas; voici comment on pourra en déduire une intégrale assez remarquable et analogue à celle que nous venons de déterminer.

Soit $\sigma = 1 - h\cos\varphi$ et $\omega = \frac{g}{\sigma}$, on aura $x = f + \omega$, et en substituant cette valeur dans le polynome X, on pourra supposer $X = \alpha' + \beta'\omega + \gamma'\omega^2 + \delta'\omega^3 + \epsilon'\omega^4$, ce qui donnera $\epsilon' = \epsilon$, $\delta' = \delta + 4f\epsilon$, $\gamma' = \gamma + 3f\delta + 6f^2\epsilon$, etc. On aura ensuite

$$\frac{\sqrt{X}}{x - f} = \left(\frac{\alpha'}{\omega^2} + \frac{\beta'}{\omega} + \gamma' + \delta'\omega + \epsilon'\omega^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

différenciant cette quantité et observant que $d\omega = dx$, on aura

$$d\left(\frac{\sqrt{X}}{x - f}\right) = \left(\epsilon'\omega^2 + \tfrac{1}{2}\delta'\omega - \frac{\beta'}{2\omega} - \frac{\alpha'}{\omega^2}\right)\frac{dx}{\sqrt{X}};$$

donc en intégrant

$$\int\left(\epsilon'\omega^2 + \tfrac{1}{2}\delta'\omega\right)\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{x - f} + \int\left(\frac{\alpha'}{\omega^2} + \frac{\beta'}{2\omega}\right)\frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Substituant dans le premier membre les valeurs $\omega = x - f$, $\epsilon' = \epsilon$, $\delta' = \delta + 4f\epsilon$, et dans le second les valeurs $\omega = \frac{g}{\sigma}$, $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{nd\varphi}{\Delta}$, on aura

$$\int\left(\epsilon x^2 + \tfrac{1}{2}\delta x - \epsilon f^2 - \tfrac{1}{2}\delta f\right)\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{x - f} + \int\left(\frac{\alpha'}{g^2}\sigma^2 + \frac{\beta'}{2g}\sigma\right)\frac{nd\varphi}{\Delta}.$$

Pour obtenir de nouvelles réductions, j'observe que l'équation $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{nd\varphi}{\Delta}$ donne $X = (1 - c^2\sin^2\varphi)\frac{dx^2}{n^2d\varphi^2}$; mais $dx = -\frac{gd\sigma}{\sigma^2} = -\frac{ghd\varphi\sin\varphi}{\sigma^2}$, donc $\sigma^4 X = \frac{g^2h^2}{n^2}\sin^2\varphi(1 - c^2\sin^2\varphi) = \frac{g^2h^2}{n^2}\left[1 - c^2 + (2c^2 - 1)\left(\frac{1-\sigma}{h}\right)^2 - c^2\left(\frac{1-\sigma}{h}\right)^4\right]$. Le premier membre a aussi pour valeur $\alpha'\sigma^4 + \beta' g\sigma^3 + \gamma' g^2\sigma^2 + \delta' g^3\sigma + \epsilon' g^4$; et l'identité des deux expressions en σ donnera $\alpha' = -\frac{c^2g^2}{n^2h^2}$, $\beta' g = -4\alpha'$, $\gamma' = \frac{1}{n^2}\left(2c^2 - 1 - \frac{6c^2}{h^2}\right)$; donc $\frac{\alpha'}{g^2}\sigma^2 + \frac{\beta'}{2g}\sigma = \frac{\alpha'}{g^2}(\sigma^2 - 2\sigma) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{c^2}{h^2} + b^2 - \Delta^2\right)$.

Donc

$$\int\left(\epsilon x^2 + \tfrac{1}{2}\delta x\right)\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{x - f} + \left(\epsilon f^2 + \tfrac{1}{2}\delta f\right)n\mathrm{F}(c, \varphi) + \text{const.}$$
$$+ \frac{1}{n}\left(\frac{c^2}{h^2} + b^2\right)\mathrm{F}(c, \varphi) - \frac{1}{n}\mathrm{E}(c, \varphi).$$

Mais puisque $\gamma^2 - \gamma = 3f\delta + 4f^2\varepsilon$, on a $\varepsilon f^2 + \frac{1}{3} f\delta = \frac{1}{9}(\gamma^2 - \gamma)$ $= -\frac{1}{6}\gamma + \frac{1}{n^2}\left(\frac{2c^2-1}{6} - \frac{c^2}{h^2}\right)$; donc enfin

$$\int(\varepsilon x^2 + \tfrac{1}{2}\delta x + \tfrac{1}{6}\gamma)\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{x-f} + \frac{5(2c^2-1)}{6n}F(c,\varphi) - \frac{1}{n}E(c,\varphi) + \text{const.}$$

C'est la formule générale à laquelle nous voulions parvenir; on peut remarquer que le trinome $\varepsilon x^2 + \frac{1}{2}\delta x + \frac{1}{6}\gamma = \frac{1}{12}\cdot\frac{ddX}{dx^2}$, et que f est la seule des trois données f, g, h, qui entre dans le résultat.

Le premier membre se ramènerait à la formule précédemment traitée, en mettant $x - \frac{\delta}{4\varepsilon}$ à la place de x; car alors le second terme disparaîtrait à la fois dans le polynome X et dans le trinome $\varepsilon x^2 +$ etc. Aussi voit-on que l'intégrale ne dépend que des fonctions F et E; mais la réduction est ici effectuée d'une manière générale et très commode dans la pratique, toutes les fois que la valeur de x, qui donne $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{A}}$, pourra être mise sous la forme $x = f + \frac{g}{1 - h\cos\varphi}$.

§ II. *De l'intégrale* $Z = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}}$.

145. Soit $\sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)} = x$, ou $\sin^2\varphi = \frac{1-x^2}{c^2}$, on aura $\cos^2\varphi = \frac{x^2-b^2}{c^2}$ et la transformée sera $Z = \int\frac{-2x^2dx}{\sqrt{[(1-x^2)(x^2-b^2)]}}$. La quantité sous le radical étant $(1+b^2)x^4 - b^2 - x^8$, si on fait $b + x^4 = 2x^2z$, on aura d'abord $Z = \int\frac{-2dx}{\sqrt{[(1+b)^2 - 4z^2]}}$; ensuite de l'équation supposée on tire

$$x^2 = z + \sqrt{(z^2 - b)},$$
$$x\sqrt{2} = \sqrt{(z + \sqrt{b})} + \sqrt{(z - \sqrt{b})};$$

donc

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{-dz}{\sqrt{(z+\sqrt{b})}\cdot\sqrt{[(1+b)^2 - 4z^2]}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{-dz}{\sqrt{(z-\sqrt{b})}\cdot\sqrt{[(1+b)^2 - 4z^2]}}.$$

Pour avoir la première intégrale soit $z = u^2 - \sqrt{b}$, elle aura pour transformée

$$Z' = \int\frac{-du\sqrt{2}}{\sqrt{[(1-\sqrt{b})^2 + 2u^2]}\cdot\sqrt{[(1+\sqrt{b})^2 - 2u^2]}},$$

où l'on voit que la limite de u^2 est $\frac{1}{2}(1+\sqrt{b})^2$. Soit donc $u\sqrt{2} =$

$(1+\sqrt{b})\cos\psi$, $i^2=\frac{(1+\sqrt{b})^2}{2(1+b)}$, on aura $Z'=\frac{1}{\sqrt{(2+2b)}}\int\frac{d\psi}{\sqrt{(1-i^2\sin^2\psi)}}$ $=\frac{1}{\sqrt{(2+2b)}}F(i,\psi)$.

L'amplitude ψ se déduit directement de x par la formule $\cos\psi=\frac{x^2+\sqrt{b}}{x(1+\sqrt{b})}$; ainsi lorsque $\varphi=0$ on a $x=1$, et $\psi=0$; si on fait $\varphi=90°$, on aura $x=\sqrt{b}$, ce qui donne de nouveau $\psi=0$; entre ces deux valeurs il y a un *maximum* de ψ qui répond à $x=\sqrt[4]{b}$, ou $\sin^2\varphi=\frac{1}{1+b}$; et $\cos^2\varphi=b$. On voit donc que l'intégrale Z' n'entre pas dans la valeur complète de Z.

Venons à la seconde intégrale $Z''=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x-\sqrt{b})}\cdot\sqrt{[(1+b)^2-4x^2]}}$; si on fait semblablement $x=v^2+\sqrt{b}$, $v\sqrt{2}=(1-\sqrt{b})\cos\omega$, $k^2=\frac{(1-\sqrt{b})^2}{2+2b}$, ce qui donnerait directement $\cos\omega=\frac{x^2-\sqrt{b}}{x(1-\sqrt{b})}$; on aura

$$Z''=\frac{1}{\sqrt{(2+2b)}}\int\frac{d\omega}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\omega)}}=\frac{1}{\sqrt{(2+2b)}}F(k,\omega).$$

Donc enfin l'intégrale indéfinie

$$Z=\frac{1}{\sqrt{(2+2b)}}[F(k,\omega)+F(i,\psi)];$$

on remarquera d'ailleurs que les modules k et i sont complémens l'un de l'autre.

Pour avoir l'intégrale complète il faut faire $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, ce qui donnera $\psi=0$, $\omega=\pi$, et par conséquent $Z'=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1+b)}}F'k$. Résultat très simple eu égard à la complication de la formule proposée: on peut remarquer qu'en faisant $c=\sin\theta$, $c^0=\sin\theta^0$, on aurait $k=\sin\frac{1}{2}\theta^0$.

146. Si on proposait l'intégrale $V=\int d\varphi\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}$, on trouverait, par les mêmes substitutions, l'intégrale indéfinie

$$V=\sqrt{(2+2b)}\,E(k,\omega)-\left(\frac{1+\sqrt{b}+b}{2+2b}\right)F(k,\omega)$$
$$+\sqrt{(2+2b)}\,E(i,\psi)-\left(\frac{1-\sqrt{b}+b}{2+2b}\right)F(i,\psi),$$

et l'intégrale complète

$$V'=2\sqrt{(2+2b)}\,E'k-\left(\frac{1+\sqrt{b}+b}{1+b}\right)F'k.$$

Il est manifeste qu'on trouverait par la même méthode l'intégrale $Z=\int\frac{P\,d\varphi}{(1-c^2\sin^2\varphi)^{\pm\frac{1}{4}}}$, P étant une fonction rationnelle de $\sin\varphi$, ou même de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$.

§ III. *De l'intégrale* $Z=\int\frac{d\varphi}{\sqrt[3]{(1-c^2\sin^2\varphi)}}$.

147. Soit $\sqrt[3]{(1-c^2\sin^2\varphi)}=x$, on aura $c^2\sin^2\varphi=1-z^3$, $c^2\cos^2\varphi=x^3-b^2$; donc $Z=-\frac{3}{2}\int\frac{x\,dz}{\sqrt{(1-x^3)}\,.\,\sqrt{(x^3-b^2)}}$. Le produit $(1-x^3)(x^3-b^2)$ étant $(1+b^2)x^3-x^6-b^2$, soit $b=n^3$, et $x^2+n^2=xz$; on aura d'abord $Z=-\frac{3}{2}\int\frac{x^{-\frac{1}{2}}dz}{\sqrt{(1+n^6+3n^2z-z^3)}}$; ensuite de l'équation supposée, on tire

$$x+n=x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(z+2n)},$$
$$x-n=x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(z-2n)},$$
$$2x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{(z+2n)}+\sqrt{(z-2n)},$$
$$2x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{dz}{\sqrt{(z+2n)}}+\frac{dz}{\sqrt{(z-2n)}}.$$

Donc la transformée en z sera

$$Z=\frac{3}{4}\int\frac{-dz}{\sqrt{(z+2n)}\,.\,\sqrt{(1+n^6+3n^2z-z^3)}}+\frac{3}{4}\int\frac{-dz}{\sqrt{(z-2n)}\,.\,\sqrt{(1+n^6+3n^2z-z^3)}},$$

et on voit que ces intégrales ne dépendent plus que des fonctions elliptiques.

Pour avoir la première $P=\frac{3}{4}\int\frac{-dz}{\sqrt{(z+2n)}\,.\,\sqrt{(1+n^6+3n^2z-z^3)}}$, j'observe que $1+n^6+3n^2z-z^3=(1+n^2-z)(1-n^2+n^4+(1+n^2)z+z^2)$, soit donc $z=\frac{1+n^2-2ny^2}{1+y^2}$, on aura $P=\frac{3}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{(\lambda^2+2\lambda\mu\cos\theta\,y^2+\mu^2y^4)}}$;

$$\mu=1-n+n^2,\ \lambda^2=3(1+n^2+n^4)=3\mu(\mu+2n)$$
$$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\,.\,\frac{(1-n^2)^2-2n(1-n+n^2)}{(1-n+n^2)\sqrt{(1+n^2+n^4)}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,.\,\frac{\mu^2-3n^2}{\mu\sqrt{(\mu^2+2n\mu)}};$$

soit de plus $y=\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\,.\,\tang\frac{1}{2}\omega$, $k^2=\sin^2\frac{1}{2}\theta=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$; on aura

$$P=\frac{3}{4\sqrt{\lambda\mu}}\,.\,F(k,\omega).$$

La relation entre φ et ω est telle que ω est nulle aux deux limites de l'intégrale, lorsque $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Ainsi, la quantité P n'entre point dans l'intégrale complète Z^1.

Pour avoir l'autre intégrale $Q = \frac{3}{4}\int \frac{-dz}{\sqrt{(z-2n)}\,.\,\sqrt{(1+n^6+3n^2z-z^3)}}$, nous ferons $z = \frac{1+n^2+2ny'^2}{1+y'^2}$, ce qui donnera la transformée

$$Q = \frac{3}{2}\int \frac{dy'}{\sqrt{(\lambda'^2+2\lambda'\mu'\cos\theta' y'^2+\mu'^2 y'^4)}}, \text{ dans laquelle}$$

$$\lambda'^2 = 3(1+n^2+n^4) = 3(1+n+n^2)(1-n+n^2) = 3\mu'(\mu'-2n),$$

$$\mu' = 1+n+n^2$$

$$\cos\theta' = \frac{3(\mu'^2-3n^2)}{2\lambda\mu'} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\mu'^2-3n^2}{\mu'\sqrt{(\mu'^2-2n\mu')}}.$$

Il ne reste plus qu'à faire, suivant les formules ordinaires, $y' = \sqrt{\frac{\lambda'}{\mu'}}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\psi$, $k'^2 = \sin^2\frac{1}{2}\theta' = \frac{1}{2} - \frac{\cos\theta}{2}$, et on aura $Q = \frac{3}{4\sqrt{\lambda\mu'}}F(k',\psi)$; donc l'intégrale cherchée

$$Z = \frac{3}{4\sqrt{\mu\lambda}}\,.\,F(k,\omega) + \frac{3}{4\sqrt{\mu'\lambda}}F(k',\psi).$$

D'ailleurs les modules k, k', ne sont pas complémens l'un de l'autre, et n'ont entre eux d'autres relations que celles qui résultent des équations $k^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\mu^2-3n^2}{\mu\sqrt{\mu\mu'}}$, $k'^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\mu'^2-3n^2}{\mu'\sqrt{\mu\mu'}}$; $\mu = 1-n+n^2$, $\mu' = 1+n+n^2$, $n = \sqrt[3]{b}$.

Lorsque $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on a $\omega = 0$ et $\psi = 2\pi$; donc l'intégrale complète

$$Z^1 = \frac{3}{\sqrt{(\mu'\lambda)}}F^1 k'.$$

La même méthode serait applicable aux intégrales $\int\frac{P d\varphi}{\sqrt[3]{(1-c^2\sin^2\varphi)}}$, $\int P d\varphi\sqrt[3]{(1-c^2\sin^2\varphi)}$, P étant une fonction rationnelle de $\sin\varphi$, ou même de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$. Car dans le cas le plus général on pourra supposer $P = P' + P''\sin\varphi + P'''\cos\varphi + P^{IV}\sin\varphi\cos\varphi$, P', P'', P''', P^{IV}, étant des fonctions rationnelles de $\sin^2\varphi$, or, 1°. l'intégrale $\int\frac{P' d\varphi}{\sqrt[3]{(1-c^2\sin^2\varphi)}}$ se traitera comme on vient de le faire pour le cas de $P' = 1$; elle se résoudra de même par des fonctions elliptiques qui ont pour modules k et i, et parmi lesquelles pourront se trouver des fonctions de la troisième espèce. 2°. L'in-

tégrale $\int \frac{P^{\prime\prime} d\varphi \sin\varphi}{\sqrt[3]{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}}$ se réduira, en faisant $1 - c^2 \sin^2 \varphi = x^2$, à la forme $\int \frac{Qx dx}{\sqrt{(x^3 - b^2)}}$, où Q est une fonction rationnelle de x^2; elle dépendra donc des fonctions elliptiques dont le module est sin 15°. 3°. Par la même transformation l'intégrale $\int \frac{P^{\prime\prime} d\varphi \cos\varphi}{\sqrt[3]{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}}$ se réduira à la forme $\int \frac{Qx dx}{\sqrt{(1 - x^3)}}$; ainsi elle pourra s'exprimer par des fonctions elliptiques dont le module est sin 75°, complément de sin 15°. Enfin l'intégrale $\int \frac{P^{\prime\prime} d\varphi \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt[3]{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}}$, s'exprimera simplement par des arcs de cercle et des logarithmes, parce que la même substitution rend la différentielle entièrement rationnelle.

§ IV. *De l'intégrale* $T^{2n} = \int \left(\Delta^{2n-1} d\varphi - b^{2n} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta^{2n+1}} \right)$.

148. Soit $P^{2n+1} = \int \frac{d\varphi}{\Delta^{2n+1}}$; si on différencie la quantité $\frac{c^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta^{2n+1}}$, et qu'on intègre ensuite la différentielle, on aura cette formule de réduction :

$$\frac{c^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta^{2n+1}} = -(2n-1) P^{2n-1} + 2n(1 + b^2) P^{2n+1} - (2n+1) b^2 P^{2n+3}.$$

Soit de même $Q^{2n-1} = \int \Delta^{2n-1} d\varphi$, on aura par un semblable procédé la formule

$$c^2 \sin\varphi \cos\varphi \cdot \Delta^{2n-2} = (2n+1) Q^{2n+1} - 2n(1 + b^2) Q^{2n-1} + (2n-1) b^2 Q^{2n-3}.$$

De ces deux équations on tirera aisément

$$(2n+1) T^{2n+2} - 2n(1 + b^2) T^{2n} + (2n-1) b^2 T^{2n-2} = V^{2n},$$

en supposant $V^{2n} = c^2 \sin\varphi \cos\varphi \left(\Delta^{2n-1} + \frac{b^{2n}}{\Delta^{2n+1}} \right)$.

Par cette formule il suffit de connaître les premiers termes T^0, T^2, et on en déduira successivement les termes T^4, T^6, etc. ; or on aura

$$T^0 = \int \left(\frac{d\varphi}{\Delta} - \frac{d\varphi}{\Delta} \right) = 0$$

$$T^2 = \int \left(\Delta d\varphi - \frac{b^2 d\varphi}{\Delta^3} \right) = \frac{c^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta} = \frac{1}{3} V^0.$$

De là on voit que la valeur de T^4 sera de la forme $\alpha V^0 + \beta V^2$, α et β étant des constantes; que celle de T^6 sera de la forme $\alpha V^0 + \beta V^2 + \gamma V^4$, et ainsi de suite, tous les coëfficiens étant constans, mais différens d'un terme à l'autre. Donc en général l'intégrale T^{2n} ou $\int \left(\Delta^{2n-1} d\varphi - b^{2n} \frac{d\varphi}{\Delta^{2n+1}} \right)$ se ré-

duira toujours à une quantité purement algébrique. Et comme tous les termes de cette quantité ont le facteur commun $\sin\varphi \cos\varphi$, ils deviendront tous nuls lorsque $\varphi = 90°$. Donc en prenant les intégrales depuis $\varphi = 0$, jusqu'à $\varphi = 90°$, on aura exactement

$$\int \Delta^{2n-1} d\varphi = b^{2n} \int \frac{d\varphi}{\Delta^{2n+1}}; \qquad \begin{cases} \varphi = 0 \\ \varphi = \frac{1}{2}\pi \end{cases}$$

théorème très remarquable, et dont nous donnerons ci-après une démonstration plus directe. L'analyse précédente suppose que n est un nombre entier. Mais le théorème n'aurait pas moins lieu, quand même n serait fractionnaire ou irrationnel. Ainsi en faisant successivement $n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, etc.; on aura $\int d\varphi = b \int \frac{d\varphi}{\Delta^2}$, $\int \Delta^2 d\varphi = b^{\frac{3}{3}} \int \frac{d\varphi}{\Delta^{\frac{5}{3}}}$, $\int \Delta^3 d\varphi = b^{\frac{1}{2}} \int \frac{d\varphi}{\Delta^{\frac{7}{2}}}$, etc.

§ V. *De l'intégrale* $Z = \int d\varphi \sqrt{\left(\frac{1 - k^2 \sin^2\varphi}{\sin\varphi}\right)}$.

149. Si on demande le temps de l'oscillation d'un pendule dans une demi-ellipse dont le grand axe est vertical, soit ce temps $= T$, la gravité $= g$, le demi-grand axe de l'ellipse $= 1$, le demi-petit axe $= \sqrt{(1 - k^2)}$, on aura $\frac{1}{2} T \sqrt{2g} = \int \frac{d\varphi \sqrt{(1 - k^2 \sin^2\varphi)}}{\sqrt{\sin\varphi}} = Z$, cette intégrale étant prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Considérons d'abord l'intégrale indéfinie et soit $\sin\varphi = y^2$, on aura

$$Z = \int \frac{2dy \sqrt{(1 - k^2 y^4)}}{\sqrt{(1 - y^4)}} = \int \frac{2dy\,(1 - k^2 y^4)}{\sqrt{(1 - (1 + k^2) y^4 + k^2 y^8)}};$$

soit $1 + ky^4 = y^2 z$, on aura successivement

$$\sqrt{[1 - (1 + k^2) y^4 + k^2 y^8]} = y^2 \sqrt{[z^2 - (1 + k)^2]}$$
$$1 + y^2 \sqrt{k} = y \sqrt{(z + 2\sqrt{k})}$$
$$1 - y^2 \sqrt{k} = y \sqrt{(z - 2\sqrt{k})}$$
$$y = \frac{\sqrt{(z + 2\sqrt{k})} - \sqrt{(z - 2\sqrt{k})}}{2\sqrt{k}},$$

et enfin

$$Z = \int \frac{\frac{1}{2} dz}{\sqrt{(z - 2\sqrt{k})}} \cdot \frac{1 + k - z\sqrt{k}}{\sqrt{(z^2 - (1 + k)^2)}} + \int \frac{\frac{1}{2} dz}{\sqrt{(z + 2\sqrt{k})}} \cdot \frac{1 + k + z\sqrt{k}}{\sqrt{(z^2 - (1 + k)^2)}}$$

nouvelles intégrales qu'il faudra prendre depuis $z = 1 + k$ jusqu'à $z = \infty$. Comme elles ne diffèrent que par le signe de $\sqrt{k}$, il suffira d'en considérer une, par exemple, $Z' = \int \frac{\frac{1}{2} dz}{\sqrt{(z + 2\sqrt{k})}} \cdot \frac{1 + k + z\sqrt{k}}{\sqrt{[z^2 - (1 + k)^2]}}$.

Soit $z+2\sqrt{k}=u^2$, ensuite $u=\frac{1+\sqrt{k}}{\cos\psi}$, $c^2=\frac{(1-\sqrt{k})^2}{2+2k}$, $\Delta=\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}$, on aura la transformée

$$Z'=\frac{1-k}{\sqrt{(2+2k)}}\int\frac{d\psi}{\Delta}+\frac{(1+\sqrt{k})^2\sqrt{k}}{\sqrt{(2+2k)}}\int\frac{d\psi}{\Delta\cos^2\psi}.$$

Or on a en général $\int\frac{d\psi}{\Delta\cos^2\psi}=\frac{1}{b^2}(\Delta\tang\psi+b^2\,\mathrm{F}-\mathrm{E})$; donc

$$Z'=\frac{1-k}{\sqrt{(2+2k)}}\mathrm{F}(c,\psi)+\sqrt{(2k+2k^2)}\,[\Delta\tang\psi+b^2\,\mathrm{F}(c,\psi)-\mathrm{E}(c,\psi)].$$

On trouvera semblablement l'autre intégrale

$$Z''=\frac{1-k}{\sqrt{(2+2k)}}\mathrm{F}(b,\omega)-\sqrt{(2k+2k^2)}\,[\Delta'\tang\omega+c^2\mathrm{F}(b,\omega)-\mathrm{E}(b,\omega)],$$

en faisant

$$b^2=1-c^2=\frac{(1+\sqrt{k})^2}{2+2k},\ \cos\omega=\frac{1-\sqrt{k}}{\sqrt{(z-2\sqrt{k})}},\ \Delta'=\sqrt{(1-b^2\sin^2\omega)}.$$

Au commencement de l'intégrale où $z=1+k$, on a $\psi=0$ et $\omega=0$; à la fin où $z=\infty$, on a $\psi=\frac{1}{2}\pi$, et $\omega=\frac{1}{2}\pi$; alors les termes $\Delta\tang\psi$, $\Delta'\tang\omega$, deviennent infinis, mais il est facile de prévoir que ces infinis disparaîtront dans la somme $Z'+Z''$ qui compose la valeur de Z^1. En effet laissant ψ et ω indéterminées, on a

$$\Delta\tang\psi=\sqrt{\left(\frac{1}{2+2k}+\frac{c^2}{z+2\sqrt{k}}\right)}\sqrt{(z-1-k)},$$

$$\Delta'\tang\omega=\sqrt{\left(\frac{1}{2+2k}+\frac{b^2}{z-2\sqrt{k}}\right)}\sqrt{(z-1-k)};$$

donc lorsqu'on fait z infini, la différence $\Delta\tang\psi-\Delta'\tang\omega$ se réduit à

$$(1+k)\left(\frac{c^2}{z+2\sqrt{k}}-\frac{b^2}{z-2\sqrt{k}}\right)\sqrt{\left(\frac{z-1-k}{2+2k}\right)},$$

et devient par conséquent nulle.

Cela posé, en faisant $\psi=\omega=\frac{1}{2}\pi$, on aura l'intégrale complète

$$Z^1=\frac{1-k}{\sqrt{(2+2k)}}(\mathrm{F}^1c+\mathrm{F}^1b)+\sqrt{(2k+2k^2)}\,(b^2\mathrm{F}^1c-c^2\mathrm{F}^1b-\mathrm{E}^1c+\mathrm{E}^1b);$$

ainsi elle ne dépend que des fonctions complètes F^1c, E^1c, et de leurs complémens F^1b, E^1b; d'ailleurs on peut la réduire à cette forme très simple :

$$Z^1=(1+k)\,(c\mathrm{F}^1c+b\mathrm{F}^1b)+\sqrt{(2k+2k^2)}\,.\,(\mathrm{E}^1b-\mathrm{E}^1c).$$

CHAPITRE XXVIII.

Exemple de réduction dans lequel les modules des fonctions comparées sont complémens l'un de l'autre.

150. Deux fonctions elliptiques de la première espèce peuvent être exprimées l'une par l'autre, si leurs modules appartiennent à la même échelle $1 \ldots\ldots c'', c', c, c^{\circ} c^{\circ\circ} \ldots 0$, formée suivant la loi connue. Cette propriété s'étend aux fonctions de la seconde et de la troisième espèce, pourvu qu'elles soient jointes à une fonction de la première espèce dont le coefficient puisse être pris à volonté. Mais si les modules des deux fonctions comparées ne sont pas compris dans la suite dont il s'agit, il semble très difficile de déterminer les cas où la réduction d'une fonction à l'autre pourra avoir lieu. Notre objet est d'indiquer d'abord quelques-uns de ces cas et de donner ensuite à cette recherche un plus grand degré de généralité.

Le premier exemple que nous allons donner d'une réduction entre deux fonctions dont les modules n'appartiennent pas à la même échelle, se rapporte aux fonctions $F(c,\varphi)$, $F(b,\omega)$ dont les modules sont complémens l'un de l'autre, le plus petit étant $c = \sin 15^{\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})}$.

On peut prévoir au reste que s'il y a une relation entre φ et ω, qui permet d'intégrer $\int \frac{d\omega}{\sqrt{(1-b^2 \sin^2 \omega)}}$ ou de déterminer $F(b,\omega)$ par le moyen de $F(c, \varphi)$, cette même relation permettra d'intégrer $\int d\omega \sqrt{(1-b^2 \sin^2 \omega)}$, c'est-à-dire de déterminer la fonction de seconde espèce $E(b, \omega)$ par le moyen des fonctions $E(c, \varphi)$, $F(c, \varphi)$. C'est ce que les calculs suivans vont confirmer.

151. Soit proposé l'intégrale $R = \int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}}$, dans laquelle la variable z sera censée croître depuis $z = 0$, jusqu'à $z = 1$; cette formule peut être intégrée par deux méthodes qui conduisent à des résultats de forme différente.

Première méthode. Soit $1 - z^3 = (1 - z)^3 y^3$, on aura d'abord.... $R = \int \frac{dz}{(1-z)^2 y^2}$; soit en même temps $1 - z = \frac{1}{t}$, on aura $R = \int \frac{dt}{y^2}$, et

substituant la valeur de z en t, dans l'équation supposée ou, ce qui revient au même, dans l'équation $1 + z + z^2 = (1-z)^2 y^3$, on aura entre t et y l'équation $t^2 - t = \frac{1}{3}(y^3 - 1)$, d'où résulte

$$t = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{(4y^3 - 1)}}{2\sqrt{3}},$$

$$dt = \frac{\sqrt{3} \cdot y^2 dy}{\sqrt{(4y^3 - 1)}},$$

$$R = \sqrt{3} \int \frac{dy}{\sqrt{(4y^3 - 1)}}.$$

Cette transformée s'obtiendrait directement en faisant

$$z = \frac{\sqrt{(4y^3 - 1)} - \sqrt{3}}{\sqrt{(4y^3 - 1)} + \sqrt{3}},$$

et on voit que depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$, y varie depuis $y = 1$ jusqu'à $y = \infty$.

Soit maintenant $m^3 = 2$ et $m^2 y = 1 + x^2$, on aura

$$R = m\sqrt{3} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(x^4 + 3x^2 + 3)}},$$

Soit de nouveau $r = \sqrt[4]{3}$, $x = r \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi$ et $c^2 = \frac{2 - r^2}{4}$, ou $c = \sin 15^\circ$, on aura

$$R = \frac{1}{2} mr \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}} = \frac{1}{2} mr\,(F(c,\varphi) - A).$$

Pour déterminer la constante A, il faut observer que l'intégrale R est prise à compter de $z = 0$, auquel cas $y = 1$, $x^2 = m^2 - 1$ et $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi = \frac{\sqrt{(m^2 - 1)}}{r}$. Or cette valeur de φ est celle qui, pour le module $c = \sin 15^\circ$, donne $F(c,\varphi) = \frac{2}{3} F^1 c$; donc on aura

$$R = \frac{1}{2} mr\,[F(c,\varphi) - \tfrac{2}{3} F^1 c].$$

Pour avoir l'intégrale complète, il faut faire $z = 1$, ce qui donne $y = \infty$, $x = \infty$, $\varphi = \pi$, donc

$$R^1 = \frac{2}{3} mr\, F^1 c.$$

152. *Seconde méthode.* Soit $1 - z^3 = \left(\frac{z}{u}\right)^{\frac{3}{2}}$, ou $u = z(1 - z^3)^{-\frac{2}{3}}$, on aura $z^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{(4 + u^{-3})}$, $R = \int \frac{u dz}{z} = \int \frac{du}{\sqrt{(4u^3 + 1)}}$.

Soit $m^3 = 2$ et $m^2 u = t^2 - 1$, on aura $R = \int \frac{m dt}{\sqrt{(t^4 - 3t^2 + 3)}}$. Soit

encore $r^4 = 3$, $t = r \operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega$, $b^2 = \frac{2+r^2}{4}$, ou $b = \cos 15°$, on aura la transformée

$$R = \frac{m}{2r}\int \frac{d\omega}{\sqrt{(1-b^2 \sin^2 \omega)}} = \frac{m}{2r}\,[F(b,\omega) - B];$$

et la relation directe entre z et ω est

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\omega = \frac{t}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{(1+m^2 u)} = \frac{1}{r}\sqrt{\left[1 + m^2 z(1-z^3)^{-\frac{2}{3}}\right]}.$$

Donc lorsqu'on a $z = 0$, $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega = \frac{1}{r}$, et lorsque $z = 1$, $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega = \infty$; ou $\omega = \pi$. Or pour le module $b = \sin 75°$, l'amplitude ω telle que $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, satisfait à l'équation $F(b,\omega) = \frac{2}{3} F'b$; donc on a l'intégrale générale

$$R = \frac{m}{2r}\,[F(b,\omega) - \tfrac{2}{3} F'b],$$

et l'intégrale complète $R' = \frac{2m}{3r} F'b$. Comparant ce résultat avec le précédent, on aura $F'b = r^2 F'c = \sqrt{3}.F'c$, ce qui est une propriété connue (n° 44); mais en général on aura

$$F(b,\omega) - \tfrac{2}{3} F'b = \sqrt{3}\,[F(c,\varphi) - \tfrac{2}{3} F'c],$$

ou simplement

$$F(b,\omega) = \sqrt{3}\,.\,F(c,\varphi).$$

153. La relation entre ω et φ nécessaire pour obtenir ce résultat très simple, se trouvera en éliminant z des deux équations

$$r^2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\omega = 1 + m^2 z\,(1-z^3)^{-\frac{2}{3}},$$

$$z = \frac{r \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi\,.\,\Delta(c,\varphi) - \cos^2 \frac{1}{2}\varphi}{r \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi\,.\,\Delta(c,\varphi) + \cos^2 \frac{1}{2}\varphi}.$$

La première donne

$$z^3 = \frac{r^3 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega\,.\,\Delta(b,\omega) - \cos^2 \frac{1}{2}\omega}{r^3 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega\,.\,\Delta(b,\omega) + \cos^2 \frac{1}{2}\omega};$$

on a ainsi la valeur de z exprimée tant par l'angle ω que par l'angle φ. Réciproquement ω et φ s'expriment par la variable z, au moyen des équations

$$r^2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\omega = 1 + m^2 z\,(1-z^3)^{-\frac{2}{3}},$$

$$r^2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\varphi = -1 + m^2 \frac{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}}{1-z}.$$

Celles-ci serviront à exprimer φ par ω, ou ω par φ, en substituant la

valeur connue de z en φ ou de z en ω. Il est remarquable au reste que φ et ω aient en même temps les trois valeurs 0, $\frac{1}{2}\pi$, π, lesquelles répondent à ces trois valeurs de z :

$$z = -1,\ z = \tfrac{1}{2}(r^2 + 1 - r\sqrt{2}),\ z = 1.$$

Soit pour un moment $p = r^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi + 1$, $q = r^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\omega - 1$, on aura

$$q = \frac{m^2 z}{(1 - z^3)^{\frac{2}{3}}},\ p = \frac{m^2 (1 - z^3)^{\frac{2}{3}}}{1 - z};$$

donc

$$p^2 q = \frac{4z}{(1 - z)^2} = \frac{4z}{1 - 2z + z^2},$$

on a aussi

$$p^3 = \frac{4(1 - z^3)}{(1 - z)^3} = \frac{4(1 + z + z^2)}{1 - 2z + z^2};$$

substituant la valeur $\frac{1 + z^2}{z} = \frac{4}{p^2 q} + 2$, on aura

$$p^3 - 3p^2 q - 4 = 0;$$

c'est la relation entre p et q : on en tire

$$q = \frac{p^3 - 4}{3p^2},\ q + 1 = \frac{(p - 1)(p + 2)^2}{3p^2}.$$

Donc $r^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\omega = \frac{r^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi}{3p^2}(p + 2)^2$, et en extrayant la racine

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\omega = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi}{r^2 p}(p + 2) = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi (\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi + r^2)}{r^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi + 1},$$

formule par laquelle on déduit très facilement $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega$ de $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi$; il en résulte aussi l'équation

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{2}\varphi) = \frac{(r^2 + 1) \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi}{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi} = \frac{r^2 + 1}{2} \operatorname{tang} \varphi,$$

par laquelle on calculera trigonométriquement et d'une manière très simple l'amplitude ω par le moyen de l'amplitude φ, et réciproquement, avec quelques essais, φ par le moyen de ω; car on a déjà vu que la différence entre ω et φ est toujours assez petite, et qu'elle est nulle lorsque $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $\varphi = \pi$. La plus grande différence a lieu, d'après cette équation, lorsque $\omega + \varphi = \pi - 2\varphi$, ou $\operatorname{tang} \varphi = \sqrt{(r^2 - 1)}$, ou $\cos \varphi = \frac{1}{r} = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$, alors $\omega - \varphi = \pi - 4\varphi = 17^\circ\ 47'\ 55''$.

La valeur de $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega$ étant connue en fonction de $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi$, on en

déduira immédiatement

$$\sin\omega = \frac{\sin\varphi\,[2r^2+(2-r^2)\sin^2\varphi]}{2+r^2\sin^2\varphi},$$

$$\cos\omega = \frac{\cos\varphi\,[2-(2-r^2)\sin^2\varphi]}{2+r^2\sin^2\varphi},$$

$$d\omega = r^2 d\varphi \,.\, \frac{2-\sin^2\varphi}{2+r^2\sin^2\varphi},$$

$$\Delta(b,\omega) = \frac{2-\sin^2\varphi}{2+r^2\sin^2\varphi} \,.\, \Delta(c,\varphi).$$

Ces deux dernières donnent $\frac{d\omega}{\Delta(b,\omega)} = \frac{r^2 d\varphi}{\Delta(c,\varphi)}$, et en intégrant $F(b,\omega) = r^2 F(c,\varphi)$, ce qui s'accorde avec l'équation déjà trouvée.

Il s'agit maintenant d'avoir la valeur de $E(b,\omega)$; et pour cela, il faut intégrer la formule

$$d\omega\sqrt{(1-b^2\sin^2\omega)} = \frac{r^2 d\varphi(2-\sin^2\varphi)^2}{(2+r^2\sin^2\varphi)^2}\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)};$$

soit $V = \frac{\sin\varphi\cos\varphi\Delta(c,\varphi)}{2+r^2\sin^2\varphi}$, on aura en différenciant, et comparant la différentielle avec l'équation précédente,

$$dV - \tfrac{1}{2}d\omega\sqrt{(1-b^2\sin^2\omega)} = \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)} - \frac{r^2}{2}\,.\,d\varphi\Delta(c,\varphi);$$

donc en intégrant

$$E(b,\omega) = r^2 E(c,\varphi) - F(c,\varphi) + 2V.$$

Ainsi, on voit que la fonction de seconde espèce $E(b,\omega)$, dont le module est b, s'exprime par les fonctions $E(c,\varphi)$, $F(c,\varphi)$, qui se rapportent au module c. La même équation donnerait la valeur de la fonction $E(c,\varphi)$ exprimée par les fonctions $E(b,\omega)$, $F(b,\omega)$.

Si on fait $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on aura $\omega = \frac{1}{2}\pi$, $V = 0$; donc

$$E^1 b = \sqrt{3}\,E^1 c - F^1 c,$$

ce qui s'accorde avec les propriétés connues de ces fonctions, car on sait déjà que les quatre fonctions $F^1 c$, $F^1 b$; $E^1 c$, $E^1 b$, peuvent être déterminées par une seule d'entre elles (art. 43 et 44).

154. On peut parvenir aux mêmes résultats par une autre voie. Pour cela, considérons l'intégrale $T = \int\frac{z\,dz}{(1-z^3)^{\frac{4}{3}}}$; nous ferons suivant la première méthode $1-z^3 = (1-z)^3 y^3$, $1-z = \frac{1}{t}$, ce qui donnera $T = \int\frac{t^2 z\,dt}{y^4}$ $= \int\frac{(t^2-t)dt}{y^4} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{(y^3-1)dy}{y^2\sqrt{(4y^3-1)}}$. Mais en faisant $Z = \frac{1}{y}\sqrt{(4y^3-1)}$,

on a $dz = \frac{(2y^3+1)dy}{y^2\sqrt{(4y^3-1)}}$, donc $T\sqrt{3} + Z = 3\int \frac{ydy}{\sqrt{(4y^3-1)}}$. Substituant ensuite la valeur $m^2y = 1 + r^2 \tang^2 \frac{1}{2}\varphi$, on aura

$$T = \frac{r}{2m}\int \frac{d\varphi}{\Delta}(1 + r^2 \tang^2 \tfrac{1}{2}\varphi) - \frac{m^2 r \tang \frac{1}{2}\varphi . \Delta(c,\varphi)}{\cos^2 \frac{1}{2}\varphi(1 + r^2 \tang^2 \frac{1}{2}\varphi)},$$

et achevant le développement,

$$T = \frac{r}{2m}[F(c,\varphi) + r^2 F(c,\varphi) - 2r^2 E(c,\varphi)] + \frac{r}{m}\Delta \tang \tfrac{1}{2}\varphi . \frac{r^2 - 2 + \tang^2 \frac{1}{2}\varphi}{1 + r^2 \tang^2 \frac{1}{2}\varphi}.$$

Cette intégrale est prise à compter de $\varphi = 0$ ou de $z = -1$.

Cherchons maintenant la même intégrale par la seconde méthode. Si l'on fait $u = z(1 - z^3)^{-\frac{2}{3}}$, la transformée sera $T = \int \frac{udu}{\sqrt{(4u^3+1)}}$. Soit.... $m^2u = r^2 \tang^2 \frac{1}{2}\omega - 1$, on aura $T = \frac{1}{2mr}\int \frac{d\omega}{\Delta(b,\omega)}(r^2 \tang^2 \frac{1}{2}\omega - 1)$, ou en achevant l'intégration

$$T = \frac{1}{2mr}[(r^2 - 1)\, F(b,\omega) - 2r^2 E(b,\omega) + 2r^2 \tang \tfrac{1}{2}\omega \Delta(b,\omega)].$$

Cette intégrale est prise à compter de $\omega = 0$, ou de $z = -1$; ainsi on peut égaler les deux résultats, et on trouvera la même valeur de $E(b,\omega)$ que ci-dessus.

Nous remarquerons au reste que les modules complémentaires c et b pouvant être changés à volonté dans les fonctions F et E, on pourra de même échanger entre eux les modules c^2 et b^2, les modules c' et b', et en général les modules complémentaires relatifs à un terme quelconque de l'échelle.

CHAPITRE XXIX.

Exemple de réduction dans lequel les fonctions F *et* E *sont rapportées à deux modules qui n'appartiennent ni à la même échelle ni à l'échelle complémentaire.*

155. Pour parvenir plus facilement à notre but, nous allons considérer diverses intégrales susceptibles d'être traitées chacune par deux méthodes différentes.

§. I. *De l'intégrale* $X = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}$.

Soit $1 - x^6 = (1 + x^6)\cos^2\xi$, on aura d'abord $X = \int \frac{x^2 dx}{(1+x^6)\cos\xi}$, $x^6 = \frac{1-\cos^2\xi}{1+\cos^2\xi}$; puis faisant $k^2 = \frac{1}{2}$, et achevant la substitution, on aura $X = \frac{k}{3}\int \frac{d\xi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\xi)}} = \frac{k}{3}F(k, \xi)$; c'est l'intégrale prise à compter de $x = 0$ et $\xi = 0$; si on l'étend jusqu'à $x = 1$, auquel cas $\xi = \frac{1}{2}\pi$, on aura l'intégrale complète $X^1 = \frac{k}{3}F^1 k$.

Pour obtenir une autre expression de la même intégrale, soit $1 - x^4 = px^2$; on aura $\frac{dx}{x} = \frac{-\frac{1}{2}dp}{\sqrt{(p^2+4)}}$, $\sqrt{(1-x^{12})} = x^3\sqrt{(p^3+3p)}$, donc

$$X = -\frac{1}{2}\int \frac{p^{-\frac{1}{2}}dp}{\sqrt{(p^2+4)}\cdot\sqrt{(p^2+3)}} = -\frac{1}{2}\int \frac{p^{-\frac{1}{2}}dp}{\sqrt{(p^4+7p^2+12)}}.$$

Soit $n^4 = 12$, et $p^2 + n^2 = pv$, on aura $X = -\frac{1}{2}\int \frac{p^{-\frac{3}{2}}dp}{\sqrt{(v^2+\mu^2)}}$, en faisant $\mu^2 = 7 - 2n^2 = 7 - 4\sqrt{3}$, ou $\mu = 2 - \sqrt{3}$. Mais de l'équation supposée on tire

$$p + n = p^{\frac{1}{2}}\sqrt{(u + 2n)},$$
$$p - n = p^{\frac{1}{2}}\sqrt{(v - 2n)},$$
$$2np^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{(v + 2n)} - \sqrt{(u - 2n)},$$
$$2np^{-\frac{3}{2}}dp = -\frac{dv}{\sqrt{(v+2n)}} + \frac{dv}{\sqrt{(v-2n)}}.$$

Donc

$$X = \frac{1}{4n}\int \frac{dv}{\sqrt{(v+2n)}\cdot\sqrt{(v^2+\mu^2)}} - \frac{1}{4n}\int \frac{dv}{\sqrt{(v-2n)}\cdot\sqrt{(v^2+\mu^2)}}.$$

Depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}\sqrt{(n^2 - 2n + 2)}$, la variable v diminue depuis $v = \infty$ jusqu'à $v = 2n$, c'est son *minimum;* depuis $x = \frac{1}{2}\sqrt{(n^2 - 2n + 2)}$ jusqu'à $x = 1$, la variable v augmente depuis $v = 2n$ jusqu'à $v = \infty$. De là on voit que la première intégrale en v, contenue dans la valeur de X est négative, et parvient à son *maximum* négatif, lorsque $x = \frac{1}{2}\sqrt{(n^2 - 2n + 2)}$, ensuite elle diminue par les mêmes degrés et devient nulle lorsque $x = 1$; ainsi cette première partie n'entre point dans l'intégrale complète X^1.

Au contraire la seconde intégrale qui paraît affectée du signe —, est positive dans toute l'étendue de l'intégrale, parce que dv est négatif depuis le commencement de l'intégrale où $v = \infty$ jusqu'à $v = 2n$. A ce point le radical

$\sqrt{(v-2n)}$ est zéro; ensuite il change de signe, et l'intégrale continue d'être positive jusqu'à la dernière limite $x=1$ ou $v=\infty$.

Soit $\lambda^2=7+2n^2$, ou $\lambda=2+\sqrt{3}$, et $v=\lambda\cot^2\frac{1}{2}\psi-2n$, $b^2=\frac{\lambda+2n}{2\lambda}$, ou $b=\frac{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}{1+\sqrt{3}}$, on aura $\int\frac{dv}{\sqrt{(v+2n)}.\sqrt{(v^2+\mu^2)}}=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\frac{-d\psi}{\sqrt{(1-b^2\sin^2\psi)}}$ $=-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}F(b,\psi)$. Soit ensuite $v=\lambda\cot^2\frac{1}{2}\varphi+2n$, $c=\frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}}{1+\sqrt{3}}$, on aura $\int\frac{-dv}{\sqrt{(v-2n)}.\sqrt{(v^2+\mu^2)}}=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}F(c,\varphi)$. Donc on aura l'intégrale indéfinie

$$X=\frac{1}{4n\sqrt{\lambda}}[F(c,\varphi)-F(b,\psi)].$$

Lorsque $x=1$, on a $\psi=0$, et $\varphi=2\pi$; donc l'intégrale complète

$$X^1=\frac{1}{n\sqrt{\lambda}}F^1c.$$

Egalant cette valeur à celle que nous avons déjà trouvée $X^1=\frac{k}{3}E^1k$; on aura

$$F^1c=\frac{nk\sqrt{\lambda}}{3}F^1k=\frac{2\cos 15^\circ}{\sqrt[4]{27}}.F^1(\sin 45^\circ).$$

Nous parvenons ainsi d'une manière très simple à un résultat que nous n'avions trouvé jusqu'à présent que par une analyse fort compliquée et par la comparaison d'un grand nombre de formules. Ce résultat au reste est un théorème fort remarquable, puisqu'il détermine le rapport entre deux fonctions complètes dont les modules n'appartiennent pas à l'échelle connue.

Les deux expressions de l'intégrale indéfinie donnent encore la formule générale

$$F(c,\varphi)-F(b,\psi)=\frac{2n\sqrt{(2\lambda)}}{3}F(k,\xi);$$

où l'on peut substituer les valeurs $n=\sqrt[4]{12}=\sqrt{(2\sqrt{3})}$, $\sqrt{(2\lambda)}=1+\sqrt{3}$. A l'égard des variables φ, ψ, ξ, elles se déduisent de x de la manière suivante :

$$\sin\xi=\frac{x^3\sqrt{2}}{\sqrt{(1+x^6)}},\quad p=\frac{1}{x^2}-x^2,$$

$$\tang\tfrac{1}{2}\varphi=\frac{\sqrt{(\lambda p)}}{p-n},\quad \tang\tfrac{1}{2}\psi=\frac{\sqrt{(\lambda p)}}{p+n}.$$

Depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, ξ augmente depuis $\xi = 0$ jusqu'à $\xi = \frac{1}{2}\pi$, et φ augmente depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = 2\pi$; quant à la variable ψ, elle est zéro dans les deux limites, et son *maximum* $\psi = \gamma$ a lieu lorsqu'on a $x = \frac{1}{2}\sqrt{(n^2 - 2n + 2)}$, $p = n$, et $\varphi = \pi$; alors

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{n}} = \frac{\cos 15^\circ}{\sqrt[8]{12}}.$$

§ II. *De l'intégrale* $Z = \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1 + z^{12})}}$.

156. Soit $z^3 = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\zeta$, $k^2 = \frac{1}{2}$, on aura $Z = \frac{1}{6}\int \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \zeta)}} = \frac{1}{6} F(k, \zeta)$. Cette intégrale est prise à compter de $z = 0$; si on l'étend jusqu'à $z = \infty$, il faudra faire $\zeta = \pi$, et on aura l'intégrale complète $Z^1 = \frac{1}{3} F^1 k$.

Pour avoir une autre expression de la même intégrale, soit $z^4 + 1 = pz^2$, on aura la transformée $Z = \frac{1}{2}\int \frac{-p^{-\frac{1}{2}} dp}{\sqrt{(p^2 - 4)} \cdot \sqrt{(p^2 - 3)}} = \frac{1}{2}\int \frac{-p^{-\frac{1}{2}} dp}{\sqrt{(p^4 - 7p^2 + 12)}}$.

Soit maintenant $n^4 = 12$, et $p^2 + n^2 = pv$, on aura comme ci-dessus

$$2np^{-\frac{3}{2}} dp = -\frac{dv}{\sqrt{(v + 2n)}} + \frac{dv}{\sqrt{(v - 2n)}}$$

et $p^4 - 7p^2 + 12 = p^2(v^2 - \lambda^2)$, en faisant $\lambda^2 = 2n^2 + 7$, ou $\lambda = 2 + \sqrt{3}$; donc

$$Z = \frac{1}{4n}\int \frac{dv}{\sqrt{(v + 2n)} \cdot \sqrt{(v^2 - \lambda^2)}} - \frac{1}{4n}\int \frac{dv}{\sqrt{(v - 2n)} \cdot \sqrt{(v^2 - \lambda^2)}}.$$

Soit enfin $v = \lambda + 2\lambda \cot^2 \omega$, $c^2 = \frac{\lambda - 2n}{2\lambda}$, ou $c = \frac{\sqrt{2} - \sqrt[4]{3}}{1 + \sqrt{3}}$, on aura

$$\int \frac{dv}{\sqrt{(v + 2n)} \cdot \sqrt{(v^2 - \lambda^2)}} = -\frac{2}{\sqrt{2\lambda}}\int \frac{d\omega}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \omega)}} = -\frac{2}{\sqrt{2\lambda}} F(c, \omega).$$

La même substitution $v = \lambda + 2\lambda \cot^2 \omega$ étant faite dans l'autre intégrale, on aura

$$\int \frac{-dv}{\sqrt{(v - 2n)} \cdot \sqrt{(v^2 - \lambda^2)}} = \frac{2}{\sqrt{2\lambda}}\int \frac{d\omega}{\sqrt{(1 - b^2 \sin^2 \omega)}} = \frac{2}{\sqrt{(2\lambda)}} F(b, \omega);$$

donc

$$Z = \frac{1}{2n\sqrt{(2\lambda)}} [F(b, \omega) - F(c, \omega)].$$

Résultat fort simple, où il est remarquable que les deux fonctions ont la

même amplitude ω et ne diffèrent que par les modules b et c qui sont complémens l'un de l'autre.

Les limites $z=0$ et $z=\infty$, répondent aux limites $\zeta=0$ et $\zeta=\pi$, ainsi qu'aux limites $\omega=0$, $\omega=\pi$, ce qui donne l'intégrale complète

$$Z^1=\frac{1}{n\sqrt{2\lambda}}(F^1b-F^1c).$$

Egalant ce second résultat au premier, on aura

$$F^1b-F^1c=\frac{n\sqrt{2\lambda}}{3}F^1k.$$

Nous avons déjà trouvé $F^1c=\frac{nk\sqrt{\lambda}}{3}F^1k=\frac{n\sqrt{2\lambda}}{6}F^1k$; donc

$$F^1b=3F^1c=\frac{n\sqrt{2\lambda}}{2}F^1k.$$

Ce rapport très simple entre les deux fonctions complémentaires F^1b, F^1c, est d'autant plus digne de remarque, qu'il se place immédiatement après le rapport déjà connu $F^1b=\sqrt{3}F^1c$, qui a lieu lorsque $c=\sin 15^\circ$. Dans le cas présent, le module $c=\frac{\sqrt[4]{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$, n'appartient ni à l'échelle formée sur le module $k=\sin 45^\circ$, ni à l'une des échelles formées sur les modules $\sin 15^\circ$ et $\sin 75^\circ$. On peut seulement observer qu'en faisant $c=\sin\theta$, on aura $2bc$ ou $\sin 2\theta=\tang^2 15^\circ$.

Nous aurons encore entre ces fonctions indéfinies l'équation

$$F(b,\omega)-F(c,\omega)=\frac{2n\sqrt{2\lambda}}{3}F(k,\zeta),$$

laquelle étant combinée avec l'équation déjà trouvée § Ier,

$$F(c,\varphi)-F(b,\psi)=\frac{2n\sqrt{(2\lambda)}}{3}F(k,\xi),$$

servira à déterminer toute fonction $F(c,\varphi)$ ou $F(b,\varphi)$ par la fonction dont k ou $\sin 45^\circ$ est le module.

Dans la première formule, la relation directe entre ω et ζ peut se déduire des deux équations

$$\tang\tfrac{1}{2}\zeta=z^3,\ \cot^2\omega=\frac{4(z^4-1)^2-\lambda z^2(z^2-1)^2}{2\lambda z^2(z^4+1)}.$$

Depuis $\psi=0$ jusqu'à $\psi=$ au *maximum* γ, l'angle φ croît depuis $\varphi=0$, jusqu'à $\varphi=\pi$; pour chaque valeur de ψ entre 0 et γ faisons $\omega=\psi$ et appelons ψ' la valeur correspondante de ζ; alors on aura par l'addition de

nos deux équations, et en faisant pour abréger $\alpha = \frac{2n}{3}\sqrt{2\lambda}$,

$$F(c, \varphi) - F(c, \psi) = \alpha[F(k, \xi) + F(k, \psi')].$$

Dans le premier membre la différence $F(c, \varphi) - F(c, \psi)$ croît par degrés depuis zéro, qui est sa valeur lorsque $\omega = 0$ et $\psi = 0$, jusqu'à $2F'c - F(c, \gamma)$ qui est sa valeur lorsque $\varphi = \pi$ et $\psi = \gamma$. Cette dernière quantité est plus grande que la fonction complète $F'c$; donc la quantité $F(c, \varphi) - F(c, \psi)$ passera successivement par toutes les valeurs moindres que la fonction complète $F'c$, et même au-delà, donc il y aura un point où cette différence sera précisément égale à $F(c, \chi)$, χ étant une amplitude donnée moindre que $\frac{1}{2}\pi$; cette fonction s'exprimera alors par $\alpha[F(k, \psi') + F(k, \xi)]$, ou simplement par $\alpha F(k, \sigma)$; car la somme de deux fonctions qui ont un module commun peut toujours se réduire à une fonction du même module. Donc en général la fonction $F(c, \chi)$ dont l'amplitude donnée est χ, pourra toujours être exprimée par $\alpha F(k, \sigma)$, c'est-à-dire par une fonction semblable dont le module est k; il en est de même de la fonction $F(b, \chi)$. Nous nous contentons ici de montrer la possibilité de la réduction par des formules analytiques ordinaires, car d'ailleurs le développement de ces formules paraît devoir être très compliqué. Occupons-nous maintenant des réductions que doivent offrir semblablement les fonctions de la seconde espèce, formées d'après les mêmes modules.

§ III. *De l'intégrale* $V = \int \frac{x^9 dx}{\sqrt{(1 - x^{12})}}$.

157. Soit comme ci-dessus $x^6 = \frac{1 - \cos^2 \xi}{1 + \cos^2 \xi}$, et $k^2 = \frac{1}{2}$, on aura $V = \frac{k}{6}\int \frac{d\xi \sin^3 \xi}{\Delta^3(k, \xi)} = \frac{k}{3}\left(2E(k, \xi) - F(k, \xi) - \frac{\sin \xi \cos \xi}{\Delta(k, \xi)}\right)$; cette intégrale est prise à compter de $x = 0$ et $\xi = 0$; si on l'étend jusqu'à $x = 1$, ou $\xi = \frac{1}{2}\pi$, on aura l'intégrale complète $V' = \frac{k}{3}(2E'k - F'k) = \frac{k}{6} \cdot \frac{\pi}{F'k}$.

Cherchons maintenant la même intégrale par une autre voie. Soit comme ci-dessus $\frac{1}{x^2} - x^2 = p$, la transformée en p sera

$$V = -\frac{1}{4}\int \frac{(p^2 + 1)p^{-\frac{1}{2}}dp}{\sqrt{(p^2 + 3)}} + \frac{1}{4}\int \frac{p^{\frac{1}{2}}dp\sqrt{(p^2 + 3)}}{\sqrt{(p^2 + 4)}};$$

et parce que $d[p^{\frac{1}{2}}\sqrt{(p^2 + 3)}] = \frac{3}{2}(p^2 + 1) \cdot \frac{p^{-\frac{1}{2}}dp}{\sqrt{(p^2 + 3)}}$, on aura

$$V = \tfrac{1}{6} p^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{6} p^{\frac{1}{2}} \sqrt{(p^2+3)} + \tfrac{1}{4} \int \left(\frac{p^{\frac{1}{2}} dp \sqrt{(p^2+3)}}{\sqrt{(p^2+4)}} - p^{\frac{1}{2}} dp \right).$$

L'addition de $\frac{1}{6} p^{\frac{3}{2}}$ à la partie algébrique a pour but de rendre cette quantité nulle au commencement de l'intégrale, où $p = \infty$. Ainsi, tout se réduit à trouver l'intégrale $U = \int \left(\frac{p^{\frac{1}{2}} dp \sqrt{(p^2+3)}}{\sqrt{(p^2+4)}} - p^{\frac{1}{2}} dp \right)$.

Soit pour cet effet $n^4 = 12$, $p^2 + n^2 = pv$, $\mu^2 = 7 - 2n^2 = 7 - 4\sqrt{3}$, on aura

$$2U = \int \frac{(v^2 + nv + 3 - n^2) dv}{\sqrt{(v+2n)} . \sqrt{(v^2+\mu^2)}} + \int \frac{(v^2 - nv + 3 - n^2) dv}{\sqrt{(v-2n)} . \sqrt{(v^2+\mu^2)}} - \int 2p^{\frac{1}{2}} dp;$$

mais on a

$$d[(v \pm 2n)^{\frac{1}{2}} (v^2 + \mu^2)^{\frac{1}{2}}] = \frac{(\frac{3}{2} v^2 \pm 2nv + \frac{1}{2}\mu^2) dv}{\sqrt{(v \pm 2n)} . \sqrt{(v^2+\mu^2)}}.$$

Donc

$$3U = [\sqrt{(v+2n)} + \sqrt{(v-2n)}] \sqrt{(v^2+\mu^2)} - 2p^{\frac{3}{2}} + T,$$

$$T = \int \frac{(1 - \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} nv) dv}{\sqrt{(v+2n)} . \sqrt{(v^2+\mu^2)}} + \int \frac{(1 - \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} nv) dv}{\sqrt{(v-2n)} . \sqrt{(v^2+\mu^2)}}.$$

On remarquera que la partie algébrique qui entre dans la valeur de 3U se réduit à zéro au commencement de l'intégrale, parce qu'alors v et p sont infinis et qu'on a $\frac{v}{p} = 1$; cette partie se réduira également à zéro à l'autre limite, par une raison semblable.

Maintenant pour trouver la première des deux intégrales contenues dans T, soit comme ci-dessus $v = \lambda \cot^2 \frac{1}{2} \psi - 2n$, on aura

$$\frac{(1 - \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{4} nv) dv}{\sqrt{(v+2n)} . \sqrt{(v^2+\mu^2)}} = \frac{\frac{1}{2} n\lambda \cot^2 \frac{1}{2} \psi - 1 - \frac{1}{2} n^2}{\sqrt{(1 - b^2 \sin^2 \psi)}} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{\lambda}}.$$

Mais par la différentiation de $\cot \frac{1}{2} \psi . \sqrt{(1 - b^2 \sin^2 \psi)}$, on trouve aisément

$$\int \frac{d\psi \cot^2 \frac{1}{2} \psi}{\sqrt{(1 - b^2 \sin^2 \psi)}} = -2 \cot \tfrac{1}{2} \psi \sqrt{(1 - b^2 \sin^2 \psi)} + F(b, \psi) - 2E(b, \psi).$$

Donc la valeur de la première intégrale est

$$\int \frac{(1 - \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} nv) dv}{\sqrt{(v+2n)} \sqrt{(v^2+\mu^2)}} = \tfrac{1}{2} n \sqrt{\lambda} . [F(b, \psi) - 2E(b, \psi)] - n\sqrt{\lambda} . \cot \tfrac{1}{2} \psi \sqrt{(1 - b^2 \sin^2 \psi)}.$$

A l'origine où $\psi = 0$, cette valeur contient la quantité infinie $-n\sqrt{\lambda} \cot \frac{1}{2} \psi$; mais cette quantité sera détruite par une quantité semblable provenant de l'autre intégrale.

Celle-ci se déduira de la même formule en changeant le signe de n, mettant c à la place de b, et faisant $v = \lambda \cot^2 \frac{1}{2} \varphi + 2n$, ensuite on aura

par la réunion des deux parties

$$T = n\sqrt{\lambda}[\cot\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)} - \cot\tfrac{1}{2}\psi\sqrt{(1-b^2\sin^2\psi)}]$$
$$+(\tfrac{1}{2}n\sqrt{\lambda}-\sqrt{2})F(b,\psi)-(\tfrac{1}{2}n\sqrt{\lambda}+\sqrt{2})F(c,\varphi)+n\sqrt{\lambda}[E(c,\varphi)-E(b,\psi)].$$

Il ne faut pas ajouter de constante, parce que la partie algébrique se détruit au commencement de l'intégrale où l'on a $\sqrt{v} = \sqrt{\lambda}.\cot\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\lambda}.\cot\frac{1}{2}\psi$.

158. Pour avoir l'intégrale complète, il faut faire $\psi = 0$ et $\varphi = 2\pi$, ce qui donnera de nouveau $\cot\frac{1}{2}\varphi = \cot\frac{1}{2}\psi = \sqrt{\frac{v}{\lambda}}$; on aura donc

$$T^1 = 4n\sqrt{\lambda}\left[E^1c - \left(\tfrac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\lambda}}\right)F^1c\right].$$

Comme on a dans cette même limite $V^1 = \frac{1}{4}U^1$ et $U^1 = \frac{1}{3}T^1$, il s'ensuit que l'intégrale complète $V^1 = \frac{1}{12}T^1$; or, nous avons déjà trouvé $V^1 = \frac{k}{6}\cdot\frac{\pi}{F^1k}$; donc

$$E^1c - \left(\tfrac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\lambda}}\right)F^1c = \frac{k}{2n\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\pi}{F^1k}.$$

Enfin puisqu'on a $F^1c = \frac{nk\sqrt{\lambda}}{3}F^1k$, on voit que la fonction de seconde espèce E^1c s'exprime par la fonction de première espèce F^1c, de cette manière

$$E^1c = \left(\tfrac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\lambda}}\right)F^1c + \frac{\pi}{12F^1c},$$

où l'on peut substituer la valeur $\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{2\sin 15^\circ}{\sqrt[4]{3}}$.

Connaissant ainsi la valeur de E^1c, on peut trouver celle de E^1b au moyen de l'équation des fonctions complémentaires $\frac{\pi}{2} = E^1c\,F^1b + E^1b\,F^1c - F^1c\,F^1b$; et parce qu'on a d'ailleurs $F^1b = 3F^1c$, on trouvera

$$E^1b = \left(\tfrac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\lambda}}\right)F^1b + \frac{\pi}{4F^1c},$$

ou
$$E^1b = 3E^1c - 2F^1k.$$

Ainsi avec la seule fonction complète de première espèce F^1k ou $F^1(\sin 45^\circ)$, on peut déterminer exactement, non-seulement toutes les fonctions complètes de première et de seconde espèce qui se rapportent au module $\sin 45^\circ$, mais encore toutes celles qui se rapportent aux modules c et b, ce qui

forme trois séries infinies de fonctions F^1 et E^1, déterminables par la seule transcendante $F^1(\sin 45°)$.

Puisque nous avons trouvé deux valeurs de l'intégrale indéfinie V, si on les égale entre elles, on aura l'équation générale

$$2E(k,\xi) - F(k,\xi) - \frac{\sin\xi\cos\xi}{\Delta(k,\xi)} = M + \frac{n\sqrt{2\lambda}}{4}[E(c,\varphi) - (b,\psi)]$$
$$+\left(\frac{n\sqrt{2\lambda}}{8} - \frac{3}{2}\right)F(b,\psi) - \left(\frac{n\sqrt{2\lambda}}{8} + \frac{1}{2}\right)F(c,\varphi),$$

dans laquelle M est une quantité algébrique dont la valeur est

$$M = \frac{n\sqrt{2\lambda}}{4}[\cot\tfrac{1}{2}\varphi\Delta(a,\varphi) - \cot\tfrac{1}{2}\psi\Delta(b,\psi)] + \sqrt{\left(\frac{R^2+3}{2p}\right)}.[\sqrt{(p^2+4)} - p],$$

et qui devient nulle dans les deux limites de l'intégrale.

Cette équation générale jointe à une autre que nous démontrerons bientôt, servira à déterminer les fonctions de seconde espèce $E(a,\varphi)$, $E(b,\psi)$ par des fonctions semblables rapportées au module k.

§ IV. *De l'intégrale* $W = \int\left(z^2dz - \frac{z^2dz}{\sqrt{(1+z^{12})}}\right)$.

159. Soit $z^3 = \tang\frac{1}{2}\zeta$, $k^2 = \frac{1}{2}$, on aura $W = \frac{1}{3}\tang\frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{6}\int\frac{d\zeta\tang^2\frac{1}{2}\zeta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\zeta)}}$; ou en développant l'intégrale,

$$W = \tfrac{1}{3}\tang\tfrac{1}{2}\zeta[1 - \Delta(k,\zeta)] + \tfrac{1}{6}[2E(k,\zeta) - F(k,\zeta)].$$

Cette intégrale est prise à compter de $z = 0$, ou $\zeta = 0$; si on l'étend jusqu'à $z = \infty$, il faudra faire $\zeta = \pi$, ce qui donnera l'intégrale complète

$$W^1 = \tfrac{1}{3}(2E^1k - F^1k) = \frac{\pi}{6F^1k};$$

car le terme algébrique $\frac{1}{3}\tang\frac{1}{2}\zeta[1 - \Delta(k,\zeta)]$ se réduit à zéro, quoique le facteur $\tang\frac{1}{2}\zeta$ soit infini; en effet lorsque ζ diffère infiniment peu de π, on a $1 - \sqrt{(1-k^2\sin^2\zeta)} = \frac{1}{2}k^2\sin^2\zeta$, et $\frac{1}{3}\tang\frac{1}{2}\zeta.\frac{1}{2}k^2\sin^2\zeta = \frac{1}{3}k^2\sin\zeta.\sin^2\frac{1}{2}\zeta = 0$.

Pour avoir la même intégrale sous une autre forme, soit comme ci-dessus $z^4 + 1 = pz^2$, on aura

$$W = \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}.\int\frac{dp(p^2-1)}{\sqrt{(p^3-3p)}} = \tfrac{1}{4}\int\frac{dp\sqrt{(p^3-3p)}}{\sqrt{(p^2-4)}}.$$

La première intégrale $\int\frac{dp(p^2-1)}{\sqrt{(p^3-3p)}} = \frac{2}{3}\sqrt{(p^3-3p)}$, ensuite si on fait

$H = (p^2-4)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p^2-3}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$, on aura $dH = \frac{p^{\frac{1}{2}}dp\left(\frac{3}{2}p^2-\frac{7}{2}-\frac{6}{p^2}\right)}{\sqrt{(p^2-3)}\cdot\sqrt{(p^2-4)}}$; donc

$$W = \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{6}\sqrt{(p^3-3p)} \pm \tfrac{1}{6}(p^2-4)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p^2-3}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \pm \tfrac{1}{6}\int\frac{p^{-\frac{3}{2}}(p^2-6)dp}{\sqrt{(p^2-3)}\cdot\sqrt{(p^2-4)}}.$$

La partie algébrique s'évanouit au commencement de l'intégrale où $z = 0$ et $p = \frac{1}{z^2}$, car il faut prendre le signe supérieur depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$, et l'inférieur depuis $z = 1$ jusqu'à $z = \infty$. Elle s'évanouit de même à la fin de l'intégrale, lorsque $z = \infty$ et $p = z^2$, parce qu'on doit prendre le signe inférieur depuis $z = 1$ jusqu'à $z = \infty$ ou depuis $p = 2$ jusqu'à $p = \infty$. Ainsi il reste à trouver l'intégrale.....

$$T = \int\frac{p^{-\frac{3}{2}}dp(p^2-6)}{\sqrt{(p^2-3)}\cdot\sqrt{(p^2-4)}}, \text{ et on aura}$$

$$W = \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{6}\sqrt{(p^3-3p)} \pm \tfrac{1}{6}(p^2-4)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p^2-3}{p}\right)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{6}T$$

ou
$$W = \tfrac{1}{3}z^3 - \frac{z\sqrt{(1+z^{12})}}{3(1+z^4)} + \tfrac{1}{6}T.$$

Nous donnons à l'intégrale T le signe $+$ qu'elle doit avoir depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$, parce que les substitutions ultérieures feront changer le signe de $\sqrt{(p^2-4)}$, comme il doit l'être depuis $z = 1$ jusqu'à $z = \infty$. Soit comme ci-dessus $n^4 = 12$, $p^2 + n^2 = pv$, $\lambda^2 = 7 + 2n^2$, ou $\lambda = 2 + \sqrt{3}$, on aura

$$T = -\tfrac{1}{4}\int\frac{(nv+n^2+2)dv}{\sqrt{(v+2n)}\cdot\sqrt{(v^2-\lambda^2)}} + \tfrac{1}{4}\frac{(nv-n^2-2)dv}{\sqrt{(v-2n)}\cdot\sqrt{(v^2-\lambda^2)}}.$$

Soit maintenant $v = \lambda + 2\lambda\cot^2\varphi$, on aura

$$T = \int\frac{(2n\lambda\cot^2\varphi + n\lambda + n^2 + 2)}{2\sqrt{2\lambda}}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)} - \int\frac{(2n\lambda\cot^2\varphi - n\lambda + n^2 - 2)}{2\sqrt{2\lambda}}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta(b,\varphi)}.$$

Mais on a $\int\frac{d\varphi\cot^2\varphi}{\Delta(c,\varphi)} = -\cot\varphi\,\Delta(c,\varphi) - E(c,\varphi) + \text{const.}$; donc

$$T = -\frac{n\sqrt{2\lambda}}{2}\left[\cot\varphi\,\Delta(c,\varphi) - \cot\varphi\,\Delta(b,\varphi)\right] + E(c,\varphi) - E(b,\varphi)\right]$$
$$+ \frac{n\lambda + n^2 + 2}{2\sqrt{2\lambda}}F(c,\varphi) + \frac{n^2+2-n\lambda}{2\sqrt{2\lambda}}F(b,\varphi).$$

On peut remarquer que la partie algébrique $\cot\varphi\,\Delta(c,\varphi) - \cot\varphi\,\Delta(b,\varphi)$ $= \frac{(b^2-c^2)\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(c,\varphi)+\Delta(b,\varphi)}$; elle s'évanouit donc, non-seulement aux extrémités de l'intégrale où $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$, mais même au point moyen où $z = 1$, $v = \lambda$, et $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Faisant $\varphi = \pi$, valeur qui répond à $z = \infty$, on aura l'intégrale complète

$$T^1 = -n\sqrt{2\lambda}(E^1c - E^1b) + \frac{n\lambda + n^2 + 2}{\sqrt{2\lambda}} F^1c + \frac{n^2 + 2 - n\lambda}{\sqrt{2\lambda}} F^1b.$$

Mais $T^1 = 6W^1 = \frac{\pi}{F^1k}$; donc

$$E^1c - E^1b = \left(\frac{n^2+2}{2\lambda n} + \frac{1}{2}\right)F^1c + \left(\frac{n^2+2}{2\lambda n} - \frac{1}{2}\right)F^1b - \frac{\pi}{n\sqrt{2\lambda}.F^1k};$$

et si on observe que $n^2 + 2 = 2(1 + \sqrt{3}) = 2\sqrt{2\lambda}$, on aura plus simplement

$$E^1c - E^1b = \left(\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2}\right)F^1c + \left(\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{2}\right)F^1b - \frac{\pi}{n\sqrt{2\lambda}.F^1k},$$

formule qui s'accorde parfaitement avec celles que nous avons déjà trouvées.

Maintenant si on égale entre elles les deux valeurs indéfinies de W, on aura

$$2E(k, \zeta) - F(k, \zeta) = N - \frac{n\sqrt{2\lambda}}{2}[E(c, \varphi) - E(b, \varphi)]$$
$$+ \left(\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2}\right)F(c, \varphi) + \left(\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{2}\right)F(b, \varphi),$$

formule où la partie algébrique désignée par N s'exprime ainsi

$$N = \frac{\frac{2}{3}z(z^3-1)\sqrt{(1+z^{12})}}{(1+z^4)(1+z^6)} - \frac{1}{2}n\sqrt{2\lambda}[\cot\varphi\,\Delta(c, \varphi) - \cot\varphi\,\Delta(b, \varphi)].$$

Cette équation générale jointe à celle que nous avons déjà trouvée (n° 158) servira à exprimer toute fonction de seconde espèce $E(c, \varphi)$ ou $E(b, \varphi)$ par le moyen des fonctions $E(k, \zeta)$ ou $F(k, \zeta)$, rapportées au module k.

CHAPITRE XXX.

Autre exemple de réduction dans lequel les modules des fonctions comparées n'appartiennent ni à la même échelle, ni à des échelles complémentaires.

§ Ier. *De l'intégrale* $Z = \int \frac{dz}{\sqrt[3]{(1+z^6)}}$.

160. Soit $\sqrt[3]{(1+z^6)} = \frac{mz}{u}$, $m = \sqrt[3]{2}$, on aura $z^3 = \frac{1-\sqrt{(1-u^6)}}{u^3}$, et la transformée sera

$$Z = \frac{1}{m}\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^6)}};$$

elle est plus simple puisque le radical qui était du troisième degré, n'est plus que du second. Dans l'intervalle de $z = 0$ à $z = 1$, la variable u croît aussi depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 1$; passé $z = 1$ jusqu'à $z = \infty$, il faut imaginer que le radical $\sqrt{(1-u^6)}$ change de signe, et la variable u décroît depuis $u = 1$ jusqu'à $u = 0$; mais il suffira de considérer la première période, bornée à $u = 1$.

Soit $u = \sin t$, ensuite $\tang t = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \tang \frac{1}{2}\varphi$, $c^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ ou $c = \sin 15°$, on aura

$$Z = \frac{1}{2m\sqrt[4]{3}}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}} = \frac{1}{2m\sqrt[4]{3}} F(c, \varphi).$$

Pour avoir l'intégrale complète, il faut faire $z = 1$, ce qui donne $u = 1$, $t = \frac{1}{2}\pi$, $\varphi = \pi$, et par conséquent

$$Z^1 = \frac{1}{m\sqrt[4]{3}} F^1 c;$$

on retombe ainsi sur une fonction déjà considérée bien des fois et qui a un grand nombre de propriétés, savoir, la fonction dont le module est sin 15°.

161. Pour avoir une autre valeur de l'intégrale indéfinie, soit d'abord $z^2 + 1 = pz$, on aura la transformée $Z = \int \frac{-dp}{\sqrt{(p^2-4)} \cdot \sqrt[3]{(p^3-3p)}}$, où p décroît

depuis $p = \infty$ jusqu'à $p = 2$, tandis que z augmente depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$. Passé $z = 1$ jusqu'à $z = \infty$, le radical $\sqrt{(p^2 - 4)}$ changera de signe et p augmentera depuis $p = 2$ jusqu'à $p = \infty$, mais nous avons vu qu'on peut se borner au premier intervalle.

Soit de nouveau $\sqrt[3]{(p^3 - 3p)} = \frac{p}{u}$, ou $p^2 = \frac{3u^3}{u^3 - 1}$, on aura la transformée plus simple :

$$Z = \tfrac{3}{2} \int \frac{du}{\sqrt{(u^3 - 1)} \cdot \sqrt{(4 - u^3)}},$$

dans laquelle la variable u croît depuis $u = 1$ jusqu'à $u = \sqrt[3]{4} = m^2$. Ce qu'on trouve directement par la valeur $u = \frac{z^2 + 1}{\sqrt[3]{(z^6 + 1)}}$.

Puisqu'on a $(u^3 - 1)(4 - u^3) = -4 + 5u^3 - u^6$, si l'on fait $u^2 + m^2 = ut$, on aura d'abord $Z = \frac{3}{2} \int \frac{u^{-\frac{3}{2}} du}{\sqrt{(5 + 3m^2 t - t^3)}}$; ensuite l'équation supposée donne

$$u + m = u^{\frac{1}{2}} \sqrt{(t + 2m)}, \; u - m = -u^{\frac{1}{2}} \sqrt{(t - 2m)},$$

$$2mu^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{(t + 2m)} + \sqrt{(t - 2m)}$$

$$2mu^{-\frac{3}{2}} du = -\frac{dt}{\sqrt{(t + 2m)}} - \frac{dt}{\sqrt{(t - 2m)}};$$

donc

$$Z = \frac{3}{4m} \int \frac{-dt}{\sqrt{(t + 2m)} \cdot \sqrt{(5 + 3m^2 t - t^3)}} + \frac{3}{4m} \int \frac{-dt}{\sqrt{(t - 2m)} \cdot \sqrt{(5 + 3m^2 t - t^3)}}.$$

Nous supposons que la variable u croît depuis $u = 1$ jusqu'à $u = m^2$; dans ces deux limites on a la même valeur de t, savoir, $t = 1 + m^2$; entre ces deux extrêmes, il y aura donc un *minimum* de t, lequel est $t = 2m$, il a lieu lorsque $u = m$. Ainsi dans toute l'étendue de l'intégrale que nous voulons déterminer, il faut considérer t comme décroissant depuis $t = 1 + m^2$ jusqu'à $t = 2m$; ce dernier point répond à $u = m$, $p^2 = \frac{3m^3}{m^3 - 1} = 6$, $z = \sqrt{(2 - \sqrt{3})} = 2c$.

On voit donc que des deux intégrales qui composent la valeur de Z, la première est positive et croissante jusqu'à $t = 2m$, ou $z = 2c$; elle décroît ensuite et devient nulle à la limite où $z = 1$ et $t = 1 + m^2$; quant à la seconde intégrale, elle est constamment positive et croissante ; parce que passé le terme où $t = 2m$, le radical $\sqrt{(t - 2m)}$ change de signe. Il faudrait donc se borner à cette seconde intégrale seule si on voulait avoir la

valeur de l'intégrale complète, mais continuons de chercher celle de l'intégrale indéfinie.

Pour cela soit d'abord $P = \int \frac{-dt}{\sqrt{(t+2m)} \cdot \sqrt{(5+3m^2t-t^3)}}$; comme on a $5+3m^2t-t^3 = (1+m^2-t)\,[t^2+(1+m^2)\,t+m^4-m^2+1]$; si on fait $t = \frac{1+m^2-2my^2}{1+y^2}$, on aura $t+2m = \frac{(m+1)^2}{1+y^2}$, $m^2+1-t = \frac{(m+1)^2y^2}{1+y^2}$, $dt = \frac{-2ydy(m+1)^2}{(1+y^2)^2}$, donc $P = \int \frac{2dy}{\sqrt{[3(m+1)^2-9y^2+3(m^2-1)y^4]}}$. Soit... $y = (m+1)y'$, cette formule se réduit à $P = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dy'}{\sqrt{(1-3y'^2+3y'^4)}}$. Soit $y' = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \operatorname{tang} \frac{1}{2}\psi$ et $b^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, ou $b = \sin 75^\circ$, on aura enfin

$$P = \frac{1}{\sqrt[4]{27}} \int \frac{d\psi}{\sqrt{(1-b^2\sin^2\psi)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{27}}\, F\,(b,\psi).$$

Si on étend cette formule depuis $\psi = 0$ ou $t = 1+m^2$, jusqu'à $\psi = \alpha$ ou $t = 2m$, α étant déterminé par l'équation $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt[4]{3}}{m+1} \cdot \frac{m-1}{2\sqrt{m}}$, la plus grande valeur de P sera $\frac{1}{\sqrt[4]{27}}\, F\,(b,\alpha)$; si on étend cette même intégrale au-delà de $t = 2m$, jusqu'à $t = 1+m^2$, on aura de nouveau $\psi = 0$, et l'intégrale complète $P' = 0$.

162. Venons maintenant à la seconde intégrale..... $Q = \int \frac{-dt}{\sqrt{(t-2m)} \cdot \sqrt{(5+3m^2t-t^3)}}$. Si on fait $t = \frac{1+m^2+2my^2}{1+y^2}$, on aura la transformée $Q = \int \frac{2dy}{\sqrt{(\lambda^2+2\lambda\mu\cos 2\theta y^2+\mu^2y^4)}}$, dans laquelle

$$\lambda = (m+1)\sqrt{3},\ \mu = 1+m+m^2 = \frac{1}{m-1},$$

$$\lambda\mu\cos 2\theta = \tfrac{3}{2}\,(5+4m),\ \cos 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{m-1}{m+1}\,(4m+5).$$

On observera que la valeur $m = \sqrt[3]{2}$, donne lieu à des réductions dont voici les principales :

$$3 = (m+1)^3(m-1) = (m+1)^2(m^2-1),\ \sqrt{(m^2-1)} = \frac{\sqrt{3}}{m+1},$$

$$4m-5 = (m-1)^3(m+1),\ 3(4m-5) = (m^2-1)^4,$$

$$\sin 2\theta = \tfrac{1}{2}\,(m-1)^4 = \frac{81}{2(m+1)^{12}} = \frac{(4m-5)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{3}},$$

$$\cos 2\theta = \tfrac{1}{2}\,(4m+5)\,\sqrt{(4m-5)},\ \operatorname{tang} 2\theta = \frac{4m-5}{4m+5} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Cela posé, si on fait le module $k = \sin\theta$, et son complément $i = \cos\theta$, ensuite $y = r \operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega$, $r = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{\sqrt[4]{27}}{m+1}$, on aura l'intégrale

$$Q = \frac{r}{\lambda}\int\frac{d\omega}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\omega)}} = \frac{r}{\lambda}F(k,\omega), \text{ où } \frac{r}{\lambda} = \frac{\sqrt[4]{3}}{(m+1)^2}.$$

L'intégrale commence lorsque $t = 1 + m^2$, alors $y = 0$ et $\omega = 0$; si on fait $\omega = \pi$, on aura $y = \infty$, $t = 2m$; c'est le milieu de l'intégrale complète; l'angle ω continuant à croître depuis $\omega = \pi$ jusqu'à $\omega = 2\pi$, on aura dans cette dernière limite $y = 0$, $t = 1 + m^2$, et l'intégrale complète sera $Q^1 = \frac{4\sqrt[4]{3}}{(m+1)^2}F^1k$.

163. De là on conclut $Z^1 = \frac{3}{4m}(P^1 + Q^1) = \frac{3\sqrt[4]{3}}{m(m+1)^2}F^1k$; mais on a déjà trouvé $Z^1 = \frac{1}{m\sqrt[4]{3}}F^1c$; donc

$$F^1k = \frac{(m+1)^2}{3\sqrt{3}}F^1c.$$

Ainsi la fonction complète F^1k se détermine par la fonction connue F^1c dont le module est $\sin 15°$, et le rapport entre ces deux fonctions, qui est $\frac{(m+1)^2}{3\sqrt{3}}$, peut aussi se représenter par $\frac{m^2-1}{\sqrt{3}}$ ou par $\sqrt{\left(\frac{m-1}{m+1}\right)}$. Or il est aisé de s'assurer que le module k, qui est un nombre très petit, (car on trouve $\log k = 7.05730\ 61017\ 15168$, ou $k = 0.001141$ etc.) n'entre point dans l'échelle des modules formés soit d'après le module primitif $\sin 15°$, soit d'après le module complémentaire $\sin 75°$. Car selon qu'on fait $c = \sin 15°$ ou $c = \sin 75°$, on a pour les termes de l'échelle décroissante c^0, c^{00}, etc., les valeurs logarithmiques suivantes où ne se trouve pas celle de k;

$c = \sin 15°$.	$c = \sin 75°$.
c^0 8.23885 82051.	c^0 9.76996 09464.
c^{00} 5.87572 16597.	c^{00} 9.02538 78768.
	c^{000} 7.45116 69032.
	c^{0000} 4.30027 55492.

Si on égale entre elles les deux valeurs trouvées pour l'intégrale indéfinie Z, on aura l'équation générale

$$\frac{2}{\sqrt{3}}F(c,\varphi) = F(b,\psi) + (m^2-1)F(k,\omega),$$

qui servira à déterminer la fonction $F(k,\omega)$ par deux autres fonctions $F(c,\varphi)$,

$F(b,\psi)$, rapportées aux modules c et b; on sait d'ailleurs que $F(b,\psi)$ peut toujours se réduire à la forme $\sqrt{3}.F(c,\sigma)$, de sorte qu'on aura $F(k,\omega)$ $= \frac{1}{m^2-1}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}F(c,\varphi) - \sqrt{3}F(c,\sigma)\right] = \frac{2}{(m^2-1)\sqrt{3}}\left[F(c,\varphi) - \frac{3}{2}F(c,\sigma)\right]$. Enfin il est aisé de réduire $2F(c,\varphi) - 3F(c,\sigma)$ à une seule fonction $F(c,\xi)$; ce qui donnera $F(k,\omega) = \frac{1}{(m^2-1)\sqrt{3}}F(c,\xi) = \frac{(m+1)^2}{3\sqrt{3}}F(c,\xi)$.

Pour l'usage de ces équations il faut savoir comment deux des variables φ, ψ, ω, peuvent se déterminer par la troisième; c'est ce qui résultera des équations suivantes :

$$u = \frac{z^2+1}{\sqrt[3]{(z^6+1)}},\ \text{tang}^2\tfrac{1}{2}\psi = \frac{\sqrt{3}}{(m+1)^2}\cdot\frac{(u-1)(m^2-u)}{(m+u)^2}$$

$$\text{tang}^2\tfrac{1}{2}\omega = \frac{(m+1)^2}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{(u-1)(m^2-u)}{(m-u)^2},$$

$$\sqrt{3}\cot^2\tfrac{1}{2}\varphi = \left(\frac{1+z^6}{2z^3}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = \frac{3u}{m^2(u^3-1)} - 1 = \frac{(1+mu)^2\cdot(m^2-u)}{m^2(u^3-1)}.$$

Ainsi on voit que les trois quantités $\cot^2\frac{1}{2}\varphi$, $\text{tang}^2\frac{1}{2}\psi$, $\text{tang}^2\frac{1}{2}\omega$, s'expriment d'une manière rationnelle et assez simple par le moyen d'une même variable u qui se déduit immédiatement de z. Au commencement de l'intégrale on a $u = 1$ et par suite $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\omega = 0$; à la fin on a $u = m^2$, $\varphi = \pi$, $\psi = 0$, $\omega = 2\pi$; au milieu de cet intervalle où.... $z = \sqrt{(2-\sqrt{3})} = 2c$, et $u = m$, on a $\text{tang}^2\frac{1}{2}\varphi = \text{tang}^2\frac{1}{2}\mathcal{C} = \frac{m\sqrt{3}}{-m}$, $\text{tang}\frac{1}{2}\psi = \text{tang}\frac{1}{2}\alpha = \frac{m\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{m-1}{m+1}$, $\omega = \pi$. Dans ce cas particulier on doit donc avoir l'équation $(m^2-1)F'k = \frac{1}{\sqrt{3}}F(c,\mathcal{C}) - \frac{1}{2}F(b,\alpha)$, et parce que $(m^2-1)F'k = \frac{1}{\sqrt{3}}F'c$, on devra avoir $F'c = F(c,\mathcal{C}) - \frac{\sqrt{3}}{2}F(b,\alpha)$, ce qui est facile à vérifier.

§ II. *De l'Intégrale* $V = \int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)}}$.

164. Soit $\sqrt[3]{(1-x^6)} = \frac{mx}{p}$, m désignant toujours $\sqrt{2}$, on aura la transformée $V = \frac{1}{m}\int\frac{dp}{\sqrt{(1+p^6)}}$; soit $p^2 = \frac{u^2}{1-u^2}$, et ensuite $u = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\text{tang}\frac{1}{2}\psi$, $b^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, on aura

$$V = \frac{1}{2m\sqrt[4]{3}} \int \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - b^2 \sin^2 \psi)}} = \frac{1}{2m\sqrt[4]{3}} F(b, \psi).$$

Cette intégrale est prise depuis $x = 0$, ou $\psi = 0$; si on l'étend jusqu'à $x = 1$, on aura dans cette dernière limite $u = 1$, $\tang \frac{1}{2}\psi = \sqrt[4]{3}$, valeur qui répond à une fonction $F(b, \psi) = \frac{4}{3} F^1 b$; donc on aura l'intégrale complète

$$V^1 = \frac{1}{2m\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{4}{3} F^1 b = \frac{m^2}{\sqrt[4]{27}} F^1 c.$$

Pour avoir une autre valeur de l'intégrale indéfinie, soit $\frac{1}{x} - x = p$, on aura $\sqrt[3]{(1 - x^6)} = x \sqrt[3]{(p^2 + 3p)}$, et la transformée sera

$$V = \int \frac{-dp}{\sqrt{(p^2 + 4)} \cdot \sqrt[3]{(p^3 + 3p)}},$$

soit ensuite $\sqrt[3]{(p^3 + 3p)} = \frac{p}{u}$, ou $p^2 = \frac{3u^3}{1 - u^3}$, on aura la nouvelle transformée

$$V = \frac{3}{2} \int \frac{-du}{\sqrt{(1 - u^3)} \cdot \sqrt{(4 - u^3)}},$$

dans laquelle les limites $x = 0$, $x = 1$, correspondent aux limites $u = 1$, $u = 0$. Soit enfin $u^3 + m^3 = ut$, on aura

$$V = \frac{3}{4m} \int \frac{dt}{\sqrt{(t + 2m)} \cdot \sqrt{(t^3 - 3m^2 t - 5)}} + \frac{3}{4m} \int \frac{dt}{\sqrt{(t - 2m)} \cdot \sqrt{(t^3 - 3m^2 t - 5)}}.$$

Ces intégrales sont prises à compter de $t = 1 + m^2$, et elles s'étendent jusqu'à $t = \infty$, valeur qui répond à $x = 1$.

165. Considérons d'abord l'intégrale $P = \int \frac{dt}{\sqrt{(t + 2m)} \cdot \sqrt{(t^3 - 3m^2 t - 5)}}$, où l'on observera que $t^3 - 3m^2 t - 5 = (t - 1 - m^2)[t^2 + (1 + m^2)t + m^4 - m^2 + 1]$. Si l'on fait $t = \frac{m^2 + 1 + 2my^2}{1 - y^2}$, ensuite $y = \frac{m + 1}{\sqrt[4]{3}} \tang \frac{1}{2}\varphi$ et $c^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$, on aura la transformée

$$P = \frac{1}{\sqrt[4]{27}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{27}} F(c, \varphi).$$

Pour avoir la fonction complète P^1, il faudra faire $y = 1$, $\tang \frac{1}{2}\varphi = \frac{\sqrt[4]{3}}{m + 1}$; et comme cette valeur de φ est celle qui donne $F(c, \varphi) = \frac{2}{3} F^1 c$, on aura

$$P^1 = \frac{2}{3\sqrt[4]{27}} F^1 c.$$

Considérons en second lieu l'intégrale $Q = \int \frac{dt}{\sqrt{(t-2m)}.\sqrt{(t^3-3m^2t-5)}}$; et soit $t = \frac{m^2+1-2my^2}{1-y^2}$, on aura la transformée

$$Q = \int \frac{2dy}{\sqrt{(\lambda^2 - 2\lambda\mu\cos 2\theta . y^2 + \mu^2 y^4)}},$$

dans laquelle

$$\lambda = (m+1)\sqrt{3},\ \mu = \frac{1}{m-1},\ \cos 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{m-1}{m+1}(4m+5).$$

Ainsi le module $i = \sin\left(\frac{\pi - 2\theta}{2}\right) = \cos\theta$, sera déterminé par la valeur

$$i^2 = \tfrac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{m-1}{m+1}(4m+5);$$

il est par conséquent le complément du module k déterminé ci-dessus. Soit enfin $y = 3^{\frac{1}{4}}(m^2-1)^{\frac{1}{2}}\tang\tfrac{1}{2}\omega$, et on aura l'intégrale cherchée

$$Q = 3^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^{\frac{1}{2}}\int\frac{d\omega}{\sqrt{(1-i^2\sin^2\omega)}} = 3^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^{\frac{1}{2}}F(i,\ \omega).$$

Cette intégrale s'étend depuis $\omega = 0$ jusqu'à la valeur de ω qui répond à $x = 1$, cette valeur est donnée par l'équation $\tang\tfrac{1}{2}\omega = \frac{3^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{(m^2-1)}} = \frac{m+1}{\sqrt[4]{27}}$, et nous ferons voir ci-après que cette valeur suppose $F(i, \omega) = \frac{2}{3}F'i$, ainsi on a l'intégrale complète

$$Q' = \frac{1}{3\sqrt[4]{3}}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^{\frac{1}{2}}F'i = \frac{2\sqrt[4]{3}}{3(m+1)^2}F'i.$$

Réunissant les deux intégrales P' et Q', on aura l'intégrale complète

$$V' = \frac{3}{4m}\left(\frac{2}{3\sqrt[4]{27}}F'c + \frac{2\sqrt[4]{3}}{3(m+1)^2}F'i\right).$$

Par la première méthode on a trouvé $V' = \frac{m^2}{\sqrt[4]{27}}F'c$; égalant ces deux valeurs, on en tire $F'i = (m+1)^2F'c$; mais nous avons déjà trouvé $F'k = \frac{(m+1)^2}{3\sqrt{3}}F'c$; donc les fonctions $F'k$, $F'i$, sont entre elles comme 1 à $3\sqrt{3}$, de sorte qu'on a $F'i = 3\sqrt{3}F'k$.

Ce rapport entre les deux fonctions complémentaires $F'k$, $F'i$, est d'autant

plus digne de remarque, qu'il occupe en quelque sorte la troisième place à la suite de deux autres rapports déjà connus. En effet on a trouvé que dans le cas de $c = \sin 15^\circ$, le rapport de $F'c$ à $F'b$ est celui de 1 à $\sqrt{3}$; dans le cas de $c = \frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}}{1+\sqrt{3}}$, ce rapport est de 1 à 3; enfin dans le dernier cas où l'on supposerait $c^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(4m+5)\sqrt{(4m-5)}$, ce rapport est de 1 à $3\sqrt{3}$.

Au reste les fonctions F formées, soit d'après le module k, soit d'après son complément i, ont une telle analogie avec les fonctions formées d'après le module $\sin 15^\circ$, qu'en général toute fonction $F(k, \omega)$ ou $F(i, \omega)$, peut se déterminer par une fonction $F(c, \varphi)$ dont le module est $\sin 15^\circ$, c'est ce que nous avons déjà prouvé pour $F(k, \omega)$, il reste à le faire voir pour $F(i, \omega)$.

Si on égale entre elles les deux valeurs trouvées pour l'intégrale indéfinie V, on en tirera

$$F(i, \omega) = \frac{(m+1)^2}{3}\left[\frac{2}{\sqrt{3}} F(b, \psi) - F(c, \varphi)\right];$$

équation qui a une analogie remarquable avec l'équation déjà trouvée

$$F(k, \omega) = \frac{(m+1)^2}{3}\left[\frac{2}{\sqrt{3}} F(c, \varphi) - F(b, \psi)\right];$$

mais les variables φ et ψ ne se déduisent pas de la même manière de ω dans les deux équations. Quoi qu'il en soit, la fonction $F(b, \psi)$ pouvant toujours être représentée par $\sqrt{3}\, F(c, \zeta)$, et deux termes tels que $2F(c, \zeta) - F(c, \varphi)$ pouvant être réduits à un seul $F(c, \sigma)$, on voit qu'on pourra toujours supposer $F(i, \omega) = \frac{(m+1)^2}{3} F(c, \sigma)$, comme on a obtenu $F(k, \omega) = \frac{(m+1)^2}{3\sqrt{3}} F(c, \xi)$.

Il nous reste à démontrer une proposition supposée dans les calculs précédens, savoir, que pour le module i, l'équation $F(i, \omega) = \frac{2}{3} F'i$ est satisfaite par la valeur $\tang \frac{1}{2}\omega = \frac{m+1}{\sqrt[4]{27}}$. Pour cela soit $F(i, \alpha) = \frac{1}{3} F'i$, et $F(i, \beta) = \frac{2}{3} F'i$; il faut qu'en supposant $\tang \frac{1}{2}\beta = \frac{m+1}{\sqrt[4]{27}}$, la valeur correspondante de c^2 soit égale à i^2, or on a dans cette hypothèse $\cos\beta = 1 - \sin\alpha$, et faisant $\sin\alpha = x$, on aura l'équation $0 = 1 - 2x + c^2(2x^3 - x^4)$. Mais puisque $\cos\beta = 1 - x$, on a $\tang^2 \frac{1}{2}\beta = \frac{x}{2-x} = t^2$, ou $x = \frac{2t^2}{1+t^2}$; donc $c^2 = \frac{2x-1}{2x^3-x^4} = \frac{(3t^2-1)(1+t^2)^3}{16t^6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\left(3t^2 + \frac{6}{t^2} - \frac{1}{t^6}\right)$. Substituant

les valeurs $t^2 = \frac{(m+1)^2}{3\sqrt{3}}$, $\frac{1}{t^2} = (m^2-1)\sqrt{3}$, on aura

$$c^2 = \tfrac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{12}(-11 + 14m - 2m^2) = \tfrac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{m-1}{m+1}(4m+5),$$

ce qui est la valeur trouvée pour i^2.

§ III. *De l'intégrale* $Z = \int\left(dz - \frac{z^2 dz}{\sqrt[3]{(1+z^6)}}\right)$.

166. Soit $\sqrt[4]{(1+z^6)} = u$, ou $z^3 = \sqrt{(u^3-1)}$, on aura $Z = \ldots\ldots \int\left(dz - \frac{1}{2} \cdot \frac{udu}{\sqrt{(u^3-1)}}\right)$. Soit ensuite $u = 1 + \sqrt{3}\,\text{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi$, et $c^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ ou $c = \sin 15^\circ$, on aura

$$Z = z - \frac{1}{2\sqrt[4]{3}} \int \frac{(1+\sqrt{3}\,\text{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi)d\varphi}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \varphi)}},$$

ou en achevant les intégrations

$$Z = z - \sqrt[4]{3}\,[\Delta(c, \varphi)\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} F(c, \varphi) - E(c, \varphi)].$$

Cette intégrale s'évanouit, lorsque $z = 0$ ou $\varphi = 0$; si on ne l'étend que jusqu'à $z = 1$, il faudra faire $\varphi = \gamma$ et $\text{tang}\,\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\left(\frac{m-1}{\sqrt{3}}\right)}$; mais cette valeur de γ ne rend pas $F(c, \gamma)$ commensurable avec la fonction complète $F'c$; c'est pourquoi il faudra continuer l'intégrale jusqu'à $z = \infty$, et comme dans ce cas, la partie algébrique $z - \sqrt[4]{3} \cdot \Delta(c, \varphi)\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi$ se réduit à zéro, nous aurons, en faisant $\varphi = \pi$, l'intégrale complète

$$Z' = 2\sqrt[4]{3}\left(E'c - \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} F'c\right) = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{\pi}{F'c}.$$

Cherchons maintenant la même intégrale par une autre voie.

Soit comme ci-dessus, $z^2 + 1 = pz$, on aura $z = \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\sqrt{(p^2-4)}$, et

$$Z = z - \frac{1}{2}\int \frac{pdp}{\sqrt[3]{(p^3-3p)}} + \frac{1}{2}\int \frac{(p^2-2)dp}{\sqrt{(p^2-4)} \cdot \sqrt[3]{(p^3-3p)}}.$$

Dans l'intervalle de $z = 0$ à $z = 1$, p diminue depuis $p = \infty$ jusqu'à $p = 2$; dans l'intervalle de $z = 1$ jusqu'à $z = \infty$, p augmente depuis $p = 2$ jusqu'à $p = \infty$, et dans cette partie de l'intégrale le radical $\sqrt{(p^2-4)}$ est pris avec le signe $-$.

De là on voit que la première intégrale $\frac{1}{2}\int\frac{pdp}{\sqrt[3]{(p^3-p)}}$ désigne une quantité toujours croissante jusqu'à $z=1$ ou $p=2$; qu'ensuite cette quantité décroît et devient nulle, lorsque $z=\infty$; d'où il suit que cette partie n'entre point dans l'intégrale complète; quant à la seconde intégrale, elle désigne une quantité négative toujours croissante depuis le commencement de l'intégrale jusqu'à la fin.

Il importe d'éviter les infinis que les valeurs de p peuvent introduire aux deux limites de l'intégrale. Pour cela, soit $W=\left(1-\frac{3}{p^2}\right)^{\frac{2}{3}}-(p^2-4)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{3}{p^2}\right)^{-\frac{1}{3}}$, on aura la différentielle

$$dW=\frac{pdp}{\sqrt[3]{(p^3-3p)}}+\frac{dp}{p\sqrt[3]{(p^3-3p)}}-\frac{(p^2-2)\,dp}{\sqrt{(p^2-4)}.\sqrt[3]{(p^3-3p)}}-\frac{2dp\,(p^2-4)^{-\frac{1}{2}}}{p^3\left(1-\frac{3}{p^2}\right)^{\frac{4}{3}}};$$

donc

$$Z=z-\tfrac{1}{2}W-\tfrac{1}{2}\int\frac{-dp}{p\sqrt[3]{(p^3-3p)}}+\int\frac{-dp}{p^3(p^2-4)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{3}{p^2}\right)^{\frac{4}{3}}}.$$

Sous cette forme les deux intégrales qui restent à déterminer ont toujours une valeur finie.

167. Pour avoir l'intégrale $P=\frac{1}{2}\int\frac{-dp}{p\sqrt[3]{(p^3-3p)}}$, soit $\sqrt[3]{(p^3-3p)}=pv$, ou $p=\frac{3}{1-v^3}$, on aura $P=-\frac{\sqrt{3}}{4}\int\frac{vdv}{\sqrt{(1-v^3)}}$; soit $v=1-\gamma^2$, et ensuite $\gamma=\sqrt[4]{3}.\tang\frac{1}{2}\zeta$, $b^2=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$; on aura $P=\frac{\sqrt[4]{3}}{4}\int\frac{d\zeta(1-\sqrt{3}\tang^2\frac{1}{2}\zeta)}{\sqrt{(1-b^2\sin^2\zeta)}}$, ou en effectuant l'intégration,

$$P=\tfrac{1}{2}\sqrt[4]{27}\left[E(b,\zeta)-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right)F(b,\zeta)-\Delta(b,\zeta).\tang\tfrac{1}{2}\zeta\right].$$

L'amplitude ζ, qui est nulle à l'origine de l'intégrale lorsque $z=0$, $p=\infty$ et $v=1$, a pour *maximum* la valeur $\zeta=\theta$, qui répond à $p=2$, $v=\frac{1}{m^2}$, et pour laquelle on a $\tang\frac{1}{2}b=\frac{\sqrt[4]{3}}{m^2+m}$. Ensuite, p augmentant depuis $p=2$ jusqu'à $p=\infty$, l'amplitude ζ diminue et devient nulle de nouveau à la dernière limite de l'intégrale où $z=\infty$, de sorte que l'intégrale complète $P^{\prime}=0$.

Venons maintenant à la seconde intégrale $Q = \int \frac{-dp}{p^3(p^2-4)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{3}{p^2}\right)^{\frac{4}{3}}}$;

si l'on fait $\sqrt[3]{(p^3-3p)} = \frac{p}{u}$, ou $p^2 = \frac{3u^3}{u^3-1}$, on aura la transformée

$$Q = \frac{1}{2}\int \frac{du\sqrt{(u^3-1)}}{\sqrt{(4-u^3)}} = \frac{1}{2}\int \frac{du\,(u^3-1)}{\sqrt{(5u^3+4-u^6)}}.$$

Soit $u^2+m^2 = ut$, on aura $5u^3-4-u^6 = u^3(5+3m^2t-t^3)$,

$$u = \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{2}\sqrt{(t^2-4m^2)},$$

$$u^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(t+2m)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(t-2m)},$$

$$mu^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(t+2m)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(t-2m)},$$

$$u^{\frac{3}{2}} - u^{-\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{4}(t-m)\sqrt{(t+2m)} - \tfrac{3}{4}(t+m)\sqrt{(t-2m)},$$

$$du = \tfrac{1}{4}dt - \frac{\frac{1}{2}tdt}{\sqrt{(t^2-4m^2)}};$$

et en faisant toutes les substitutions,

$$Q = \frac{1}{4}\int \frac{(t^2+mt-\frac{1}{2}m^2)\,dt}{\sqrt{(t+2m)}\cdot\sqrt{(5+3m^2t-t^3)}} - \frac{1}{4}\int \frac{(t^2-mt-\frac{3}{2}m^2)\,dt}{\sqrt{(t-2m)}\sqrt{(5+3m^2t-t^3)}}.$$

Il faut observer que le signe du second terme change chaque fois que t passe par la valeur $t = 2m$, ou par la valeur $t = 1+m^2$, c'est-à-dire lorsque l'un des deux radicaux $\sqrt{(t-2m)}$, $\sqrt{(5+3m^2t-t^3)}$ devient nul; car on a $5+3m^2t-t^3 = (1+m^2-t)\,[1-m^2+m^4+(1+m^2)t+t^2]$. En effet, voici la correspondance qui a lieu entre les trois variables z, u, t, aux deux limites de l'intégrale et dans trois points intermédiaires,

$$\begin{array}{lllll} z = 0, & \sqrt{(2-\sqrt{3})}, & 1, & \sqrt{(2+\sqrt{3})}, & \infty, \\ u = 1, & m, & m^2, & m, & 1, \\ t = 1+m^2, & 2m, & 1+m^2, & 2m, & 1+m^2. \end{array}$$

Il en résulte que la seconde intégrale est une quantité qui croît continuellement en même temps que z. Il n'en est pas de même de la première dont la valeur, d'abord négative, atteint son *maximum* lorsque $u = m$, ou $t = 2m$; elle diminue ensuite et devient nulle lorsque $z = 1$, ou $u = m^2$ et $t = 1+m^2$. Cette période se renouvelle dans l'autre partie de la même intégrale depuis $z = 1$ jusqu'à $z = \infty$; ainsi cette intégrale n'entre point dans la valeur complète de Q.

168. Considérons d'abord l'intégrale dont nous venons de parler, ...

$Q' = \frac{1}{4}\int \frac{(t^2+mt-\frac{1}{2}m^2)dt}{\sqrt{(t+2m)}\cdot\sqrt{(5+3m^2t-t^3)}}$, et soit, comme ci-dessus, $t = \frac{1+m^2-2my^2}{1+y^2}$,

$y = r \operatorname{tang} \frac{1}{2} \psi$, $r = \frac{m+1}{\sqrt[4]{3}}$, $b^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, on aura

$$\frac{dt}{\sqrt{(t+2m).\sqrt{(5+3m^2t-t^3)}}} = -\frac{1}{\sqrt[4]{27}} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1-b^2 \sin^2 \psi)}}.$$

Pour les réductions ultérieures, il faut mettre t sous cette forme.....

$t = f + \frac{g}{1 - \cos\lambda \cos\psi}$, et on aura

$$f = \tfrac{1}{2}(m-1)^2 - \frac{(m+1)^2}{2\cos\lambda}, \quad \cot\tfrac{1}{2}\lambda = \frac{m+1}{\sqrt[4]{3}},$$

$$g = (m+1)^2 \frac{\sin^2\lambda}{2\cos\lambda}.$$

Cela posé, en appliquant les formules du n° 144, on aura

$$Q' = -\tfrac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{(t+2m).\sqrt{(5+3m^2t-t^3)}}}{t-f} - \frac{\sqrt[4]{27}}{4}\left[E(b, \psi) - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right)F(b, \psi)\right].$$

Cette quantité est toujours négative; son *maximum* a lieu lorsque $t = 2m$, alors $\psi = \lambda$; elle est nulle aux deux limites de l'intégrale et dans le point intermédiaire où $z = 1$.

Venons maintenant à l'autre intégrale $Q'' = -\frac{1}{4}\int \frac{(t^2 - mt - \frac{1}{2}m^2)dt}{\sqrt{(t-2m).\sqrt{(5+3m^2t-t^3)}}}$.

Si l'on fait comme ci-dessus $t = \frac{1+m^2+2my^2}{1+y^2}$, $y = r' \operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega$, $r' = \frac{\sqrt[4]{27}}{m+1}$, $k^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{m-1}{m+1}(4m+5)$, on aura

$$\frac{-dt}{\sqrt{(t-2m).\sqrt{(5+3m^2t-t^3)}}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{(m+1)^2} \cdot \frac{d\omega}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\omega)}};$$

ensuite, pour appliquer à l'intégrale Q'' la formule du n° 144, il faudra faire $n = -\frac{\sqrt{3}}{(m+1)^2}$, et mettre la valeur de t sous la forme.....

$t = f' + \frac{g'}{1 - \cos\mu \cos\omega}$, dans laquelle on aura

$$f' = \tfrac{1}{2}(m+1)^2 - \frac{(m-1)^2}{2\cos\mu}, \quad \cot\tfrac{1}{2}\mu = r' = \frac{\sqrt[4]{27}}{m+1},$$

$$g' = (m-1)^2 \frac{\sin^2\mu}{2\cos\mu};$$

et l'application de la formule indiquée donnera

$$Q'' = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{(t-2m).\sqrt{(5+3m^2t-t^3)}}}{t-f'} + \frac{(m+1)^2}{4\sqrt[4]{3}}\left[E(k, \omega) - \left(\frac{\sqrt{3}-1+2m}{2\sqrt{3}}\right)F(k, \omega)\right].$$

Dans cette formule, ainsi réduite à une forme très simple, il faut regarder l'angle ω comme croissant continuellement avec z, et alors l'intégrale Q'' sera aussi continuellement croissante, conformément aux conditions dont nous avons fait mention; la correspondance entre z et ω, dans les points principaux, sera donc comme il suit :

$$\begin{array}{lllll} z = 0, & \sqrt{(2-\sqrt{3})}, & 1, & \sqrt{(2+\sqrt{3})}, & \infty, \\ \omega = 0, & \pi, & 2\pi, & 3\pi, & 4\pi. \end{array}$$

Ainsi, pour avoir l'intégrale complète qui répond à $z=\infty$, il faudra faire $t=1+m^2$ et $\omega=4\pi$, ce qui donnera

$$Q''_1 = \frac{2(m+1)^2}{\sqrt[4]{3}}\left[E^1k - \left(\frac{\sqrt{3}-1+2m}{2\sqrt{3}}\right)F^1k\right].$$

On a déjà trouvé $Q'_1=0$; donc $Q_1=Q''_1$. Mais la valeur générale de l'intégrale Z est $Z=z-\frac{1}{2}W-P+Q$; et comme, depuis $z=1$ jusqu'à $z=\infty$, le radical $(p^2-4)^{\frac{1}{2}}$ doit changer de signe, on a $W=p\left(1-\frac{3}{p^2}\right)^{\frac{2}{3}}$ $+(p^2-4)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{3}{p^2}\right)^{-\frac{1}{3}}$; donc, à la dernière limite où $p=\infty$, on a $W=2p=2z$ (*), et par conséquent, $z-\frac{1}{2}W=0$; d'ailleurs, à cette même limite, $P_1=0$, donc $Z^1=Q_1=Q''_1$, ou

$$Z^1 = \frac{2(m+1)^2}{\sqrt[4]{3}}\left[E^1k - \left(\frac{\sqrt{3}-1+2m}{2\sqrt{3}}\right)F^1k\right].$$

169. Par la première méthode, on a trouvé $Z^1=\frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{\pi}{F^1c}$; égalant ces deux valeurs, et observant que par un résultat précédent, $F^1i=(m+1)^2F^1c$, on aura

$$E^1k = \left(\frac{1}{2}+\frac{2m-1}{2\sqrt{3}}\right)F^1k + \frac{\pi}{4F^1i}.$$

Au moyen de cette équation et de celle des complémens $\frac{\pi}{2}=E^1kF^1i+E^1iF^1k-F^1kF^1i$, on trouvera l'expression de la fonction E^1i, savoir,

(*) C'est ce qu'on trouve encore plus facilement en exprimant W en fonction de z, car alors on a sans ambiguité $W=\frac{z(z^2-1)(2z^2+1)}{(z^2+1)\sqrt[3]{(z^6+1)}}$, et il est visible que lorsque $z=\infty$, la partie algébrique $z-\frac{1}{2}W$ se réduit à zéro.

$$E^1 i = \left(\tfrac{1}{2} + \frac{1-2m}{2\sqrt{3}}\right) F^1 i + \frac{\pi}{4F^1 k};$$

d'où l'on voit que les fonctions de seconde espèce, $E^1 k$, $E^1 i$, se déterminent exactement et d'une manière très simple par les fonctions de première espèce $F^1 k$, $F^1 i$, ou seulement par l'une des deux, puisqu'on a $F^1 i = 3\sqrt{3} \cdot F^1 k$, de sorte que toutes ces fonctions et toutes celles qui appartiennent aux deux échelles formées d'après les modules complémentaires k et i se déterminent par une seule de ces fonctions, ou, si l'on veut, par la seule fonction $F^1 c$, dont le module est sin 15°. Voilà donc deux suites infinies de transcendantes E^1, F^1, formées d'après les modules k et i, et deux autres suites formées d'après les modules sin 15° et sin 75°, qui toutes se déterminent exactement par un seul terme de ces quatre séries infinies.

170. Les deux expressions que nous avons obtenues de l'intégrale indéfinie Z_1 étant égalées entre elles donneront cette équation générale :

$$\begin{aligned} E(c,\phi) - \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right) F(c,\phi) = T &- \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\left[E(b,\zeta) - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right) F(b,\zeta)\right] \\ &- \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\left[E(b,\psi) - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right) F(b,\zeta)\right] \\ &+ \frac{(m+1)^2}{4\sqrt{3}}\left[E(k,\omega) - \left(\frac{\sqrt{3}-1+2m}{2\sqrt{3}}\right) F(k,\omega)\right], \end{aligned}$$

dans laquelle T est une quantité algébrique qui s'évanouit au commencement et à la fin de l'intégrale. Or, il a été prouvé ci-dessus que toute fonction de la forme $E(b,\zeta) - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right) F(b,\zeta)$, peut être changée en une autre de la forme $\sqrt{3}\left[E(c,\sigma) - \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right) F(c,\sigma)\right] + V$, V étant une quantité algébrique. D'ailleurs la somme ou la différence de deux quantités de la forme $E(c,\sigma) - \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right) F(c,\sigma)$ pourra toujours se réduire à une quantité de même forme, plus une quantité algébrique. Donc l'équation précédente pourra toujours être mise sous la forme

$$\frac{(m+1)^2}{3\sqrt{3}}\left[E(k,\omega) - \left(\frac{\sqrt{3}-1+2m}{2\sqrt{3}}\right) F(k,\omega)\right] = Q + E(c,\xi) - \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right) F(c,\xi),$$

Q étant une quantité algébrique qui s'évanouit aux deux limites de l'intégrale.

Ce résultat joint à celui que nous avons trouvé pour la fonction $F(k,\omega)$, prouve que les fonctions E et F, dont le module est k, se réduisent toujours à des fonctions de même nature, dont le module est c. Nous nous contentons ici de démontrer la possibilité de cette réduction, sans développer les for-

mules par lesquelles on peut l'effectuer, parce que cette résolution, qui est un beau théorème d'analyse, ne serait d'aucune utilité dans la pratique.

§ IV. *De l'intégrale* $U = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)}}$.

171. Soit $\sqrt[3]{(1-x^6)} = 1 - y^2$, on aura $U = \int \frac{(1-y^2)dy}{\sqrt{(3-3y^2+y^4)}}$. Si on fait varier x depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, y variera de même depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$. On pourrait faire varier ultérieurement x depuis $x=1$ jusqu'à $x=\infty$, mais dans cette partie l'intégrale serait négative, et il est inutile de s'en occuper.

Soit de nouveau $y = \sqrt[4]{3}\tang\frac{1}{2}\psi$, $b^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, on aura $U = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}}$ $\int \frac{d\psi(1-\sqrt{3}\tang^2\frac{1}{2}\psi)}{\sqrt{(1-b^2\sin^2\psi)}}$, ou en achevant l'intégration,

$$U = \sqrt[4]{3}E\left[(b,\psi) - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right)F(b,\psi) - \Delta(b,\psi)\tang\psi\right].$$

Pour avoir l'intégrale complète, soit $x=1$, on aura $p=1$, $\psi=\lambda$, et $\tang\frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$; or cette valeur de λ donne $F(b,\lambda) = \frac{2}{3}F^1 b$. Ayant donc $3F(b,\lambda) = F(b,\pi)$, on trouvera par les formules connues (art. 60) $3E(b,\lambda) - E(b,\pi) = b^2\sin^3\lambda$; dans le même cas $\Delta(b,\lambda) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$; donc l'intégrale complète

$$U^1 = \frac{2}{\sqrt[4]{27}}\left[E^1 b - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right)F^1 b\right].$$

172. Cherchons maintenant la même intégrale par une autre méthode; soit $\frac{1}{x} - x = p$, on aura $\sqrt[3]{(1-x^6)} = x^3\sqrt{(p^3+3p)}$, $x = -\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\sqrt{(p^2+4)}$, ce qui donne la transformée

$$U = \frac{1}{2}\int \frac{pdp}{\sqrt[3]{(p^3-3p)}} - \frac{1}{2}\int \frac{(p^2+2)\,dp}{\sqrt{(p^2+4)}\cdot\sqrt[3]{(p^3+3p)}},$$

dans laquelle les intégrales s'étendent de $p=\infty$ à $p=0$.

Pour éviter les quantités infinies qui ont lieu à la première limite, soit

$$P = \frac{1}{2}\int\left(\frac{pdp}{\sqrt[3]{(p^3+3p)}} - dp\right),$$

$$Q = \frac{1}{2}\int\left(\frac{(p^2+2)dp}{\sqrt{(p^2+4)}\cdot\sqrt[3]{(p^3+3p)}} - dp\right),$$

on aura $U = P - Q$. Ainsi tout se réduit à trouver les intégrales P et Q.

Soit $\sqrt[3]{(p^3+3p)} = pv$, ou $p^2 = \frac{3}{v^3-1}$, on aura

$$P = \tfrac{1}{2}p(v^2-1) - \frac{\sqrt{3}}{4}\int\frac{v\,dv}{\sqrt{(v^3-1)}}.$$

La partie hors du signe $\frac{1}{2}p(v^2-1)$ s'évanouit au commencement de l'intégrale, lorsque $v = 1$. Ainsi il reste à trouver l'intégrale $R = \int\frac{v\,dv}{\sqrt{(v^3-1)}}$ qui doit s'étendre depuis $v = 1$ jusqu'à $v = \infty$, et on aura $P = \frac{1}{2}p(v^2-1) - \frac{\sqrt{3}}{4}R$.

Soit $v = 1 + \sqrt{3}\tang^2\frac{1}{2}\varphi$, $c^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$, on aura $R = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\int\frac{(1+\sqrt{3}\tang^2\frac{1}{2}\varphi)d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}$,

ou $$R = 2\sqrt[4]{3}\left[\Delta(c,\varphi)\tang\tfrac{1}{2}\varphi + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}F(c,\varphi) - E(c,\varphi)\right].$$

Soit la partie algébrique $\frac{p}{2}(v^2-1) - \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta(c,\varphi)\tang\frac{1}{2}\varphi = T$, et on aura

$$P = T + \tfrac{1}{2}\sqrt[4]{27}\left[E(c,\varphi) - \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right)F(c,\varphi)\right].$$

Dans la limite on a $v = \infty$, $T = 0$, $\varphi = \pi$; donc l'intégrale complète

$$P' = \sqrt[4]{27}\left[E'c - \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right)F'c\right] = \frac{\pi\sqrt[4]{3}}{4F'c}.$$

Pour avoir maintenant l'intégrale Q, il faut d'abord substituer la valeur de p en v, ce qui donnera

$$Q = \int\left[-\tfrac{1}{2}dp - \tfrac{3}{4}\cdot\frac{v\,dv(2v^3+1)}{(v^3-1)^{\frac{3}{2}}(4v^3-1)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

Soit $w = \frac{1}{v}\sqrt{\left(\frac{4v^3-1}{v^3-1}\right)}$, on aura cette réduction

$$Q = \tfrac{1}{2}(w-p) + \tfrac{1}{2}\int\frac{dv}{v^2}\sqrt{\left(\frac{v^3-1}{4v^3-1}\right)},$$

où la partie algébrique $\frac{1}{2}(w-p)$ s'évanouit à la première limite, lorsque $v = 1$. Pour avoir l'intégrale qui reste à trouver, soit $m^3 = 2$ et $m^2v^2+1 = vt$, on aura par des réductions semblables à celles des exemples précédens,

$$Q = \tfrac{1}{2}(w-p) + \tfrac{1}{4}\int\frac{(t^2+mt-\frac{1}{2}m^2)\,dt}{\sqrt{(t+2m)}\cdot\sqrt{(t^3-3m^2t-5)}} - \tfrac{1}{4}\int\frac{(t^2-mt-\frac{3}{2}m^2)\,dt}{\sqrt{(t-2m)}\cdot\sqrt{(t^3-3m^2t-5)}}.$$

173. Cherchons d'abord l'intégrale $M = \int \frac{(t^2 + mt - \frac{1}{2}m^2)\,dt}{\sqrt{(t+2m)}.\sqrt{(t^3 - 3m^2t - 5)}}$; on a déjà trouvé qu'en faisant $t = \frac{m^2 + 1 + 2my^2}{1 - y^2}$, $y = r \tang \frac{1}{2}\zeta$, $r = \frac{m+1}{\sqrt[4]{3}}$, $c^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$, on a $\frac{dt}{\sqrt{(t+2m)}.\sqrt{(t^3 - 3m^2t - 5)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{27}} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \zeta)}}$. Observons en outre que t peut être mis sous la forme $t = f + \frac{g}{1 - h \cos \zeta}$, ce qui donnera

$$f = (m^2 + 1) \sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda - 2m \cos^2 \tfrac{1}{2}\lambda, \quad \tang \tfrac{1}{2}\lambda = \frac{1}{r} = \frac{\sqrt[4]{3}}{m+1},$$

$$g = -\frac{(m+1)^2 \sin^2 \lambda}{2 \cos \lambda}, \quad h = \frac{1}{\cos \lambda}.$$

Appliquant donc les formules du n° 144, où il faut faire $X = (t + 2m)(t^3 - 3m^2t - 5)$, $n = \frac{1}{\sqrt[4]{27}}$, on aura $\frac{ddX}{12dt^2} = t^2 + mt - \frac{1}{2}m^2$, et l'intégrale cherchée

$$M = \frac{\sqrt{X}}{t - f} + \sqrt[4]{27}\left[\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} F(c, \zeta) - E(c, \zeta)\right].$$

Cette intégrale s'évanouit, comme cela doit être, lorsque $t = 1 + m^2$ et $\zeta = 0$; pour avoir l'intégrale complète, il faut faire $t = \infty$, et $\zeta = \lambda$; alors le terme algébrique $\frac{\sqrt{X}}{t - f}$ se réduit à $t + m + f$, et nous le laissons sous cette forme, parce que le terme infini t sera détruit par un terme semblable provenant de l'autre intégrale.

Quant à la valeur $\varphi = \lambda$, pour laquelle on a $\tang \frac{1}{2}\lambda = \frac{\sqrt[4]{3}}{m+1}$, cette valeur répond à la fonction $F(c, \lambda) = \frac{2}{3} F'c$, et on a en même temps $E(c, \lambda) = \frac{2}{3} E'c + \frac{1}{3} c^2 \sin^3 \lambda$; donc la valeur complète de M est

$$M' = t + m + f - \tfrac{2}{3} \sqrt[4]{27}\left[E'c - \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}}\right) F'c + \tfrac{1}{2} c^2 \sin^3 \lambda\right];$$

or on trouve $f + m = \frac{c^2}{\sqrt[4]{3}} \sin^3 \lambda$, ainsi on a simplement

$$M' = t - \frac{2}{\sqrt[4]{3}}\left[E'c - \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}}\right) F'c\right].$$

174. Venons maintenant à la seconde intégrale..... $N = \int \frac{(t^2 - mt - \frac{3}{2}m^2)\,dt}{\sqrt{(t - 2m)}.\sqrt{(t^3 - 3m^2t - 5)}}$; on a trouvé ci-dessus qu'en faisant.....

$t = \frac{m^2+1-2my^2}{1-y^2}$, $y = r \operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega$, $r = \frac{\sqrt[4]{27}}{m+1}$, $i^2 = \frac{1}{2} + \ldots\ldots\ldots$ $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{m-1}{m+1}(4m+5)$, $n' = \frac{\sqrt[4]{3}}{(m+1)^2}$, on a

$$\frac{dt}{\sqrt{(t-2m)}\cdot\sqrt{(t^3-3m^2t-5)}} = \frac{n'd\omega}{\sqrt{(1-i^2\sin^2\omega)}}:$$

de là il est aisé de parvenir à l'intégrale N, au moyen de la formule de l'article 144.

Dans ce cas il faudra faire $t = f' + \frac{g'}{\cos\omega - \cos\mu}$

$$f' = \tfrac{1}{2}(m+1)^2 - \tfrac{1}{2}(m-1)^2\cos\mu,\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mu = \frac{m+1}{\sqrt[4]{27}}$$

$$g' = \tfrac{1}{2}(m-1)^2\sin\mu;$$

on aura ensuite $X' = (t-2m)(t^3-3m^2t-5)$, $\frac{ddX'}{12dt^2} = t^2 - mt - \frac{1}{2}m^2$; donc

$$\int(t^2-mt-\tfrac{1}{2}m^2)\frac{dt}{\sqrt{X'}} = \frac{\sqrt{X'}}{t-f'} + \frac{(m+1)^2}{\sqrt[4]{3}}\left[\frac{5-4i^2}{6}F(i,\omega) - E(i,\omega)\right].$$

D'un autre côté on a $m^2\int\frac{dt}{\sqrt{X'}} = \frac{m^2\sqrt[4]{3}}{(m+1)^2}F(i,\omega)$; donc l'intégrale

$$N = \frac{\sqrt{X'}}{t-f'} + \frac{(m+1)^2}{\sqrt[4]{3}}\left[\left(\frac{5-4i^2}{6} - \frac{m^2\sqrt{3}}{(m+1)^4}\right)F(i,\omega) - E(i,\omega)\right];$$

mais en substituant la valeur de i^2, on a $\frac{5-4i^2}{6} - \frac{m^2\sqrt{3}}{(m+1)^4} = \frac{\sqrt{3}+1-2m}{2\sqrt{3}}$; donc

$$N = \frac{\sqrt{X'}}{t-f'} - \frac{(m+1)^2}{\sqrt[4]{3}}\left[E(i,\omega) - \left(\frac{\sqrt{3}+1-2m}{2\sqrt{3}}\right)F(i,\omega)\right].$$

Pour avoir l'intégrale complète, il faut faire $\omega = \mu$, et nous avons déjà vu que pour cette valeur on a $F(i,\mu) = \frac{2}{3}F^1 i$, ce qui donne en même temps $E(i,\mu) = \frac{2}{3}E^1 i + \frac{1}{3}i^2\sin^3\mu$; or plus on est près de la limite $t = \infty$, plus on a exactement $\frac{\sqrt{X'}}{t-f'} = t - m + f'$; d'ailleurs on trouve encore ici $f' = m + \frac{(m+1)^2}{3\sqrt[4]{3}}i^2\sin^3\mu$; donc on aura à la limite

$$N^1 = t - \frac{2(m+1)^2}{3\sqrt[4]{3}}\left[E^1 i - \left(\frac{\sqrt{3}+1-2m}{2\sqrt{3}}\right)F^1 i\right].$$

De là on tire la valeur complète de l'intégrale Q, savoir :

$$Q^1 = \frac{(m+1)^2}{6\sqrt[4]{3}}\left[E^1 i - \left(\frac{\sqrt{3}+1-2m}{2\sqrt{3}}\right)F^1 i\right] - \frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\left[E^1 c - \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right)F^1 c\right].$$

Maintenant comme on a $U^1 = P^1 - Q^1$, il viendra

$$U^1 = \frac{7}{2\sqrt[4]{3}}\left[E^1 c - \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right)F^1 c\right] - \frac{(m+1)^2}{6\sqrt[4]{3}}\left[E^1 i - \left(\frac{\sqrt{3}+1-2m}{2\sqrt{3}}\right)F^1 i\right].$$

Égalant cette valeur à celle qu'on a trouvée par la première méthode, laquelle est

$$U^1 = \frac{2}{\sqrt[4]{27}}\left[E^1 b - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right)F^1 b\right] = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}\left[E^1 c - \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right)F^1 c\right],$$ on aura

$$E^1 i - \left(\frac{\sqrt{3}+1-2m}{2\sqrt{3}}\right)F^1 i = \frac{9}{(m+1)^2}\left[E^1 c - \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right)F^1 c\right].$$

Mettant dans le second membre la valeur $E^1 c - \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right)F^1 c = \frac{\pi}{4\sqrt{3}.F^1 c}$, on aura enfin

$$E^1 i - \left(\frac{\sqrt{3}+1-2m}{2\sqrt{3}}\right)F^1 i = \frac{\pi}{4F^1 c}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{(m+1)^2} = \frac{\pi}{4F^1 k};$$

équation qui s'accorde entièrement avec celle que nous avons trouvée ci-dessus par une voie très différente.

175. Si on égale maintenant les deux valeurs qui ont été obtenues pour l'intégrale indéfinie U, on aura l'équation générale

$$\begin{aligned} E(b,\psi) - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right)F(b,\psi) = T &+ \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\left[E(c,\varphi) - \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right)F(c,\varphi)\right] \\ &- \sqrt{3}\left[E(c,\zeta) - \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right)F(c,\zeta)\right] \\ &- \frac{(m+1)^2}{\sqrt{3}}\left[E(i,\omega) - \left(\frac{\sqrt{3}+1-2m}{2\sqrt{3}}\right)F(i,\omega)\right], \end{aligned}$$

dans laquelle T est une quantité algébrique qu'on peut déduire de nos formules. Par cette équation et par celle de l'art. 165 on pourra toujours exprimer les fonctions $E(i,\omega)$, $F(i,\omega)$, dont le module est i, par des fonctions semblables dont le module est c. Mais il nous suffit d'avoir prouvé que ces transformations sont toujours possibles, car il n'y aurait aucun avantage à les effectuer dans la pratique; il n'y a que les valeurs des fonctions complètes qui par la simplicité des résultats méritent les développemens que nous leur avons donnés. Nous avons donc quatre échelles formées d'après les modules c, b, k et i, dans lesquelles les fonctions F et E, en nombre infini dans chaque échelle, peuvent être réduites par des formules

algébriques aux seules fonctions $F(c,\varphi)$, $E(c,\varphi)$. Quant aux fonctions complètes F^1 et E^1, rapportées à un terme quelconque de ces quatre échelles infiniment étendues, elles peuvent se déterminer toutes par les deux seules fonctions complètes F^1c, E^1c, ou par l'une des deux seulement.

Remarque générale.

176. On peut supposer que les fonctions complètes de la seconde espèce E^1c, E^1b, s'expriment par les fonctions de première espèce F^1c, F^1b, de la manière suivante :

$$E^1c = (\tfrac{1}{2} + p)F^1c + \frac{\pi}{4F^1b},$$

$$E^1b = (\tfrac{1}{2} - p)F^1b + \frac{\pi}{4F^1c}.$$

En effet, ces deux équations s'accordent avec l'équation des fonctions complémentaires, et pour qu'elles aient lieu, il ne s'agit que de déterminer convenablement la quantité p. Or, d'après les résultats trouvés dans ces trois derniers chapitres, on connaît la valeur de p dans quelques cas particuliers que nous rassemblons ici.

1°. Lorsque $c = b = \sin 45°$, on a $p = 0$;

2°. Lorsque $c = \sqrt{2} - 1$, on a $p = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{2}\tang 22° \frac{1}{2}$;

3°. Lorsque $c = \sin 15°$, on a $p = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\tang 30°$;

4°. Lorsque $c = \frac{\sqrt{2} - \sqrt[4]{3}}{1 + \sqrt{3}}$, on a $p = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.\sin 15°$;

5°. Lorsque $c^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{m-1}{m+1}(4m+5)$ et $m = \sqrt[3]{2}$, on a $p = \frac{2m-1}{2\sqrt{3}}$;

6°. Enfin, lorsque c est infiniment petit, on a $F^1c = \frac{\pi}{2}(1 + \frac{1}{4}c^2)$, $E^1c = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{4}c^2)$, $F^1b = (1 + \frac{1}{4}c^2)\log\frac{4}{c}$; donc $p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\log\frac{4}{c}}$.

Ainsi on voit que depuis $c = 0$ jusqu'à $c = \sin 45°$, la quantité p varie par degrés depuis $p = \frac{1}{2}$ jusqu'à $p = 0$.

On a en général $2p = \frac{E^1c}{F^1c} - \frac{E^1b}{F^1b}$; ainsi p serait connue si on connaissait la valeur de $\frac{E^1c}{F^1c}$; car ce rapport, qui est une certaine fonction de c, étant désigné par ψc, on aurait $2p = \psi c - \psi b$.

177. Soit $x = \frac{E'c}{F'c}$, ou simplement $x = \frac{E}{F}$; comme on a dans le cas des fonctions complètes $\frac{dE}{dc} = \frac{1}{c}(E - F)$ et $\frac{dF}{dc} = \frac{1}{b^2c}(E - b^2F)$, on aura $\frac{dx}{dc} = \frac{1}{b^2c}\left(2b^2 . \frac{E}{F} - b^2 - \frac{E^2}{F^2}\right)$; ainsi la fonction x est déterminée par l'équation différentielle

$$b^2c\frac{dx}{dc} + x^2 - 2b^2x + b^2 = 0.$$

Si l'on fait $x - b^2 = y$, cette équation deviendra

$$b^2c\frac{dy}{dc} + y^2 - b^2c^2 = 0;$$

mais malgré sa simplicité apparente, elle n'est point intégrable par les moyens ordinaires, c'est-à-dire, par les fonctions algébriques, circulaires et logarithmiques.

Nous connaissons cependant une valeur particulière $x = \frac{E'c}{F'c}$, qui satisfait à l'équation différentielle en x, et on peut même en trouver assez facilement l'intégrale complète. En effet, puisque $F = E - c\frac{dE}{dc}$, la valeur $x = \frac{E}{E - c\frac{dE}{dc}}$ devra satisfaire à notre équation différentielle. Mais cette substitution ne peut manquer de reproduire l'équation différentielle du second ordre qui détermine E (art. 46); et puisqu'on satisfait généralement à cette équation en mettant $\alpha E'c + \alpha'(F'b - E'b)$ à la place de E, on aura aussi généralement, en faisant $\alpha' = \alpha\mathcal{C}$,

$$x = \frac{E'c + \mathcal{C}(F'b - E'b)}{E'c - c\frac{dE'c}{dc} + \mathcal{C}\left(F'b - c\frac{dF'b}{dc}\right) - \mathcal{C}\left(E'b - \frac{cdE'b}{dc}\right)},$$

valeur qui se réduit à

$$x = \frac{E'c + \mathcal{C}(F'b - E'b)}{F'c + \mathcal{C}F'b}.$$

Telle est donc l'intégrale de l'équation différentielle

$$b^2c\frac{dx}{dc} + x^2 - 2b^2x + b^2 = 0;$$

et on déterminera la constante arbitraire $\mathcal{C}$, de manière qu'une valeur donnée de x corresponde à une valeur donnée de c. Cette valeur de c,

choisie pour déterminer la constante, ne doit point être l'une des limites $c = 0$, $c = 1$; car en faisant $a = 0$, on a $F^1 b = \log \frac{4}{c} = \infty$. Ainsi, quelque soit $\mathcal{C}$, la valeur de x sera $= 1$; il en est de même lorsqu'on fait $c = 1$. Mais pour toute autre valeur de c l'indétermination cesse. Supposons, par exemple, qu'on veuille avoir $x = 0$ lorsque $c = \sin 45^\circ = b$, on aura $\mathcal{C} = -\frac{F^1}{F^1 - E^1}$, les fonctions F^1, E^1 étant prises pour le module $\sin 45^\circ$.

On voit, par ce nouvel exemple, que les fonctions elliptiques peuvent servir dans certains cas à intégrer des équations différentielles qui ne sont point accessibles aux méthodes ordinaires.

CHAPITRE XXXI.

Sur une nouvelle échelle de modules qui conduit directement aux théorèmes des trois chapitres précédens et à une infinité d'autres semblables.

178. Pour généraliser la formule de l'art. 153, supposons qu'entre les amplitudes ω et φ on ait l'équation

$$\sin \omega = \frac{\sin \varphi (m + h \sin^2 \varphi)}{1 + k \sin^2 \varphi}, \qquad (1)$$

m, h, k étant des coefficiens auxquels nous imposerons successivement diverses conditions. Et d'abord, si on veut que les angles ω et φ, qui naissent en même temps, parviennent aussi en même temps à la valeur 90° ou $\frac{1}{2}\pi$, il faudra satisfaire à la condition $m + h = 1 + k$; dès-lors on prévoit que la valeur de $\cos \omega$ devra avoir pour facteur $\cos \varphi$; on aura en effet

$$\cos \omega = \frac{\cos \varphi \sqrt{[1 + (2k - m^2 + 1) \sin^2 \varphi + h^2 \sin^4 \varphi]}}{1 + k \sin^2 \varphi}.$$

Pour plus de simplicité, nous supposerons que le radical se réduit à une quantité rationnelle, laquelle ne pourra être que $1 + h \sin^2 \varphi$, ou $1 - h \sin^2 \varphi$. La première valeur ne mènerait à aucun résultat; ainsi il faudra supposer $2k - m^2 + 1 = -2h$. A l'aide de ces deux conditions, qui

donnent $k+h=\frac{1}{2}(m^2-1)$ et $k-h=m-1$, on aura les valeurs des coefficiens k et h, et celle de $\cos\omega$ exprimées comme il suit :

$$\left.\begin{array}{l} k=\frac{1}{4}(m-1)(m+3) \\ h=\frac{1}{4}(m-1)^2 \end{array}\right\} \quad \cos\omega=\frac{\cos\varphi(1-h\sin^2\varphi)}{1+k\sin^2\varphi}, \qquad (2)$$

et il ne reste plus que m d'arbitraire. Mais afin que la variable ω augmente par degrés de 0° à 90°, de même que la variable φ dont elle dépend, il est nécessaire que h soit plus petit que 1, et qu'ainsi on ait $m<3$. On verra bientôt qu'une autre considération exige que m soit >1 ; ainsi nous supposerons toujours m compris entre 1 et 3, de sorte que les coefficiens m, k, h seront tous trois positifs.

179. Cela posé, les équations (1) et (2) donnent par la différentiation

$$d\omega=\frac{d\varphi\,(m-k\sin^2\varphi)}{1+k\sin^2\varphi}; \qquad (3)$$

et parce que $\sqrt{(1+k)}=\frac{1}{2}(m+1)$, on trouverait directement par l'intégration de cette formule

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\omega+\varphi)=\frac{m+1}{2}\operatorname{tang}\varphi, \qquad (4)$$

équation qui revient à l'équation (1), et qui est d'un usage plus commode pour le calcul trigonométrique quand on voudra déduire ω de φ, ou φ de ω.

Soient c et a deux modules tellement liés entre eux, qu'on ait l'équation

$$1-a^2\sin^2\omega=(1-c^2\sin^2\varphi).\left(\frac{1-\frac{k}{m}\sin^2\varphi}{1+k\sin^2\varphi}\right)^2;$$

on trouvera qu'il est possible, en général, de satisfaire à cette équation (*). Il faut pour cela que les valeurs de a^2 et c^2, et par suite celles des complémens $b^2=1-a^2$, $b^2=1-c^2$, soient ainsi exprimées,

$$\left.\begin{array}{ll} a^2=\frac{(m-1)(m+3)^3}{16m^3}, & c^2=\frac{(m-1)^3(m+3)}{16m} \\ b^2=\frac{(m+1)(3-m)^3}{16m^3}, & b^2=\frac{(m+1)^3(3-m)}{16m} \end{array}\right\} \qquad (5)$$

et on voit que les conditions $m>1$ et $m<3$ sont nécessaires pour que les modules a et c soient réels et plus petits que l'unité

(*) Le succès de cette recherche est fondé sur ce que le rapport de $\Delta(a,\omega)$ à $\Delta(c,\varphi)$ peut s'exprimer rationnellement sans assujétir l'indéterminée m à aucune condition.

On aura donc, d'après ces conditions,

$$\Delta(\alpha, \omega) = \frac{1 - \frac{k}{m}\sin^2\varphi}{1 + k\sin^2\varphi}.\Delta(c, \varphi); \tag{6}$$

valeur qui étant combinée avec l'équation (3), donne ce résultat très remarquable $\frac{d\omega}{\Delta(\alpha, \omega)} = \frac{m d\varphi}{\Delta(c, \varphi)}$, et en intégrant,

$$F(\alpha, \omega) = mF(c, \varphi). \tag{7}$$

Nous parvenons ainsi à deux fonctions de la première espèce, qui sont entre elles dans un rapport constant, et dont les modules α et c dépendent en général de la quantité m qu'on peut prendre à volonté entre les limites 1 et 3. Puisqu'on a en même temps $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ et $\omega = \frac{1}{2}\pi$, les fonctions complètes seront entre elles dans le même rapport, et on aura

$$F'\alpha = mF'c. \tag{8}$$

180. Pour avoir maintenant l'expression de $E(\alpha, \omega)$, il faut intégrer la formule

$$d\omega\Delta(\alpha, \omega) = m d\varphi\Delta(c, \varphi).\left(\frac{1 - \frac{k}{m}\sin^2\varphi}{1 + k\sin^2\varphi}\right)^2;$$

or, par les réductions connues, on obtient l'intégrale

$$E(\alpha, \omega) = \frac{3}{m}E(c, \varphi) - \frac{(m+1)(3-m)}{2m}F(c, \varphi) + U, \tag{9}$$

où l'on a la fonction algébrique $U = \frac{2k}{m}.\frac{\Delta\sin\varphi\cos\varphi}{1 + k\sin^2\varphi}$.

Il en résulte pour la valeur de la fonction complète

$$E'\alpha = \frac{3}{m}E'c - \frac{(m+1)(3-m)}{2m}F'c. \tag{10}$$

Telles sont les formules nouvelles qui peuvent servir à exprimer les fonctions F et E dont le module est α, par le moyen des fonctions semblables dont le module est c, et réciproquement; car il est visible qu'on déduirait des mêmes formules les valeurs de $F(c, \varphi)$ et $E(c, \varphi)$ exprimées par les fonctions $F(\alpha, \omega)$ et $E(\alpha, \omega)$.

181. Il faut maintenant entrer dans quelques détails sur les conséquences que présentent les équations (5) et (7).

On remarquera d'abord que des deux modules α et c, α est toujours le

plus grand, car les équations (5) donnent $\frac{c}{\alpha} = \frac{m^2 - m}{m+3}$; or on a $m+3 > m^2 - m$, puisque la différence $m + 3 - (m^2 - m) = (1 + m)(3 - m)$, quantité toujours positive.

Les équations (5) font voir comment les modules α et c se déterminent par le moyen du nombre *régulateur* m supposé connu; réciproquement, étant donné l'un des deux modules α et c, on déterminera m par la résolution de l'une des deux équations du 4ᵉ degré

$$\begin{aligned} &m^4 + (8 - 16\alpha^2)\, m^3 + 18m^2 - 27 = 0, \\ &m^4 - 6m^2 + (8 - 16c^2)\, m - 3 = 0. \end{aligned} \qquad (11)$$

Or ces équations, analogues à celle de la trisection (art. 24) se résolvent par des formules aussi simples que nous donnerons ci-après.

Observons auparavant que si on met $\frac{3}{m}$ à la place de m dans les valeurs des modules α et c, on obtiendra celles de leurs complémens b et β, dans un ordre inverse; c'est-à-dire que si la valeur $m = \mu$ donne les modules $c = \sin\theta$, $\alpha = \sin\lambda$, la valeur $m = \frac{3}{\mu}$ donnera les modules $c = \sin(\frac{1}{2}\pi - \lambda)$ $\alpha = \sin(\frac{1}{2}\pi - \theta)$.

Pour faciliter le calcul des modules d'après une valeur donnée du régulateur m, soit $m = \sqrt{3}\tang M = \tang 60^\circ \tang M$; soit en même temps $p = \frac{\sin(M - 30^\circ)}{\cos M}$, $q = \frac{\cos(M - 30^\circ)}{\sin M}$; si on désigne par $c = \sin\theta$ et $\alpha = \sin\lambda$, les modules qui répondent à une valeur donnée de l'angle M, on aura $\sin^2\theta = p^3 q$ et $\sin^2\lambda = pq^3$. D'après ces formules nous avons calculé la table suivante où l'on trouve les valeurs de θ et λ qui répondent à toutes les valeurs de M, de degré en degré, depuis $M = 30^\circ$ jusqu'à $M = 60^\circ$; il nous a suffi de calculer cette table jusqu'à $M = 45^\circ$, parce que, suivant l'observation précédente, les angles θ et λ qui répondent à une valeur $M = 45^\circ + \omega$, sont les complémens, dans un ordre inverse, des angles qui répondent à la valeur $M = 45^\circ - \omega$.

M.	θ.	λ.	M.	θ.	λ.
Degrés.	Deg.	Deg.	Degrés.	Deg.	Deg.
30	0.00000	0.00000	60	90.00000	90.00000
31	0.23192	22.70276	59	67.29724	89.76808
32	0.65689	31.29088	58	58.70912	89.34311
33	1.20953	38.33242	57	51.66758	88.79047
34	1.86812	43.71964	56	46.28036	88.13188
35	2.62149	48.29777	55	41.70223	87.37851
36	3.46338	52.28853	54	37.71147	86.53662
37	4.39046	55.83042	53	34.16958	85.60954
38	5.40140	59.01366	52	30.98634	84.59860
39	6.49640	61.90115	51	28.09885	83.50360
40	7.67696	64.54037	50	25.45963	82.32304
41	8.94580	66.96550	49	23.03450	81.05420
42	10.30677	69.20429	48	20.79571	79.69323
43	11.76495	71.27849	47	18.72151	78.23505
44	13.32673	73.20565	46	16.79435	76.67327
45	15.00000	75.00000	45	15.00000	75.00000

182. L'équation $F(a, \omega) = mF(c, \varphi)$ où l'on peut prendre à volonté l'un des modules a et c, donne en général le moyen de passer, dans la transformation des fonctions F, d'un module donné à un module plus grand, ou de ce même module à un module plus petit. La même opération pouvant être répétée pour le module ainsi déduit du module primitif, on voit qu'à partir d'un terme donné, la série des modules auxquels les fonctions F sont rapportées, peut être prolongée à l'infini tant dans l'ordre des modules croissans que dans l'ordre des modules décroissans; de là naît par conséquent une nouvelle échelle de modules, essentiellement différente de l'échelle que nous connaissons déjà, mais qui aura des propriétés analogues pour multiplier à l'infini la comparaison des fonctions F, ainsi que celle des fonctions E.

Jetons un coup d'œil sur le tableau précédent pour voir dans quelques exemples comment se forme la série des modules construite d'après un premier module donné.

Soit le module donné sin 15°, si on veut passer de ce module à un module plus grand, il faudra faire $\theta = 15°$, et on trouvera dans la table $\lambda = 75°$; ainsi on peut passer immédiatement du module $c = \sin 15°$ à son complément $b = \sin 75°$; la valeur correspondante de l'angle M est 45°, ainsi celle du régulateur m sera $m = \sqrt{3} \tang 45° = \sqrt{3}$; et on aura entre les fonctions $F(b, \omega)$, $F(c, \varphi)$, l'équation

$$F(b, \omega) = \sqrt{3}.F(c, \varphi),$$

dans laquelle les amplitudes ω et φ doivent satisfaire à l'équation....., $\tang \frac{1}{2}(\omega + \varphi) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \tang \varphi$. Nous parvenons donc ainsi de la manière la plus directe au résultat principal du chapitre XXVIII; mais nous pouvons obtenir en outre une infinité d'autres résultats semblables.

Passons en effet du module sin 75° à un module plus grand; on voit par la table qu'en faisant $\theta = 75°$, la valeur correspondante de λ est comprise entre 89°,768 et 90°; la vraie valeur est 89°,93462 etc.; ce qui donne déjà un module sin 89°,93462 très peu différent de l'unité, celui-ci serait suivi d'un module qui différerait encore beaucoup moins de la limite, et ainsi de suite.

De même, si pour prolonger la suite des modules dans un autre sens, on veut passer du module sin 15° à un module plus petit, on cherchera dans la table une valeur de θ qui réponde à la valeur donnée $\lambda = 15°$; et on voit immédiatement que la valeur cherchée de θ doit être comprise entre 0° et 0°,23192; la vraie valeur est 0°,06538, complément des 89°,93462 qui ont été trouvés pour le terme correspondant de l'échelle ascendante. On peut remarquer au reste que les modules complémentaires ainsi trouvés sin 0°,06538, sin 89°,93462, sont les mêmes que nous avons désignés par k et i dans le chap. XXX, ce qui explique pourquoi les fonctions rapportées à ces modules peuvent se ramener aux fonctions dont sin 15° et sin 75° sont les modules. Mais on voit en même temps que les résultats trouvés pour ces termes particuliers de l'échelle construite sur le module primitif sin 15°, peuvent s'étendre à une infinité d'autres termes de la même échelle.

183. Prenons pour second exemple le module sin 45°; en faisant $\theta = 45°$, on trouve que la valeur correspondante de λ est comprise entre 87°,37851 et 88°,13188; la vraie valeur est 87°,94140. Ainsi le module sin 45° sera suivi du module sin 87°,94140. Si on fait ensuite $\lambda = 45°$, on trouvera que θ est compris entre 1°,86812 et 2°,62149; la vraie valeur est 2°,05860 complément de 87°,94140. Ainsi le module sin 45° est précédé du module sin 2°,05860, et celui-ci le serait d'un module beaucoup plus petit, et ainsi à l'infini. Nous remarquerons que les modules qui suivent et précèdent immédiatement sin 45°, sont ceux que nous avons désignés par c et b dans le chap. XXIX. On explique ainsi pourquoi les fonctions rapportées à ces modules peuvent s'exprimer par celles dont sin 45° est le module.

Au reste, ces deux exemples sont les seuls où l'on rencontre à la fois les modules et leurs complémens, les uns dans la série ascendante, les autres dans la série descendante. Dans le cas du module primitif sin 45°, ce terme tient le milieu dans la série totale, parce qu'il s'identifie avec son complément. Dans le cas du module sin 15°, ce terme et son complément sin 75°, qui le suit immédiatement, occupent le milieu de la série.

184. Puisqu'à partir d'un module donné c, on peut former une suite infinie de modules croissans jusqu'à la limite 1, et une suite infinie de modules décroissans jusqu'à la limite 0, il conviendra d'adopter pour cette nouvelle échelle une notation conforme à celle de l'échelle ordinaire. Nous désignerons en conséquence les modules de la nouvelle échelle dans l'ordre croissant par c, $c_{,}$, $c_{,,}$, $c_{,,,}$, etc., et dans l'ordre décroissant par c, $c_{\circ}$, $c_{\circ\circ}$, etc. Nous affecterons les même indices aux complémens b de ces modules, ainsi qu'aux quantités m et aux amplitudes qui leur correspondent. De cette manière, on aura pour les fonctions F ces deux suites d'équations,

$$\begin{aligned} &mF(c, \varphi)=F(c_{,}, \varphi_{,}),\ m_{,}F(c_{,}, \varphi_{,})=F(c_{,,}, \varphi_{,,}),\ m_{,,}F(c_{,,}, \varphi_{,,})=F(c_{,,,}, \varphi_{,,,}),\ \text{etc.},\\ &F(c, \varphi)=m_{\circ}F(c_{\circ}, \varphi_{\circ}),\ F(c_{\circ}, \varphi_{\circ})=m_{\circ\circ}F(c_{\circ\circ}, \varphi_{\circ\circ}),\ F(c_{\circ\circ\circ}, \varphi_{\circ\circ\circ})=m_{\circ\circ\circ}F(c_{\circ\circ\circ}, \varphi_{\circ\circ\circ}); \end{aligned} \tag{12}$$

et la loi des amplitudes donnée en général par l'équation $\tang \frac{1}{2}(\varphi_{,}+\varphi) = \left(\frac{m+1}{2}\right)\tang\varphi$, se reproduira dans les équations semblables

$$\tang \tfrac{1}{2}(\varphi_{,,}+\varphi_{,}) = \tfrac{1}{2}(m_{,}+1)\tang\varphi_{,},\ \tang \tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_{\circ}) = \tfrac{1}{2}(m_{\circ}+1)\tang\varphi_{\circ},\ \text{etc.}$$

A l'égard des fonctions E, l'équation (9) exprimée dans cette nouvelle notation sera

$$E(c_{,}, \varphi_{,}) = \frac{3}{m}E(c, \varphi) - \frac{(m+1)(3-m)}{2m}F(c, \varphi) + U, \tag{13}$$

U étant mis pour la quantité algébrique $\frac{(m-1)(m+3)}{2m} \cdot \frac{\Delta(c, \varphi)\sin\varphi\cos\varphi}{1+\frac{1}{4}(m-1)(m+3)\sin^2\varphi}$.

Cette équation, accentuée convenablement, s'appliquera à deux autres termes consécutifs quelconques de la même échelle.

Dans le cas des fonctions complètes, où l'on doit faire à la fois $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $\varphi_{,} = \frac{1}{2}\pi$, les formules seront

$$\left.\begin{aligned} F^{1}c_{,} &= mF^{1}c, \\ E^{1}c_{,} &= \frac{3}{m}E^{1}c - \frac{(m+1)(3-m)}{2m}F^{1}c \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Nous conclurons de ces formules que dans la nouvelle échelle de modules, comme dans l'échelle ordinaire, les fonctions F et E, rapportées à un terme

quelconque de l'échelle, peuvent s'exprimer par les fonctions semblables rapportées au module primitif c.

185. Il importe maintenant de faire voir par quelles formules on peut déduire les modules c_1 et c_0 du module donné c. Pour cela, nous remarquerons que par les équations (5) on a

$$\sqrt{(cc_1)} = \frac{(m-1)(m+3)}{4m} = \tfrac{1}{2} + \frac{m^2-3}{4m},$$
$$\sqrt{(bb_1)} = \frac{(m+1)(3-m)}{4m} = \tfrac{1}{2} + \frac{3-m^2}{4m}.$$

Donc entre deux modules consécutifs c et c_1 et leurs complémens b et b_1, on a cette équation très simple

$$\sqrt{(cc_1)} + \sqrt{(bb_1)} = 1. \qquad (15)$$

Si l'on considère dans cette équation c_1 et b_1 comme les inconnues, et qu'on fasse $\sqrt{(cc_1)} = c^2 + bcx$, ce qui donne $\sqrt{(bb_1)} = b^2 - bcx$, on aura $c_1 = c(c+bx)^2$, $b_1 = b(b-cx)^2$, et l'équation pour déterminer x sera $c^2(c+bx)^4 + b^2(b-cx)^4 = 1$, ou

$$x^4 + 6x^2 + \frac{4(c^2-b^2)}{bc}x - 3 = 0.$$

Cette équation tombe encore dans un cas de facile solution; en effet, supposons que le premier membre soit le produit des deux facteurs

$$x^2 + 2x\sqrt{(\epsilon-1)} + 2\epsilon + 1 - 2\mathrm{I},$$
$$x^2 - 2x\sqrt{(\epsilon-1)} + 2\epsilon + 1 + 2\mathrm{I};$$

il faudra simplement satisfaire aux deux conditions

$$\mathrm{I}^2 = 1 + \epsilon + \epsilon^2,\ \mathrm{I}\sqrt{(\epsilon-1)} = \frac{c^2-b^2}{2bc};$$

d'où l'on déduit $\epsilon = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4b^2c^2}\right)}$, $\mathrm{I} = \sqrt{(1+\epsilon+\epsilon^2)}$. On doit prendre I toujours positif; mais $\sqrt{(\epsilon-1)}$, dont la valeur est $\frac{c^2-b^2}{2bc\mathrm{I}}$, devra être du même signe que c^2-b^2.

Cela posé, le second des deux facteurs de notre équation ne donnant que des racines imaginaires, on tirera du premier deux racines réelles que nous désignerons par x_1 et x_0; ces racines sont

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \mp\sqrt{(\epsilon-1)} + \sqrt{[2\sqrt{(1+\epsilon+\epsilon^2)} - \epsilon - 2]} \\ x_0 &= \mp\sqrt{(\epsilon-1)} - \sqrt{[2\sqrt{(1+\epsilon+\epsilon^2)} - \epsilon - 2]} \end{aligned}\right\}, \qquad (16)$$

en observant de prendre pour $\sqrt{(\epsilon-1)}$ le signe supérieur si on a $c > b$, et l'inférieur si on a $c < b$.

La racine $x_{,}$, substituée pour la valeur de x, servira à déterminer $c_{,}$ et $b_{,}$; la racine $x_{,,}$ servira de même à déterminer $c_{,,}$ et $b_{,,}$. En effet, si on veut déduire les modules $c_{,}$ et $b_{,}$ des modules données c et b, on aura à résoudre l'équation $\sqrt{(cc_{,})}+\sqrt{(bb_{,})}=1$, laquelle en faisant $\sqrt{(cc_{,})}=c^2+bcx$, $\sqrt{(bb_{,})}=b^2-bcx$, conduit à la même équation en x, que nous venons de résoudre.

Donc, étant donnés les modules c et b, on trouvera les suivans $c_{,}$ et $b_{,}$, ainsi que les précédens $c_{,,}$, $b_{,,}$, par les formules

$$\left.\begin{array}{ll} c_{,}=c(c+bx_{,})^2, & c_{,,}=c(c+bx_{,,})^2, \\ b_{,}=b(b-cx_{,})^2, & b_{,,}=b(b-cx_{,,})^2, \end{array}\right\} \qquad (17)$$

où il faudra substituer les valeurs de $x_{,}$ et $x_{,,}$ données par les équations (16).

Les mêmes formules serviront à déduire $c_{,,,}$ de $c_{,}$, $c_{,,,,}$ de $c_{,,}$, etc.; elles serviront également à déduire $c_{,,}$ de $c_{,}$, $c_{,,,}$ de $c_{,,}$, etc. Ainsi on prolongera à volonté la série des modules tant dans l'ordre croissant que dans l'ordre décroissant; mais nous donnerons bientôt un moyen plus facile d'atteindre le même but.

Il est bon d'observer que lorsqu'on est parvenu à un module c très petit, le module suivant $c_{,}$ qui se déduit de l'équation $\sqrt{(cc_{,})}+\sqrt{(bb_{,})}=1$, est donné d'une manière très approchée par la formule

$$c_{,}=\tfrac{1}{16}c^3\left(1+\tfrac{3}{4}c^2+\tfrac{75}{128}c^4+\text{etc.}\right). \qquad (18)$$

Ainsi, dans la nouvelle échelle, on passe d'un très-petit module c au module beaucoup plus petit $\frac{1}{16}c^3$, de sorte que le décroissement est beaucoup plus rapide que dans l'échelle ordinaire où l'on a $c^{,}=\frac{2}{4}c^2$.

L'approximation vers l'autre limite n'est pas moins rapide; car si le module c est déjà très près de l'unité, son complément b sera très petit. Mais le complément suivant $b_{,}$ étant déterminé par l'équation $\sqrt{(bb_{,})}+\sqrt{(cc_{,})}=1$, semblable à celle que nous venons de résoudre, on en tirera de même

$$b_{,}=\tfrac{1}{16}b^3\left(1+\tfrac{3}{4}b^2+\tfrac{75}{128}b^4+\text{etc.}\right).$$

186. Il reste à calculer la valeur de m qui répond au module donné c; cette valeur devra être tirée de l'équation

$$m^4-6m^2+(8-16c^2)m-3=0.$$

Soit, pour cet effet, $\delta=\sqrt[3]{(4b^2c^2)}$, on aura la formule

$$m=\pm\sqrt{(1-\delta)}+\sqrt{[2+\delta+2\sqrt{(1+\delta+\delta^2)}]}, \qquad (19)$$

dans laquelle on prendra le signe supérieur pour $\sqrt{(1-\delta)}$ si $c > b$, et l'inférieur si $c < b$.

La même formule servira à calculer un autre terme quelconque m_μ tant de la suite ascendante m, $m_{,}$, $m_{,,}$, etc., que de la suite descendante m, $m_{,}$, $m_{,,}$ etc., il suffira pour cela de mettre c_μ au lieu de c.

Mais il y a un moyen plus simple de calculer la suite des valeurs de m; et d'abord pour déduire $m_{,}$ de m, il faut observer que d'après les équations $F(c_{,}, \varphi_{,}) = mF(c, \varphi)$, $F(c_{,,}, \varphi_{,,}) = m_{,}F(c_{,}, \varphi_{,})$, on a ces deux valeurs de $c_{,}^2$,

$$c_{,}^2 = \frac{(m-1)(m+3)^3}{16m^3}, \quad c_{,}^2 = \frac{(m_{,}-1)^3(3+m_{,})}{16m_{,}}.$$

Faisant donc $m_{,} = x$, on aura à résoudre l'équation

$$(x-1)^3\left(\frac{3}{x}+1\right) = (m-1)\left(\frac{3}{m}+1\right)^3.$$

On satisfait à cette équation en faisant $x = -\frac{3}{m}$; ainsi, en supprimant le facteur inutile $x + \frac{3}{m}$, on n'aura plus à résoudre que l'équation du troisième degré

$$x^3 - \frac{3}{m}x^2 + \left(\frac{9}{m^2} - 6\right)x - m = 0.$$

Or cette équation, traitée par les formules ordinaires conduit à une valeur très simple de x ou de $m_{,}$, laquelle est

$$m_{,} = \frac{1}{m}\left[1 + \sqrt[3]{(m^2-1)}\right]^2. \tag{20}$$

On déduira semblablement $m_{,,}$ de $m_{,}$, $m_{,,,}$ de $m_{,,}$, etc., ce qui permettra de continuer indéfiniment la suite croissante m, $m_{,}$, $m_{,,}$, etc., dont la limite est 3.

Pour déduire $m_{\circ}$ de m, l'équation à résoudre sera, en faisant $m_{\circ} = x$,

$$(x-1)\left(1+\frac{3}{x}\right) = (m-1)^3\left(1+\frac{3}{m}\right).$$

Or cette équation résulte de celle que nous venons de résoudre, lorsqu'on change à la fois x en $-\frac{3}{x}$ et m en $-\frac{3}{m}$; on déduira donc de la solution précédente

$$\frac{3}{m_{\circ}} = \frac{m}{3}\left[1 + \sqrt[3]{\left(\frac{9}{m^2}-1\right)}\right]^2. \tag{21}$$

Cette formule servira à calculer m_0 par le moyen de m, semblablement m_{00} par le moyen de m_0, et ainsi à l'infini. On prolongera donc à volonté la suite m, m_0, m_{00}, etc., dont la limite est 1.

Supposons qu'on soit parvenu à une valeur de m, très peu différente de l'unité, et soit cette valeur $m = 1 + \omega$, si on désigne par m_0 le terme suivant, on aura $m_0 = 1 + \frac{1}{16}\omega^3$; ainsi on voit combien est rapide l'approximation vers la limite 1.

De même, à l'autre extrémité de l'échelle, si on est parvenu à une valeur très approchée de la limite 3, soit cette valeur $m = 3(1 - \omega)$, la valeur suivante, encore beaucoup plus approchée de la limite, sera $m_{\prime} = 3(1 - \frac{1}{16}\omega^3)$. Donc vers les deux limites de l'échelle, on a sensiblement

$$m_0 - 1 = \frac{1}{16}(m-1)^3, \quad \frac{3}{m_{\prime}} - 1 = \frac{1}{16}\left(\frac{3}{m} - 1\right)^3.$$

187. Voyons maintenant quel est l'usage des formules précédentes pour calculer les valeurs approchées des fonctions F et E.

Il résulte des équations (12) qu'on a successivement

$$F(c, \varphi) = m_0 F(c_0, \varphi_0) = m_0 m_{00} F(c_{00}, \varphi_{00}), \text{ etc.}$$

Or, quand on a prolongé la suite c, c_0, c_{00}, etc., jusqu'à un terme c_μ assez petit pour être négligé, on a avec une exactitude suffisante $F(c_\mu, \varphi_\mu) = \varphi_\mu$. Donc alors la valeur de la fonction $F(c, \varphi)$ est

$$F(c, \varphi) = m_0 m_{00} \ldots\ldots m_\mu \varphi_\mu. \qquad (22)$$

Quant à l'amplitude φ_μ, on la déduira de φ par la résolution des équations successives :

$$\tang\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi_0) = \tfrac{1}{2}(1 + m_0)\tang\varphi_0, \quad \tang\tfrac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi_{00}) = \tfrac{1}{2}(1 + m_{00})\tang\varphi_{00}, \text{ etc.};$$

ce qui n'exige, comme on voit, d'autres données, outre l'amplitude φ, que les termes de la suite m_0, m_{00}, m_{000}, etc. Dans le cas de la fonction complète, il n'y a point d'amplitudes à calculer, puisqu'elles sont toutes égales à $\frac{1}{2}\pi$; on aura donc simplement

$$F'c = m_0 m_{00} \ldots\ldots m_\mu \cdot \tfrac{1}{2}\pi. \qquad (2)$$

Dans ces deux cas, la suite m_0, m_{00}, etc., doit être prolongée jusqu'à un terme m_μ dont la différence avec l'unité puisse être négligée.

Une autre valeur de la fonction $F(c, \varphi)$ peut être obtenue par le calcul des termes croissans m, $m_{\prime}$, $m_{\prime\prime}$, etc. On a en effet

$$F(c, \varphi) = \frac{1}{m} F(c_{\prime}, \varphi_{\prime}) = \frac{1}{m m_{\prime}} F(c_{\prime\prime}, \varphi_{\prime\prime}), \text{ etc.}$$

Supposons que la suite des m soit continuée jusqu'à un terme m_μ dont la différence avec la limite 3 soit négligeable, alors le module c_μ sera tellement près de l'unité, que le quarré de son complément $(b_\mu)^2$, qui a pour valeur $\frac{4}{3}(3-m_\mu)$, sera aussi une quantité négligeable. Mais dans le cas où b^2 est négligeable, on a $F(c, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \log \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$, pourvu que φ ne soit pas trop près de 90°; donc on aura, à cette exception près,

$$F(c, \varphi) = \frac{1}{mm_{,}m_{,,}\ldots m_\mu} \log \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi_\mu), \qquad (24)$$

et la valeur de φ_μ devra être tirée de la résolution de l'équation $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi_{,} + \varphi) = \frac{1}{2}(m+1)\operatorname{tang}\varphi$ et des autres équations semblables.

Dans le cas des fonctions complètes, on aura $\varphi_\mu = \frac{1}{2}\pi$ et $F(c_\mu, \varphi_\mu) = \log\frac{4}{b_\mu} = \frac{1}{2}\log\frac{12}{3-m_\mu}$. Donc

$$F'c = \frac{1}{mm_{,}m_{,,}\ldots m_\mu} \cdot \frac{1}{2}\log\frac{12}{3-m_\mu}. \qquad (25)$$

Ces approximations sont encore plus rapides que celles qu'on obtient par l'échelle ordinaire, et elles ont l'avantage de n'employer comme élémens que la suite des valeurs de m.

188. Par la comparaison des deux valeurs de $F'c$, on obtient l'équation suivante,

$$\log\frac{12}{3-m_\mu} = M\pi,$$

où M désigne le produit $1\ldots m_{000}m_{00}m_0mm_{,}m_{,,}\ldots m_\mu$, terminé d'une part au terme m_μ, qui entre dans le premier membre, et de l'autre part à un terme qui ne diffère pas sensiblement de l'unité.

Et comme on peut remplacer m_μ par m, en supposant que m désigne le terme de la série qui ne diffère de 3 que d'une quantité négligeable, on aura plus simplement

$$\log\frac{12}{3-m} = \pi(mm_0m_{00}m_{000}\ldots 1), \qquad (26)$$

équation qui peut servir à calculer le logarithme d'un nombre quelconque au moyen du nombre connu π.

Pour cet effet, prenons m de manière qu'on ait $3-m = 12a^{-i}$, a étant un nombre entier à volonté, et i un exposant assez grand pour que a^{-i} appartienne à l'ordre de décimales qu'on veut négliger. Si d'après la valeur $m = 3 - 12a^{-i}$, on calcule par la formule (21) les termes de la série dé-

croissante m_0, m_{00}, etc., jusqu'à ce qu'on parvienne à un terme qui ne diffère plus sensiblement de l'unité, on aura avec une exactitude suffisante

$$\log a = \frac{\pi}{2}(mm_0m_{00}\ldots\ldots 1). \qquad (27)$$

189. Les formules pour l'approximation des fonctions E se déduiraient de l'équation (12), appliquée successivement aux différens termes de l'échelle; mais la quantité algébrique U, qui change d'une équation à l'autre, compliquera les résultats quand il s'agira des fonctions incomplètes, et à cet égard, les formules calculées sur l'échelle ordinaire méritent la préférence. Le même inconvénient n'a pas lieu pour la fonction complète $E'c$, dont la valeur peut être trouvée par les formules (14) appliquées successivement aux modules c_0, c_{00}, etc.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que l'échelle des modules $0\ldots c_{00}$, c_0, c, $c_{\prime}$, $c_{\prime\prime}\ldots 1$, formée d'après le module primitif c; mais pour conserver l'analogie avec l'échelle déjà connue, il importe de considérer aussi la suite des modules complémentaires $1\ldots b_{00}$, b_0, b, $b_{\prime}$, $b_{\prime\prime}\ldots 0$ formée semblablement d'après le module primitif b. Les propriétés des fonctions F et E, rapportées successivement aux modules compris dans cette seconde suite, seront les mêmes que les propriétés observées dans l'autre suite, mais il y a de plus, entre les deux suites de fonctions, quelques propriétés particulières qui méritent d'être remarquées.

Et d'abord les équations générales, pour l'échelle des modules b, devant être de même forme que celles qui ont lieu pour l'échelle des modules c, on pourra supposer

$$F(b, \psi) = nF(b_{\prime}, \psi_{\prime}),\ \tang\tfrac{1}{2}(\psi + \psi_{\prime}) = \frac{n+1}{2}\tang\psi, \qquad (28)$$

et on aura généralement $n = \frac{3}{m}$, conformément à l'observation déjà faite (art. 181). Cette même relation entre les coefficiens régulateurs, m et n, aura lieu également pour deux autres termes consécutifs. On trouvera en effet, par les formules de l'art 186, $n_{\prime} = \frac{3}{m_{\prime}}$, $n_{\prime\prime} = \frac{3}{m_{\prime\prime}}$, etc., $n_0 = \frac{3}{m_0}$, $n_{00} = \frac{3}{m_{00}}$, etc. De sorte qu'ayant déjà calculé pour l'échelle des modules c la suite des termes m_{00}, m_0, m, $m_{\prime}$, $m_{\prime\prime}$, etc., on en déduit immédiatement les termes n_{00}, n_0, n, $n_{\prime}$, $n_{\prime\prime}\ldots$ qui appartiennent à l'échelle des modules b.

Si on multiplie entre elles les deux équations $F(b, \psi) = nF(b_{\prime}, \psi_{\prime})$, $F(c_{\prime}, \varphi_{\prime}) = mF(c, \varphi)$, on en déduira

$$\frac{F(c_{\prime}, \varphi_{\prime})}{F(b_{\prime}, \psi_{\prime})} = 3\frac{F(c, \varphi)}{F(b, \psi)}, \qquad (29)$$

on aura semblablement

$$\frac{F(c_{\prime\prime}, \varphi_{\prime\prime})}{F(b_{\prime\prime}, \psi_{\prime\prime})} = 3\frac{F(c_{\prime}, \varphi_{\prime})}{F(b_{\prime}, \psi_{\prime})} = 3^2 \cdot \frac{F(c, \varphi)}{F(b, \psi)},$$

ainsi de suite. D'où l'on voit que le facteur 3 et ses puissances remplacent dans la nouvelle échelle le facteur 2 et ses puissances qui ont lieu dans l'autre échelle (art. 85).

L'équation que nous avons donnée entre les fonctions F qui se rapportent aux deux termes b, $b_{\prime}$, servira également à comparer les fonctions qui se rapportent à deux autres termes consécutifs de la même échelle. Les fonctions E se compareront de la même manière au moyen de l'équation générale

$$E(b^{\prime\prime}, \psi) = \frac{3}{n} E(b_{\prime}, \psi_{\prime}) - \frac{(n+1)(3-n)}{2n} F(b_{\prime}, \psi_{\prime}) + V_{\prime}, \qquad (30)$$

où la quantité algébrique $V_{\prime} = \frac{(n+1)(n+3)}{2n} \cdot \frac{\Delta(b_{\prime}, \psi_{\prime}) \sin\psi_{\prime} \cos\psi_{\prime}}{1 + \frac{1}{4}(n-1)(n+3)\sin\psi_{\prime}}$; et dans le cas des fonctions complètes, on aura simplement

$$E^{1}b = \frac{3}{n} E^{1}b_{\prime} - \frac{(n+1)(3-n)}{2n} F^{1}b_{\prime}.$$

Ainsi dans la nouvelle échelle la comparaison des fonctions complètes, tant pour l'échelle des modules c que pour celle de leurs complémens b, peut se faire par le moyen de la seule suite... m_{00}, m_0, m, $m_{\prime}$, $m_{\prime\prime}$.... calculée d'après un premier terme donné m.

190. Nous remarquerons enfin que de l'équation (29) et des équations semblables prolongées indéfiniment, on déduit pour le cas des fonctions complètes

$$\frac{F^{1}(c_{\mu})}{F^{1}(b_{\mu})} = 3^{\mu} \cdot \frac{F^{1}c}{F^{1}b}.$$

Donc si b_{μ} est de l'ordre des quantités négligeables, auquel cas $F^{1}(c_{\mu}) = \log\frac{4}{b_{\mu}} = \frac{1}{2}\log\frac{12}{3-m_{\mu}}$, et $F^{1}(b_{\mu}) = \frac{1}{2}\pi$, on aura

$$\frac{F^{1}c}{F^{1}b} \cdot \pi = \frac{1}{3^{\mu}} \log\frac{12}{3-m_{\mu}}. \qquad (31)$$

Cette équation appliquée au cas de $c = b$, donnera l'expression de π par un logarithme, savoir $\pi = \frac{1}{3^{\mu}} \log\frac{12}{3-m_{\mu}}$, où m_{μ} doit être un terme éloigné à volonté dans la suite m, $m_{\prime}$, $m_{\prime\prime}$, etc., calculée d'après le module primi-

tif m, qui convient à $c = \sin 45^\circ$; on verra dans l'exemple II ci-après, que ce module $m = \sqrt{(3 + 2\sqrt{3})} = 2\cos 15^\circ \sqrt[4]{3}$.

De même, l'équation précédente appliquée au cas de $c = \sin 15^\circ$, où l'on a $m = \sqrt{3}$, $F'b = \sqrt{3}F'c$, donnera pour π cette seconde expression.... $\pi = \frac{\sqrt{3}}{3^\mu} \log \frac{12}{3 - m_\mu}$. Ces formules sont analogues à celles que nous avons trouvées dans le chap. XX.

Nous allons maintenant faire voir dans quelques exemples comment, à l'aide de la nouvelle échelle, on peut parvenir directement et d'une manière très simple, aux résultats contenus dans les trois chapitres précédens.

Exemple I.

191. Soit $m = \sqrt{3}$, on trouve immédiatement par les équations (5) $c = \sin 15^\circ$ et α ou $c_{,} = \sin 75^\circ$, ce qui est déjà connu par la table de l'art. 181. Réciproquement, étant donné le module $c = \sin 15^\circ$, ou $c^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$, on trouvera par les formules (17) et (19), $c_{,} = \sin 75^\circ$ et $m = \sqrt{3}$. C'est une vérification qu'on pourra faire sur ces formules, en observant que la substitution des valeurs $\varepsilon = \mu^2$, $\delta = \frac{1}{\mu^2}$, où l'on a $\mu = \sqrt[3]{2}$, donne lieu à différentes réductions telles que $\sqrt{(1 + \mu^2 + \mu^4)} = 1 + \mu$, $(\mu + 1)\sqrt{(\mu^2 - 1)} = \sqrt{3}$, après lesquelles le radical cubique μ disparaît entièrement du calcul.

Puisque le module $c_{,}$ est égal dans cet exemple au complément du module c, on aura, en mettant b à la place de $c_{,}$, l'équation

$$F(b, \varphi_{,}) = \sqrt{3}F(c, \varphi),$$

dans laquelle les amplitudes φ et $\varphi_{,}$ sont liées entre elles par l'équation

$$\tang \tfrac{1}{2}(\varphi_{,} + \varphi) = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)\tang \varphi = b\sqrt{2}.\tang \varphi.$$

On peut donc, par cette équation, exprimer toute fonction F dont le module est b, par une fonction semblable dont le module est c, et réciproquement.

Il en est de même des fonctions E pour lesquelles on a l'équation

$$E(b, \varphi_{,}) = \sqrt{3}E(c, \varphi) - F(c, \varphi) + \frac{\Delta(c, \varphi)\sin\varphi\cos\varphi}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}.\sin^2\varphi}.$$

On a ainsi une démonstration très succincte des résultats obtenus par d'autres voies dans le chap. XXVIII.

Exemple II.

192. Soit $c = \sin 45° = \sqrt{\frac{1}{2}}$; si on fait pour abréger $r = \sqrt{(2\sqrt{3} - 3)} = 2 \sin 15° \sqrt[4]{3}$, on déduira des formules (17)

$$c_{,} = c^2(1 + r)^2, \quad c_0 = c^2(1 - r)^2,$$
$$b_{,} = c^2(1 - r)^2, \quad b_0 = c^2(1 + r)^2;$$

d'où l'on voit que les modules $c_{,}$ et c_0, qui suivent et précèdent le module primitif c, sont complémens l'un de l'autre; il en est de même des modules $c_{,}$ et c_{00}, et en général des modules également éloignés du terme moyen c.

Dans le même cas on aura, par la formule (19), $m = \sqrt{(3 + 2\sqrt{3})} = 2 \cos 15° \sqrt[4]{3}$; et de cette valeur de m on déduit celle de m_0 par la formule (21), savoir, $m_0 = \frac{3}{m} = \sqrt{(2\sqrt{3} - 3)}$.

Cela posé, les fonctions F rapportées aux modules c_0, c, $c_{,}$ ou b_0, seront liées entre elles par les deux équations

$$F(b_0, \varphi_{,}) = mF(c, \varphi), \quad F(c, \varphi) = m_0 F(c_0, \varphi_0),$$

auxquelles correspondent les équations des amplitudes

$$\tang \tfrac{1}{2}(\varphi_{,} + \varphi) = \tfrac{1}{2}(m + 1) \tang \varphi, \quad \tang \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi_0) = \tfrac{1}{2}(m_0 + 1) \tang \varphi_0.$$

Si dans l'expression des modules c_0 et b_0, on met au lieu de r la valeur $r = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}\right) \sqrt[4]{3}$, on aura

$$c_0 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt[4]{3}}{1 + \sqrt{3}}, \quad b_0 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}}{1 + \sqrt{3}}.$$

Nous retrouvons donc dans ces valeurs les modules désignés par c et b dans le chapitre XXIX, et les propriétés des fonctions relatives à ces modules peuvent être exposées maintenant de la manière la plus simple et la plus directe, au moyen des équations précédentes qui ne sont susceptibles d'aucune réduction ultérieure.

Ayant obtenu deux équations entre les fonctions dont les modules sont c_0, c, b_0, on pourra réduire l'une à l'autre deux de ces fonctions à volonté. Ainsi, par exemple, toute fonction $F(c_0, \varphi_0)$ dont le module est c_0 se réduira à la fonction $F(c, \varphi)$ dont le module est c, au moyen de l'équation $F(c_0, \varphi_0) = \frac{1}{m_0} F(c, \varphi)$, et en déterminant l'amplitude φ par l'équation $\tang \frac{1}{4}(\varphi + \varphi_0) = \frac{1}{2}(m_0 + 1) \tang \varphi_0$.

De même on pourra réduire l'une à l'autre les deux fonctions $F(b_0, \varphi_1)$ et $F(c, \varphi)$, au moyen des équations $F(b_0, \varphi_1) = mF(c, \varphi)$, $\tang \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi) = \frac{1}{2}(m+1) \tang \varphi$.

Enfin, s'il était question de réduire l'une à l'autre les deux fonctions $F(b_0, \varphi_1)$, $F(c_0, \varphi_0)$, dont les modules sont compléments l'un de l'autre, on aurait pour cet effet l'équation très simple

$$F(b_0, \varphi_1) = 3F(c_0, \varphi_0),$$

et la relation entre les amplitudes φ_1, φ_0 se déduirait des deux équations

$$\tang \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi_0) = \tfrac{1}{2}(m_0 + 1) \tang \varphi_0$$
$$\tang \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi) = \tfrac{1}{2}(m + 1) \tang \varphi.$$

La possibilité de ces réductions a été démontrée dans le chapitre XXIX, mais la complication des formules n'avait pas permis de les effectuer, et il ne fallait rien moins qu'une théorie fondée sur les propriétés de la nouvelle échelle pour faire disparaître les difficultés inhérentes à ce genre de transformations.

Au reste la réduction des fonctions E se fera de même au moyen des formules

$$E(b_0, \varphi_1) = \frac{3}{m} E(c, \varphi) - \frac{(m+1)(3-m)}{2m} F(c, \varphi) + U,$$
$$E(c, \varphi) = \frac{3}{m_0} E(c_0, \varphi_0) - \frac{(m_0+1)(3-m_0)}{2m_0} F(c_0, \varphi_0) + U_0,$$

dans laquelle U désigne la quantité algébrique..... $\frac{m-1 \,.\, m+3}{2m} \cdot \frac{\Delta(c,\varphi) \sin\varphi \cos\varphi}{1 + \frac{1}{4}(m-1)(m+3)\sin^2\varphi}$ et U_0 une fonction semblable de m_0, c_0, φ_0.

Exemple III.

193. Revenons à la valeur primitive $c = \sin 15^\circ$ qui donne $c_1 = \sin 75^\circ = b$; si d'après le module c nous cherchons le module précédent c_0 et son complément b_0, b_0 sera en même temps égal au module c_{11} qui suit c_1. On trouvera c_0 et b_0 par les formules (17) en faisant $c = \sin 15^\circ$, ou $c^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$, ce qui donne $\varepsilon = \mu^2$ (μ étant $\sqrt[3]{2}$), $\sqrt{(1+\varepsilon+\varepsilon^2)} = 1 + \mu$..... et $\sqrt{[2\sqrt{(1+\varepsilon+\varepsilon^2)} - \varepsilon - 2]} = \mu\sqrt{(\mu^2 - 1)}$; on aura donc x_{01}... $= -(\mu - 1)\sqrt{(\mu^2 - 1)}$; et parce que $\frac{c}{b} = 2 - \sqrt{3}$, $\frac{b}{c} = 2 + \sqrt{3}$;

on aura

$$c_0 = cb^2 [2 - \sqrt{3} - (\mu - 1)\sqrt{(\mu^2 - 1)}]^2,$$
$$b_0 = bc^2 [2 + \sqrt{3} + (\mu - 1)\sqrt{(\mu^2 - 1)}]^2.$$

Substituant la valeur $\sqrt{3} = (\mu + 1)\sqrt{(\mu^2 - 1)}$, on aura plus simplement

$$c_0 = b [1 - \mu\sqrt{(\mu^2 - 1)}]^2,$$
$$b_0 = c [1 + \mu\sqrt{(\mu^2 - 1)}]^2,$$
$$c_0 b_0 = \tfrac{1}{4}(\mu - 1)^4.$$

Ces valeurs de c_0 et b_0 s'accordent avec les valeurs des modules désignés par k et i dans le chapitre XXX. Ainsi nous pouvons présenter de la manière la plus simple et la plus directe les résultats auxquels nous ne sommes parvenu que par une voie très laborieuse dans ce chapitre, et au moyen des propriétés de la nouvelle échelle nous pourrons rendre effectives les comparaisons ou réductions dont nous avions seulement démontré la possibilité.

Nous connaissons quatre termes consécutifs de la nouvelle échelle, savoir c_0, c, b, b_0; ces quatre termes donneront lieu aux trois équations suivantes entre les fonctions F, et à trois équations correspondantes entre les amplitudes :

$$F(b_0, \varphi_{ii}) = m_i F(b, \varphi_i), \quad \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\varphi_{ii} + \varphi_i) = \tfrac{1}{2}(m_i + 1)\,\text{tang}\,\varphi_i,$$
$$F(b, \varphi_i) = mF(c, \varphi), \quad \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\varphi_i + \varphi) = \tfrac{1}{2}(m + 1)\,\text{tang}\,\varphi,$$
$$F(c, \varphi) = m_0 F(c_0, \varphi_0), \quad \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi_0) = \tfrac{1}{2}(m_0 + 1)\,\text{tang}\,\varphi_0.$$

On observera d'ailleurs que de la valeur $m = \sqrt{3}$ on déduit $m_i = \frac{(1+\mu)^2}{\sqrt{3}}$ et $m_0 = \frac{3}{m_i} = \frac{3\sqrt{3}}{(\mu+1)^2}$. Tout est donc connu dans ces équations qui offrent les moyens de comparer deux à deux les quatre fonctions.

Si on veut comparer les fonctions $F(c_0, \varphi_0)$, $F(b_0, \varphi_{ii})$ à la fonction $F(c, \varphi)$, on aura pour cet effet les équations

$$F(c, \varphi) = m_0 F(c_0, \varphi_0), \quad F(b_0, \varphi_{ii}) = mm_i F(c, \varphi).$$

Si on veut comparer entre elles les fonctions $F(c_0, \varphi_0)$, $F(b_0, \varphi_{ii})$, dont les modules sont complémens l'un de l'autre, on multipliera entre elles les trois équations précédentes, ce qui donnera

$$F(b_0, \varphi_{ii}) = 3\sqrt{3} F(c_0, \varphi_0).$$

Quant à la manière de déduire φ_{ii} de φ_0, ou φ_0 de φ_{ii}, on ne peut trouver rien de plus simple que les trois équations des amplitudes où φ est un in-

termédiaire qu'on ne pourrait éliminer sans compliquer beaucoup les résultats.

On comparera semblablement les fonctions E qui se rapportent à nos quatre modules, au moyen des trois équations

$$E(b_0, \varphi_{11}) = \frac{3}{m_{\prime}} E(b, \varphi_{\prime}) - \frac{(m_{\prime}+1)(3-m_{\prime})}{2m_{\prime}} F(b, \varphi_{\prime}) + U_{\prime},$$

$$E(b, \varphi_{\prime}) = \frac{3}{m} E(c, \varphi) - \frac{(m+1)(3-m)}{2m} F(c, \varphi) + U,$$

$$E(c, \varphi) = \frac{3}{m_0} E(c_0, \varphi_0) - \frac{(m_0+1)(3-m_0)}{2m_0} F(c_0, \varphi_0) + U_0,$$

où l'on connaît les valeurs des quantités algébriques $U_{\prime}$, U, U_0.

A l'égard des fonctions complètes, il est inutile de reproduire ici les valeurs que nous en avons données dans le chap. XXX.

Nous observerons en général que les mêmes formules qui établissent la comparaison des fonctions F et E, dont les modules sont c_0 et b_0, tant entre elles qu'avec les fonctions dont le module est c, s'appliqueraient également aux fonctions dont les modules sont c_{00} et b_{00}, et à une infinité d'autres comprises dans la même échelle.

Exemple IV.

194. Prenons encore pour exemple le module $c = \sqrt{2} - 1$ dont nous avons fait connaître les propriétés (art. 87); on aura pour le calcul des formules (17), $b^2 = 2c$, $\varepsilon = \frac{1}{2c}$, $\sqrt{(\varepsilon - 1)} = \frac{1}{2}b$, $\sqrt{(1+\varepsilon+\varepsilon^2)} = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$; donc

$$x_{\prime} = \tfrac{1}{2}b(1+\sqrt{3}), \quad x_0 = \tfrac{1}{2}b(1-\sqrt{3});$$

et par ces valeurs on obtient

$$c_{\prime} = c^3(2+\sqrt{3})^2 = 16c^3 \sin^4 75^\circ,$$
$$b_{\prime} = b^3[1 - \tfrac{1}{2}c(1+\sqrt{3})]^2 = 16bc^3 \sin^4 37^\circ \tfrac{1}{2},$$
$$c_0 = c^3(2-\sqrt{3})^2 = 16c^3 \sin^4 15^\circ,$$
$$b_0 = b^3[1 - \tfrac{1}{2}c(1-\sqrt{3})]^2 = 16bc^3 \sin^4 7^\circ \tfrac{1}{2};$$

on aura en même temps $\delta = 2c$, $\sqrt{(1-\delta)} = c$, $\sqrt{(1+\delta+\delta^2)} = 2 - c$, $m = \sqrt{6} - c = 1 + \text{séc}\, 15^\circ = \frac{2\cos^2 7^\circ \frac{1}{2}}{\cos 15^\circ}$, $m^2 - 1 = 32 \sin 15^\circ \sin 22^\circ \frac{1}{2} \cos 7^\circ \frac{1}{2}$,

$$m' = \frac{1}{m}[1 + \sqrt[3]{(m^2-1)}]^2.$$

Au moyen de ces valeurs, on aura les équations

$$F(c_{,}, \varphi_{,}) = mF(c, \varphi), \quad \tang \tfrac{1}{2}(\varphi_{,} + \varphi) = \tfrac{1}{2}(m + 1) \tang \varphi,$$
$$F(c_{,,}, \varphi_{,,}) = m_{,}F(c_{,}, \varphi_{,}), \quad \tang \tfrac{1}{2}(\varphi_{,,} + \varphi_{,}) = \tfrac{1}{2}(m_{,} + 1) \tang \varphi_{,}.$$

De même, si on fait $n = \frac{3}{m}$, $n' = \frac{3}{m'}$, on aura pour les modules complémentaires ces équations

$$F(b, \psi) = nF(b_{,}, \psi_{,}), \quad \tang \tfrac{1}{2}(\psi + \psi_{,}) = \tfrac{1}{2}(n + 1) \tang \psi_{,},$$
$$F(b_{,}, \psi_{,}) = n_{,}F(b_{,,}, \psi_{,,}), \quad \tang \tfrac{1}{2}(\psi_{,} + \psi_{,,}) = \tfrac{1}{2}(n_{,} + 1) \tang \psi_{,,},$$

les suites des unes et des autres pouvant être indéfiniment prolongées.

J'observe maintenant que par la propriété particulière du module c on peut réduire entre elles les fonctions $F(b, \psi)$, $F(c, \varphi)$; on a pour cet effet les équations

$$\left.\begin{array}{ll} F(c, \varphi) = \sqrt{2}.F(b, \varphi') & \sin(2\varphi' - \varphi) = c \sin \varphi \\ E(c, \varphi) = \sqrt{2}[E(b, \varphi') + cF(b, \varphi')] - c \sin \varphi & \tang(\varphi - \varphi') = c \tang \varphi' \end{array}\right\}$$

On pourra donc réduire entre elles les fonctions $F(b_{,}, \psi_{,})$, $F(c_{,}, \varphi_{,})$ dont les modules sont complémens l'un de l'autre; on réduirait de même les deux fonctions $F(c_{,,}, \varphi_{,,})$, $F(b_{,,}, \psi_{,,})$, qui sont dans le même cas et une infinité d'autres semblables.

Voici les formules à employer pour la réduction des premières et les équations correspondantes des amplitudes

$$F(c_{,}, \varphi_{,}) = m F(c, \varphi), \quad \tang \tfrac{1}{2}(\varphi_{,} + \varphi) = \tfrac{1}{2}(m + 1) \tang \varphi,$$
$$F(c, \varphi) = \sqrt{2}.F(b, \varphi'), \quad \tang(\varphi - \varphi') = c \tang \varphi',$$
$$F(b, \psi) = n F(b_{,}, \psi_{,}), \quad \tang \tfrac{1}{2}(\psi + \psi_{,}) = \tfrac{1}{2}(n + 1) \tang \psi_{,}.$$

Étant donné, par exemple, la fonction $F(b_{,}, \psi_{,})$, on déterminera ψ par $\psi_{,}$, au moyen de l'équation $\tang \frac{1}{2}(\psi + \psi_{,}) = \frac{1}{2}(n + 1) \tang \psi_{,}$; faisant ensuite $\varphi' = \psi$, on déterminera φ par l'équation $\tang(\varphi - \psi) = c \tang \psi$; enfin φ étant connu on déterminera $\varphi_{,}$ par l'équation $\tang \frac{1}{2}(\varphi_{,} + \varphi) \ldots = \frac{1}{2}(m + 1) \tang \varphi$; ensuite on déduira du produit des trois équations précédentes

$$F(c_{,}, \varphi_{,}) = 3\sqrt{2}\, F(b_{,}, \psi_{,}),$$

ce qui donnera l'expression de $F(b_{,}, \psi_{,})$ par le moyen de $F(c_{,}, \varphi_{,})$. Pour avoir en particulier une équation entre les fonctions complètes, on fera $\psi_{,} = \frac{1}{2}\pi$, ce qui donnera $\psi = \frac{1}{2}\pi = \varphi'$, $\varphi = \pi$, $\varphi_{,} = \pi$; donc on aura

$$F'c_{,} = \frac{3}{\sqrt{2}} F'b_{,} = mF'c,$$

et on connaît la valeur de $c_{,}$ qui donne lieu à cette équation.

195. Pour la comparaison des fonctions E on aura semblablement les trois équations

$$E(c_{,}, \varphi_{,}) = \frac{3}{m} E(c, \varphi) - \frac{(m+1)(3-m)}{2m} F(c, \varphi) + U,$$
$$E(c, \varphi) = \sqrt{2}.E(b, \varphi') + c\sqrt{2}.F(b, \varphi') - c \sin \varphi,$$
$$E(b, \psi) = \frac{3}{n} E(b_{,}, \psi_{,}) - \frac{(n+1)(3-n)}{2n} F(b_{,}, \psi_{,}) + V_{,},$$

au moyen desquelles on peut exprimer les fonctions $E(b_{,}, \psi_{,})$, $E(c_{,}, \varphi_{,})$ par le moyen des fonctions semblables $E(c, \varphi)$, $F(c, \varphi)$, ou par le moyen des fonctions $E(b, \psi)$, $F(b, \psi)$. On peut aussi exprimer la fonction $E(b_{,}, \psi_{,})$ par les fonctions E et F dont le module est $c_{,}$ et réciproquement, ce qui est un nouvel exemple de la réduction entre des fonctions dont les modules sont complémens l'un de l'autre.

Dans le cas des fonctions complètes les formules se simplifient et donnent :

$$E^1 c_{,} = \frac{3}{m} E^1 c - \frac{(m+1)(3-m)}{2m} F^1 c, \quad F^1 c_{,} = m F^1 c,$$
$$E^1 b_{,} = \frac{n}{3} E^1 b + \frac{(n+1)(3-n)}{6} F^1 b_{,}, \quad F^1 b_{,} = \frac{1}{n} F^1 b.$$

Substituant les valeurs $n = \frac{3}{m}$, $F^1 b_{,} = \frac{m}{3} F^1 b$, la seconde équation devient

$$E^1 b_{,} = \frac{1}{m} E^1 b + \frac{(3+m)(m-1)}{6m} F^1 b;$$

et parce que les valeurs de $E^1 c$, $E^1 b$, $F^1 c$, $F^1 b$, peuvent être exprimées par une seule de ces transcendantes, par exemple par $F^1 c$, on exprimera de même les fonctions $E^1 c$, $F^1 c_{,}$, $E^1 b_{,}$, $F^1 b_{,}$.

Pour faciliter la vérification numérique des deux équations précédentes, on peut exprimer les coefficiens en lignes trigonométriques, de cette manière :

$$E^1 c_{,} = \frac{3 \cos 15^\circ}{2 \cos^2 7^\circ \frac{1}{2}} E^1 c - \frac{\sin 45^\circ}{\cos^2 7^\circ \frac{1}{2}} F^1 c,$$
$$E^1 b_{,} = \frac{\cos 15^\circ}{2 \cos^2 7^\circ \frac{1}{2}} E^1 b + \frac{1}{3} \cdot \frac{\cos^2 3^\circ \frac{1}{2}}{\cos^2 7^\circ \frac{1}{2}} F^1 b.$$

196. Nous avons développé dans ce qui précède les propriétés principales qui distinguent la nouvelle échelle de l'ancienne, cependant nous devons faire encore remarquer que si les deux échelles sont formées d'après un même module primitif c, il ne pourra y avoir aucun autre terme commun entre

les deux suites $c, c', c''\ldots, c, c_{,}, c_{,,}$ etc., prolongées dans un sens ou dans l'autre.

Car supposons qu'on eût, par exemple $c_{,,} = c'''$, on aurait également le complément $b_{,,} = b'''$. Mais par les propriétés des fonctions complètes on a d'une part $\frac{F^1 c'''}{F^1 b'''} = 2^3 \frac{F^1 c}{F^1 b}$, et d'autre part $\frac{F^1 c_{,,}}{F^1 b_{,,}} = 3^2 \frac{F^1 c}{F^1 b}$; équations qui ne peuvent s'accorder entre elles, puisqu'on n'a pas $2^3 = 3^2$, ni en général $2^\mu = 3^\nu$.

Si l'égalité entre deux termes des deux suites ne peut avoir lieu, il n'en est pas de même de l'égalité entre le complément d'un module pris dans une suite et un terme pris dans l'une ou dans l'autre suite. Ainsi on pourra avoir sans sortir de l'échelle nouvelle $b = c_{,}$, ce qui a lieu lorsque $c = \sin 15°$, puisque alors $c_{,} = \sin 75° = b$; on pourra avoir semblablement $b = c_{,,}$, mais alors on aurait $b_{,} = c_{,} = \sin 45°$; on pourrait aussi avoir $b = c_{,,,}$, mais il s'ensuivrait $b_{,} = c_{,,}$, et par conséquent $c_{,} = \sin 15°$. Tous ces cas se réduisent aux deux seuls dans lesquels le module primitif est sin 15° ou sin 45°.

Mais on peut trouver une infinité d'autres cas en passant d'une échelle à l'autre, et il en résultera une infinité de solutions nouvelles du problème où l'on se propose de trouver des fonctions dont les modules sont compléments l'un de l'autre, et qui soient réductibles entre elles, comme le sont les fonctions qui ont pour modules sin 15° et sin 75°.

197. Pour en donner un exemple, cherchons la valeur du module c tel qu'on ait $b = a'$, où pour plus de clarté nous faisons $a = c_{,}$. L'équation supposée donne $b = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, et on en tire $b^2(1-c^2) = 4ac$, ou $b^2c^2 = 4ac$; substituant les valeurs données en fonctions de m par les équations (5), on aura à résoudre l'équation

$$(3 + 2m - m^2)^2 = 8m(m^2 + 2m - 3).$$

Soit $3 - m^2 = 2mx$, on aura $(1+x)^2 = 4(1-x)$ ou $x^2 + 6x = 3$; donc $x = -3 + 2\sqrt{3}$, et $m = -x + \sqrt{(x^2+3)} = (1+\sqrt{2})(3-\sqrt{6})$. Connaissant le régulateur m, on en déduira $a = c_{,} = \frac{m+3}{m} \sin 15°$ et $c = (m-1) \sin 15°$; ces valeurs peuvent être exprimées entièrement en lignes trigonométriques, et par ce moyen on aura immédiatement leurs logarithmes comme il suit :

$m = 16 \sin 60° \sin 15° \sin^2 37° \frac{1}{2}$.....0.12354 11005 82295

$$m-1=16\sin 15^\circ \sin 7^\circ\tfrac{1}{2}\sin 37^\circ\tfrac{1}{2},$$

$$\frac{m+3}{m}=16\sin 15^\circ\cos 7^\circ\tfrac{1}{2}\cos 37^\circ\tfrac{1}{2},$$

$$c=16\sin^2 15^\circ\sin 7^\circ\tfrac{1}{2}\sin 37^\circ\tfrac{1}{2}, \qquad 8.93025\ 72403\ 51305$$

$$c_{,}=16\sin^2 15^\circ\cos 7^\circ\tfrac{1}{2}\cos 37^\circ\tfrac{1}{2}, \qquad 9.92584\ 76645\ 81985$$

Le module c étant ainsi déterminé on aura les équations

$$\mathrm{F}(c_{,},\varphi_{,})=m\mathrm{F}(c,\varphi), \qquad \tang\tfrac{1}{2}(\varphi_{,}+\varphi)=\tfrac{1}{2}(m+1)\tang\varphi,$$

$$\mathrm{F}(b,\omega_{,})=\tfrac{1}{2}(1+c_{,})\,\mathrm{F}(c_{,},\omega), \qquad \tang(\omega-\omega')=c\tang\omega'.$$

De là résulte en faisant $\omega=\varphi_{,}$, l'équation

$$\mathrm{F}(b,\omega')=\tfrac{1}{2}m(1+c_{,})\,\mathrm{F}(c,\varphi),$$

dans laquelle la relation entre les amplitudes ω' et φ doit être tirée des deux équations suivantes, où il y a un intermédiaire ω qui pourrait être éliminé :

$$\tang\tfrac{1}{2}(\omega+\varphi)=\tfrac{1}{2}(m+1)\tang\varphi, \quad \tang(\omega-\omega')=c\tang\omega';$$

si on fait $\omega'=\frac{1}{2}\pi$, on aura $\omega=\pi$, $\varphi=\pi$, et par conséquent

$$\mathrm{F}'b=m(1+c_{,})\,\mathrm{F}'c.$$

On aurait des équations semblables pour déterminer $\mathrm{E}(b,\omega')$ par le moyen de $\mathrm{E}(c,\varphi)$ et réciproquement.

On connaîtra donc les fonctions complètes $\mathrm{E}'b$, $\mathrm{F}'b$, par le moyen des fonctions $\mathrm{E}'c$, $\mathrm{F}'c$; ensuite par l'équation des fonctions complémentaires, on pourra déterminer $\mathrm{E}'c$ par $\mathrm{F}'c$, de sorte que les trois fonctions $\mathrm{E}'c$, $\mathrm{E}'b$, $\mathrm{F}'b$ seront exprimées par le moyen de la seule transcendante $\mathrm{F}'c$. Ces résultats pourront ensuite être étendus à toutes les fonctions dont les modules appartiennent à l'une ou à l'autre des échelles formées d'après le module c.

198. Supposons pour second exemple $b=\alpha''$, α étant mis pour $c_{,}$, on aura $c=\beta''$; et par les formules de l'article 78 qui donnent

$$b\beta'=2\sqrt{(\alpha' c)},\ \alpha'\beta=2\sqrt{(\alpha\beta')},$$

on trouvera

$$\alpha'=4\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha^2 c}{\beta^2 b^2}\right)},\ \beta'=4\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha c^2}{\beta^2 b^2}\right)};$$

ensuite la condition $\alpha'^2+\beta'^2=1$, donnera une équation entre α^2, β^2, c^2, b^2, dans laquelle substituant les valeurs de ces quantités en fonctions de m tirées des équations (5), on aura l'équation nécessaire pour déterminer m.

La solution serait pénible par cette voie; il est plus simple de partir d'une

valeur supposée de c, d'en déduire c' ou α; ensuite de α on déduit successivement $\alpha' = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$, $\alpha'' = \frac{2\sqrt{\alpha'}}{1+\alpha'}$, et il reste à voir si cette valeur α'' est égale à b complément de c. Après un petit nombre de tentatives, on trouve que la valeur de α'', qui doit être égale à b', approche si fort de cos 15°, qu'il y a lieu de croire que l'égalité parfaite a lieu. Supposant donc cette égalité, on aurait $\alpha' = \sin 75°$, $\alpha = \tang^2 37° \frac{1}{2}$, $b' = \cos 15°$, $c' = \sin 15°$, $c = \tang^2 7° \frac{1}{2}$. Or ces deux valeurs de c et α, satisfont à l'équation.. $\sqrt{(\alpha c)} + \sqrt{(cb)} = 1$. Ainsi les modules trouvés $c = \tang^2 7° \frac{1}{2}$,..... $\alpha = \tang^2 37° \frac{1}{2}$, sont ceux avec lesquels on a exactement $b = \alpha''$, ou $c = c''$.

Il reste à trouver la valeur correspondante du régulateur m; or comme on a en général $\frac{c}{\alpha} = \frac{m^2 - m}{m+3}$, et qu'en faisant $15° = \theta$, on aurait.....

$c = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$, $\alpha = \frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$, $\sin\theta \cos\theta = \frac{1}{4}$; on trouvera aisément

$$m = (3 + 2\sqrt{3})\,(3 - 2\sqrt{2}) = 8 \sin 60° \cos^2 15° \tang^2 22° \tfrac{1}{2},$$
$$\log m = 0{,}04495\ 68042\ 17563,$$
$$m = 9 - 6\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 4\sqrt{6} = 1{,}10906\ 45000\ 41356.$$

Il est inutile au reste de poursuivre plus loin ce calcul qui aurait pour résultat d'exprimer la fonction F (b, φ) par la fonction F (c, ψ). La possibilité de la réduction n'est pas douteuse puisque le module c fait partie de l'échelle dont le module $c' = \sin 15°$; car alors le module b fait également partie de l'échelle dont le module est $b' = \cos 15°$; or en général les fonctions F et E dont le module est c^μ peuvent s'exprimer par de semblables fonctions dont le module est sin 15°; pareillement les fonctions F et E dont le module est b^μ peuvent s'exprimer par les fonctions semblables dont le module est sin 75°; cela résulte uniquement des propriétés de l'ancienne échelle; donc, puisque par le chapitre XXVIII, les fonctions dont le module est sin 15° peuvent s'exprimer par celles dont le module est sin 75°, il s'ensuit que les fonctions dont le module est c^μ peuvent s'exprimer par les fonctions dont le module est b^μ et réciproquement. On aura en particulier $F'b = 2\sqrt{3}\, F'c$, ce qui est une suite de l'équation générale $\frac{F'b}{F'c} = 2\frac{F'b'}{F'c'}$, puisque dans le cas de $c' = \sin 15°$, on a $F'b' = \sqrt{3}\, F'c'$.

199. Appliquons maintenant les formules de la nouvelle échelle aux fonctions de la troisième espèce. Soit pour cet effet $\Pi = \int \frac{d\omega}{(1 + r \sin^2\omega)\Delta(\alpha, \mu)}$, la

transformée en φ sera

$$\Pi = \int \frac{m d\varphi}{\Delta(c,\varphi)} \cdot \frac{(1 + k \sin^2 \varphi)^2}{D},$$

en faisant $D = (1 + k \sin^2 \varphi)^2 + \nu \sin^2 \varphi \, (m + h \sin^2 \varphi)^2$.

Le polynome D aura toujours un facteur réel $1 + n \sin^2 \varphi$, de sorte que nous pourrons supposer

$$D = (1 + n \sin^2 \varphi)\,(1 + p \sin^2 \varphi + q^2 \sin^4 \varphi),$$

et il faudra satisfaire aux équations

$$n + p = 2k + \nu m^2, \; q^2 = \frac{\nu h^2}{n},$$

$$np + \frac{\nu h^2}{n} = k^2 + 2\nu m h.$$

Considérons pour plus de simplicité m et n comme les deux élémens donnés, nous en déduirons les valeurs des autres élémens comme il suit :

$$\nu = \frac{n\,(n-k)^2}{(mn-h)^2}, \; p = 2k - n + \nu m^2, \; q = h\left(\frac{n-k}{mn-h}\right);$$

ensuite la fraction sous le signe étant ainsi décomposée,

$$\frac{m\,(1 + k \sin^2 \varphi)^2}{D} = \frac{A}{1 + n \sin^2 \varphi} + \frac{B + C \sin^2 \varphi}{1 + p \sin^2 \varphi + q^2 \sin^4 \varphi},$$

nous aurons en intégrant la formule

$$\Pi\,(\nu, \alpha, \omega) = A\,\Pi\,(n, c, \varphi) + P,$$

P désignant l'intégrale $\int \frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)} \cdot \frac{B + C \sin^2 \varphi}{1 + p \sin^2 \varphi + q^2 \sin^4 \varphi}$. Il faut voir maintenant quelle est, suivant les différens cas, la valeur de l'intégrale P.

200. Puisque dans les fonctions de la troisième espèce un paramètre positif $\cot^2 \theta$ peut être remplacé par un paramètre négatif de la forme $-1 + b^2 \sin^2 \theta$, nous pourrons nous borner à considérer les valeurs négatives de n, savoir, les valeurs plus petites que c^2 représentées par $-c^2 \sin^2 \theta$, et les valeurs plus grandes représentées par $-1 + b^2 \sin^2 \theta$.

Considérons d'abord le premier cas, et soit $n = -c^2 \sin^2 \theta$, on aura en même temps $\nu = -\alpha^2 \sin^2 \lambda$, de sorte que les deux paramètres n et ν seront de la même espèce à laquelle nous avons donné le nom de *logarithmique*. En effet, par la substitution des deux valeurs de n et de ν, on trouve

$$\sin \lambda = \frac{\sin \theta \,(m + h \sin^2 \theta)}{1 + k \sin^2 \theta},$$

de sorte que l'équation entre les angles λ et θ, est semblable à l'équation entre les amplitudes ω et φ, et peut être mise sous la forme plus simple $\tang \frac{1}{2}(\lambda + \theta) = \frac{1}{2}(m + 1) \tang \theta$.

En vertu de cette propriété l'angle λ augmente avec l'angle θ par degrés insensibles, et ils parviennent simultanément à la même valeur $\frac{1}{2}\pi$. Donc toute valeur du paramètre $n = -c^2 \sin^2 \theta$ répondra à une valeur semblable du paramètre $\nu = -\alpha^2 \sin^2 \lambda$ et réciproquement.

Pour déterminer dans ce cas la valeur de l'intégrale P, il faut connaître les facteurs du dénominateur $1 + p \sin^2 \varphi + q^2 \sin^4 \varphi$; or en désignant ces facteurs par $1 + n' \sin^2 \varphi$ et $1 + n'' \sin^2 \varphi$, on aura par les formules précédentes et en substituant au besoin les valeurs connues de h, k, c^2, α^2 en fonctions de m, ces deux équations

$$n' + n'' = p = 2k - n + \frac{nm^2(n-k)^2}{(mn-h)^2},$$

$$n' - n'' = \sqrt{(p^2 - 4q^2)} = \frac{(m^2-1)^2}{4(mn-h)^2} \sqrt{[mn(1+n)(c^2+n)]}.$$

La conséquence générale qui résulte de ces équations est que les paramètres n' et n'' seront imaginaires toutes les fois que le paramètre n sera de la forme $-c^2 \sin^2 \theta$; alors le paramètre ν sera de la même forme $-\alpha^2 \sin^2 \lambda$, comme nous l'avons déjà prouvé. Il n'y a d'exception que lorsque $n = -c^2$, et $\nu = -\alpha^2$, alors les deux paramètres n', n'' sont égaux et réels, mais les formules calculées pour ce cas particulier ne conduisent qu'aux résultats déjà connus par les formules (7) et (9).

Dans le cas général l'équation $\Pi(\nu, \alpha, \omega) = A\Pi(n, c, \varphi) + P$, ne donne l'équivalent de la fonction $\Pi(\nu, \alpha, \omega)$ que par une expression beaucoup plus composée dans laquelle il faudrait substituer la valeur de P donnée par la formule de l'article 121. Alors la fonction $\Pi(\nu, \alpha, \omega)$ serait exprimée par deux fonctions semblables $\Pi(-c^2 \sin^2 \theta, c, \varphi)$, $\Pi(-c^2 \sin^2 \mu, c, \varphi)$, ou pour l'une des deux seulement, si elles étaient réductibles entre elles.

201. On peut aussi par un procédé inverse déterminer l'intégrale P composée de deux fonctions dont les paramètres sont imaginaires, par l'expression $P = \Pi(\nu, \alpha, \omega) - A\Pi(n, c, \varphi)$, composée de deux fonctions dont les paramètres sont réels, ce qui fournira une nouvelle solution du problème résolu par la formule du n° 121.

Pour parvenir à cette nouvelle solution il faudrait déterminer les deux élémens m et n par le moyen du dénominateur donné $1 + p \sin^2 \varphi + q^2 \sin^4 \varphi$ que nous représenterons par $1 + 2r \cos \gamma \sin^2 \varphi + r^2 \sin^4 \varphi$. On aura

donc à résoudre les équations

$$r = \frac{h(k-n)}{h-mn},$$

$$2r\cos\gamma = 2k - n + \frac{nm^2r^2}{h^2}.$$

Soit pour cet effet $m = 1 + 2x$, on aura $h = x^2$, $k = 2x + x^2$, ... $n = \frac{x^2(2x+x^2-r)}{x^2-(1+2x)r}$, et l'équation en x sera

$$0 = x^4 + 2(1-r)x^3 - 2r(2+\cos\gamma)x^2 - 2rx(1-r) + r^2.$$

Soit $x^2 - r = xy$, on aura $y^2 + 2(1-r)y - 2r(1+\cos\gamma) = 0$; donc

$$y = r - 1 \pm \sqrt{(r^2 + 2r\cos\gamma + 1)},$$
$$x = \tfrac{1}{2}r + \sqrt{(\tfrac{1}{4}r^2 + r)}.$$

Connaissant la valeur de x qui doit être positive et plus petite que l'unité, on connaîtra $m = 2x + 1$, et ensuite $n = -\frac{x^2(2+y)}{2r-y}$.

A l'égard des coefficiens B et C qui entrent dans l'intégrale P, on les connaîtra ainsi que A par les équations $A = \frac{m(k-n)^2}{n^2 - 2rn\cos\gamma + r^2}$; $B = m - A$, $C + nB = 2mk - 2Ar\cos\gamma$.

202. Examinons maintenant le cas où l'on a $n = -1 + b^2\sin^2\theta$, alors on peut prouver que ν doit être aussi de cette forme, et qu'on aura $\nu = -1 + \mathfrak{b}^2\sin^2\lambda$. En effet substituant ces deux valeurs dans l'équation $\nu = \frac{n(n-k)^2}{(mn-h)^2}$, et réduisant les quantités h, k, b^2, $\mathfrak{b}^2$, en fonctions de m, on trouvera les deux formules

$$\sin\lambda = \frac{\sin\theta\,[m - \frac{1}{4}(m+1)^2\sin^2\theta]}{1 - \frac{1}{4}(3-m)(m+1)\sin^2\theta},$$

$$\cos\lambda = \frac{\cos\theta\,[1 - \frac{1}{4}(m+1)^2\sin^2\theta]}{1 - \frac{1}{4}(3-m)(m+1)\sin^2\theta},$$

ou plus simplement encore la formule $\tang\frac{1}{2}(\lambda - \theta) = \frac{1}{2}(m-1)\tang\theta$, au moyen de laquelle il sera facile de déterminer l'angle λ par le moyen de θ, et réciproquement.

Soient γ et δ les plus petits des angles qui satisfont aux équations.... $\sin\gamma = \frac{2}{m+1}$, $\sin\delta = \frac{2\sqrt{m}}{m+1}$, ou $\cos\delta = 1 - \sin\gamma$, on déduira des formules précédentes :

1°. Que depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \gamma$, l'angle λ augmente depuis $\lambda = 0$ jusqu'à $\lambda = \frac{1}{2}\pi$;

2°. Que depuis $\theta = \gamma$ jusqu'à $\theta = \delta$, l'angle λ augmente depuis $\lambda = \frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $\lambda = \pi$;

3°. Enfin, que depuis $\theta = \delta$ jusqu'à $\theta = \frac{1}{2}\pi$, l'angle λ augmente encore depuis $\lambda = \pi$ jusqu'à $\lambda = \frac{3}{2}\pi$.

Il y a donc trois valeurs du paramètre $n = -1 + b^2 \sin^2 \theta$ qui donnent la même valeur du paramètre $\nu = -1 + c^2 \sin^2 \lambda$, et on voit que les valeurs de θ seront toujours comprises, la première entre zéro et γ, la seconde entre γ et δ, la troisième entre δ et $\frac{1}{2}\pi$.

Dans tous ces cas la valeur de λ se déduit facilement de celle de θ, non-seulement par l'équation $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\lambda - \theta) = \frac{1}{2}(m - 1) \operatorname{tang} \theta$, mais encore par l'une ou l'autre des équations

$$\operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\lambda) = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\gamma - \theta)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\gamma + \theta)} \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta)$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\lambda = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \cot \frac{\delta + \theta}{2} \cot \frac{\delta - \theta}{2};$$

ce qu'on peut vérifier en mettant successivement au lieu de m les valeurs $m = \frac{2}{\sin \gamma} - 1$, $m = \frac{1 + \cos \delta}{1 - \cos \delta}$.

Il est visible maintenant que si on désigne par θ, θ', θ'', les trois valeurs de θ qui répondent à une même valeur de λ, et qu'avec ces valeurs on forme les trois paramètres $n = -1 + b^2 \sin^2 \theta$, $n' = -1 + b^2 \sin^2 \theta'$, ..., $n'' = -1 + b^2 \sin^2 \theta''$, le dénominateur D de la formule à intégrer (art. 199) sera le produit des trois facteurs $(1 + n \sin^2 \varphi)(1 + n' \sin^2 \varphi)(1 + n'' \sin^2 \varphi)$; car en prenant pour n l'une des trois valeurs n, n', n'', il en résultera toujours la même valeur de λ, et par conséquent la même valeur du paramètre ν.

Cela posé la fonction $\Pi(\nu, \alpha, \omega)$ rapportée au module α, pourra s'exprimer par trois fonctions semblables rapportées au module e, au moyen de la formule générale

$$\Pi(\nu, \alpha, \omega) = A\Pi(n, c, \varphi) + A'\Pi(n', c, \varphi) + A''\Pi(n'', c, \varphi),$$

dans laquelle les coefficiens sont ainsi déterminés :

$$A = \frac{m(k-n)^2}{(n-n')(n-n'')}, \quad A' = \frac{m(k-n')^2}{(n'-n)(n'-n'')}, \quad A'' = \frac{m(k-n'')^2}{(n''-n)(n''-n')}.$$

203. La formule précédente ne peut guère avoir d'autre usage que celui de transformer une fonction donnée $\Pi(\nu, \alpha, \omega)$, dont le paramètre ν est de la forme $-1 + c^2 \sin^2 \lambda$, en trois autres dont le paramètre est de forme

semblable, et qui est pour module commun c le terme de la nouvelle échelle immédiatement inférieur au module donné a.

Pour cet effet, il faudra préalablement déduire du module a les valeurs de c et de m, ce qui se fera par les formules (17) et (19), et ensuite déduire de l'angle donné λ, les trois angles θ, θ', θ'', par la résolution de l'équation $\tang\frac{1}{2}(\lambda-\theta)=\frac{1}{2}(m-1)\tang\theta$, en observant que ces angles doivent être renfermés entre des limites déterminées par les angles γ et δ.

La transformation dont il s'agit pourra être employée comme moyen d'approximation, si le module c déduit de a est assez petit pour qu'on puisse négliger les termes de l'ordre c^2, ou au moins ceux de l'ordre c^4. Car si on peut négliger les termes de l'ordre c^2, on aura simplement $\Pi(n, c, \varphi)=\int\frac{d\varphi}{1+n\sin^2\varphi}=\frac{\psi}{b\sin\theta}$, en faisant $\tang\psi=b\sin\theta\tang\varphi$; et si on ne peut négliger que les termes de l'ordre c^4, on aura..... $\Pi=\int\frac{d\varphi(1+\frac{1}{2}c^2\sin^2\varphi)}{1+n\sin^2\varphi}=\frac{\psi}{b\sin\theta}+\frac{c^2}{2n}\left(\varphi-\frac{\psi}{b\sin\theta}\right)$. Mais on voit que ces moyens d'approximation sont bornés, et que si on procédait à une seconde transformation, la fonction proposée serait transformée en neuf autres, ce qui entraînerait une trop grande complication.

204. Si on examine les différentes formules par lesquelles l'angle λ peut être déduit de θ, on ne manquera pas de remarquer qu'il existe une grande analogie entre ces formules et celles qui, dans la nouvelle échelle, donnent la relation entre les amplitudes ω et φ, analogie qui semblerait indiquer une troisième échelle différente des deux autres.

En effet, si on considère λ comme fonction de la variable θ on aura par la différentiation :

$$d\lambda=\frac{d\theta\left(m-\frac{1}{4}(m-1)(3+m)\sin^2\theta\right)}{1-\frac{1}{4}(m-1)(3+m)\sin^2\theta};$$

formule qui étant intégrée donnerait immédiatement l'équation déjà trouvée $\tang\frac{1}{2}(\lambda-\theta)=\frac{1}{2}(m-1)\tang\theta$.

Ensuite l'équation $\nu=\frac{n(n-k)^2}{(mn-h)^2}$, dans laquelle on substituera les valeurs $n=-1+b^2\sin^2\theta$, $\nu=-1+\mathfrak{b}^2\sin^2\lambda$, donne

$$\Delta(\mathfrak{b}, \lambda)=\Delta(b, \theta)\,.\,\frac{1-\frac{1}{4m}(m-1)(3+m)\sin^2\theta}{1-\frac{1}{4}(m-1)(3+m)\sin^2\theta}.$$

Donc $\frac{d\lambda}{\Delta(\mathfrak{b}, \lambda)}=\frac{m\,d\theta}{\Delta(b, \theta)}$, et en intégrant

$$F(\mathfrak{b}, \lambda)=m\,F(b, \theta).$$

Comparons maintenant cette équation avec celle qui résulte de la seconde échelle, nous aurons, en y joignant les équations des amplitudes,

$$F(\mathfrak{c}, \lambda) = mF(b, \theta), \quad \tang \tfrac{1}{2}(\lambda - \theta) = \tfrac{1}{2}(m-1)\tang\theta,$$
$$F(b, \omega) = \frac{3}{m}F(\mathfrak{c}, \varphi), \quad \tang \tfrac{1}{2}(\omega + \varphi) = \frac{3+m}{2m}\tang\varphi.$$

Soit $\theta = \omega$, on aura l'équation $F(\mathfrak{c}, \lambda) = 3F(\mathfrak{c}, \varphi)$, dans laquelle les amplitudes φ et λ ont entre elles la relation que donneraient par l'élimination de ω les deux équations

$$\tang \tfrac{1}{2}(\lambda - \omega) = \tfrac{1}{2}(m-1)\tang\omega, \quad \tang \tfrac{1}{2}(\omega + \varphi) = \frac{3+m}{2m}\tang\varphi.$$

De là on voit que l'équation $F(\mathfrak{c}, \lambda) = mF(b, \theta)$, n'est qu'une combinaison de l'équation $F(b, \omega) = \frac{3}{m}F(\mathfrak{c}, \varphi)$ donnée par la nouvelle échelle, avec l'équation de la triplication des fonctions F dont le module est $\mathfrak{c}$. Il n'y a donc dans ce résultat rien qui établisse une troisième échelle de modules; mais on peut en déduire une conséquence très remarquable pour la trisection de la fonction F.

205. Nous avons vu (art. 23) que cette trisection, considérée en général, dépend d'une équation du neuvième degré; les formules précédentes donnent donc la facilité de réduire cette équation du neuvième degré à deux du troisième.

En effet, pour satisfaire à l'équation $F(\mathfrak{c}, \lambda) = 3F(\mathfrak{c}, \varphi)$, où l'on connaît le module $\mathfrak{c}$ et l'amplitude λ, il faut d'abord déterminer le régulateur m par le module donné $\mathfrak{c}$ ou par son complément α, ce qui se fera par la formule de l'art. 186, ensuite on déterminera ω par l'équation..... $\tang \tfrac{1}{2}(\lambda - \omega) = \tfrac{1}{2}(m-1)\tang\omega$, c'est-à-dire, en faisant $\tang \tfrac{1}{2}\omega = x$, par l'équation

$$mx - x^3 = (1 - mx^2)\tang \tfrac{1}{2}\lambda.$$

Connaissant ω on déterminera φ par l'équation $\tang \tfrac{1}{2}(\omega + \varphi) = \frac{3+m}{2m}\tang\varphi$, qui se réduit pareillement au troisième degré.

Ainsi, la résolution de l'équation du neuvième degré est réduite à celle de deux équations du troisième, ce qu'il aurait été peut-être difficile de découvrir par une autre voie.

La trisection de la fonction complète se résoudrait assez aisément par ces mêmes formules en faisant $\lambda = \pi$, ce qui donne $\cot \tfrac{1}{2}\omega = \sqrt{m}$, mais elle se résout encore plus aisément par les formules directes du n° 24.

CHAPITRE XXXII.

De quelques formules générales qui peuvent se ramener aux fonctions elliptiques.

206. La nature des fonctions elliptiques étant connue et approfondie, il importe de ramener à ces transcendantes le plus grand nombre de formules intégrales qu'il sera possible. Comme la multitude en est infinie et aussi variée que les substitutions qu'on peut mettre en usage, nous nous contenterons d'indiquer quelques-uns des cas principaux où cette réduction a lieu.

I. On peut réduire aux fonctions elliptiques l'intégrale $\int \frac{P dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta x^6)}}$, dans laquelle P est une fonction rationnelle de x.

Car si on fait $x^2 = z$, on pourra supposer $P = M + N\sqrt{z}$, M et N étant des fonctions rationnelles de z, et l'intégrale proposée deviendra

$$\int \frac{\frac{1}{2} M dz}{\sqrt{(\alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4)}} + \int \frac{\frac{1}{2} N dz}{\sqrt{(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3)}},$$

dont les deux parties sont comprises dans les fonctions elliptiques.

II. Toute formule $\int \frac{P dx}{\sqrt[4]{(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4)}}$, dans laquelle P est une fonction rationnelle de x, peut se ramener aux fonctions elliptiques.

Car on peut toujours faire $P = M + Nx$, M et N étant des fonctions rationnelles paires de x. Considérons la partie

$$\frac{N x dx}{\sqrt[4]{(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4)}}.$$

Si on fait $\sqrt[4]{(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4)} = z$, ce qui donne

$$x^2 = -\frac{\beta + \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\gamma z^4)}}{2\gamma},$$

il est clair que par la substitution de la valeur de x^2, $Nxdx$ ne contiendra d'autre radical que $\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\gamma z^4)}$; donc toute la difficulté se réduit

à intégrer une quantité de la forme

$$\frac{Qz^2dz}{\sqrt{(\beta^2-4\alpha\gamma+4\gamma z^4)}},$$

dans laquelle Q est une fonction rationnelle de z^4.

Quant à la partie $\frac{Mdx}{\sqrt[4]{(\alpha+\beta x^2+\gamma x^4)}}$, si on fait $\sqrt[4]{(\alpha+\beta x^2+\gamma x^4)}=xy$, on aura

$$x^2=\frac{-\beta+\sqrt{(\beta^2-4\alpha\gamma+4\alpha y^4)}}{2(\gamma-y^4)},$$

$$\frac{dx}{xy}=\frac{2x^2y^2dy}{\sqrt{(\beta^2-4\alpha\gamma+4\alpha y^4)}}.$$

D'où l'on voit que la transformée en y contiendra une partie rationnelle et une de la forme

$$\frac{Ry^2dy}{\sqrt{(\beta^2-4\alpha\gamma+4\alpha y^4)}},$$

R étant une fonction rationnelle de y^4; donc la formule proposée est toujours réductible aux fonctions elliptiques.

III. On résoudrait absolument de la même manière la formule.... $\int Pdx\sqrt[4]{(\alpha+\beta x^2+\gamma x^4)}$, P étant une fonction rationnelle de x.

Ces deux cas comprennent la formule $\int Pdx(\alpha+\beta x^2+\gamma x^4)^{\pm\frac{3}{4}}$, et aussi la formule $\int Qdy(\alpha+\beta y+\gamma y^2)^{\pm\frac{1}{4}}$, Q étant une fonction rationnelle de y; car en faisant $y=x^2$, cette dernière devient un cas particulier des deux autres.

IV. On peut réduire aux fonctions elliptiques la formule..... $\int Pdx(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)^{\pm\frac{1}{3}}$, P étant une fonction rationnelle de x.

Cette réduction peut se faire de plusieurs manières; et d'abord si on fait l'une ou l'autre des suppositions

$$\sqrt[3]{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)}=\sqrt[3]{\alpha}+z,$$

$$\sqrt[3]{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)}=x\sqrt[3]{\delta}+z,$$

la transformée en z sera comprise dans les fonctions elliptiques. On peut aussi faire disparaître à volonté le coefficient α ou le coefficient δ sous le radical; il faut faire pour cela $x=m+y$, ou $x=m+\frac{1}{y}$, et prendre pour m une racine réelle de l'équation $\alpha+\beta m+\gamma m^2+\delta m^3=0$. Supposons qu'on ait fait disparaître de cette manière δ, alors on fera $\alpha+\beta x+\gamma x^2=z^3$,

ce qui donne

$$x = -\frac{\beta + \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\gamma z^3)}}{2\gamma};$$

et en substituant cette valeur dans la formule proposée, toute la difficulté se réduira à intégrer une différentielle de la forme $\frac{Qdz}{\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\gamma z^3)}}$, Q étant une fonction rationnelle de z.

V. On peut réduire aux fonctions elliptiques la formule..... $\int \frac{Pdx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \gamma x^4 + \beta x^5 + \alpha x^6)}}$, P étant une fonction rationnelle de x.

Car si on fait $x^2 + 1 = xz$, cette formule deviendra d'abord

$$\int \frac{Px^{-\frac{3}{2}}dz}{\sqrt{[\alpha(z^3 - 3z) + \beta(z^2 - 2) + \gamma z + \delta]}},$$

ensuite comme on a $x = \frac{1}{2}z \pm \frac{1}{2}\sqrt{(z^2 - 4)}$, cette valeur étant substituée dans P, le résultat sera de la forme $M \pm N\sqrt{(z^2 - 4)}$, M et N étant des fonctions rationnelles de z. De plus on a

$$x + 1 = x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(z + 2)},$$
$$x - 1 = \pm x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(z - 2)},$$
$$2x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{(z + 2)} \pm \sqrt{(z - 2)},$$
$$x^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{(z + 2)}} \mp \frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{(z - 2)}}.$$

Donc toutes les substitutions étant faites, la formule proposée sera composée de deux parties, l'une de la forme $\int \frac{Zdz}{\sqrt{[Q(z + 2)]}}$, Z étant une fonction rationnelle de z, et Q désignant le polynome $\alpha(z^3 - 3z) + \beta(z^2 - 2) + \gamma z + \delta$, l'autre étant de la forme $\int \frac{Z'dz}{\sqrt{[Q(z - 2)]}}$, Z' étant aussi une fonction rationnelle de z. Donc la transformée en z sera intégrable par les fonctions elliptiques.

VI. On pourra donc intégrer de même la formule $\int \frac{Pdy}{\sqrt{(\beta + \gamma y^2 + \delta y^4 + \gamma y^6 + \beta y^8)}}$, P étant une fonction rationnelle de y.

Car si on fait $P = M + Ny$, M et N étant des fonctions paires de y, et qu'on appelle R le radical, la partie $\frac{Mdy}{R}$ rentrera dans le cas précédent, en faisant $\alpha = 0$ et $y^2 = x$. L'autre partie $\frac{Nydy}{R}$ se réduit pareillement à une fonction elliptique en faisant $y^2 = x$.

VII. On peut ramener aux fonctions elliptiques la formule $\int \frac{P dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4)}}$, P étant une fonction rationnelle de x, pourvu que α et γ soient de même signe.

Car en faisant $\gamma = \alpha m^2$ et $mx = y$, cette formule se trouvera comprise dans le cas précédent.

VIII. Soit proposé la formule $Z = \int \frac{Q d\varphi}{\sqrt{(1 - m \sin^2 \varphi)}}$, Q étant une fonction rationnelle paire de $\sin \varphi$, et m étant plus grand que l'unité.

Pour ramener cette formule aux fonctions elliptiques, soit d'abord $m = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, on voit que α doit être la plus grande valeur de φ. Soit donc $\sin \varphi = \sin \alpha \sin \psi$, et $c = \sin \alpha$, la transformée sera $Z = \int \frac{c Q d\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}}$, et Q deviendra par la substitution, une fonction rationnelle paire de $\sin \psi$; de sorte que la formule proposée sera ramenée aux fonctions elliptiques.

IX. Si on avait la formule $Z = \int \frac{Q d\varphi}{\sqrt{(1 + m \sin^2 \varphi)}}$, m étant positif et d'une grandeur quelconque, il suffirait pour ramener cette quantité aux fonctions elliptiques, de faire $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \psi$, et $\frac{m}{1+m} = c^2$.

X. Soit proposé la formule $Z = \int \frac{Q d\varphi}{\sqrt{(f + g \cos \varphi + h \sin \varphi)}}$, dans laquelle f, g, h sont des constantes, et Q une fonction rationnelle de $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$.

On fera d'abord $\varphi = 2\psi + m$, et on prendra l'indéterminée m de manière que $\tang m = \frac{h}{g}$, alors la quantité $f + g \cos \varphi + h \sin \varphi$ deviendra de la forme $f' \pm g' \sin^2 \psi$, et on aura $Q d\varphi = (M + N \sin \psi \cos \psi) d\psi$, M et N étant des fonctions paires de $\sin \psi$. La partie $\frac{N d\psi \sin \psi \cos \psi}{\sqrt{(f' \pm g' \sin^2 \psi)}}$ peut être rendue rationnelle en faisant $f' \pm g' \sin^2 \psi = x^2$, ainsi il ne restera à intégrer que la différentielle $\frac{M d\psi}{\sqrt{(f' \pm g' \sin^2 \psi)}}$, et il est évident que cette intégrale ne dépend que des fonctions elliptiques.

XI. Si l'on a plus généralement

$$Z = \int \frac{Q d\varphi}{\sqrt{(\alpha + \beta \cos \varphi + \gamma \sin \varphi + \delta \cos^2 \varphi + \epsilon \sin \varphi \cos \varphi + \zeta \sin^2 \varphi)}},$$

Q étant une fonction rationnelle de $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$; on fera $\tang \frac{1}{2} \varphi = z$, ce qui donne $\sin \varphi = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos \varphi = \frac{1-z^2}{1-z^2}$, $d\varphi = \frac{2dz}{1+z^2}$, et la transformée

en z ne contiendra qu'un radical sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré; elle sera donc généralement réductible aux fonctions elliptiques.

XII. Soit $Z=\int\frac{Qd\varphi}{\sqrt{(\alpha+\beta\sin^2\varphi)}.\sqrt{(\gamma+\delta\sin^2\varphi)}}$, Q étant d'abord une fonction rationnelle paire de $\sin\varphi$, si on fait $\tang\varphi=m\tang\psi$, m étant une indéterminée, on aura $\sin^2\varphi=\frac{m^2\sin^2\psi}{m^2\sin^2\psi+\cos^2\psi}$, $\cos^2\varphi=\frac{\cos^2\psi}{m^2\sin^2\psi+\cos^2\psi}$, $d\varphi=\frac{md\psi}{m^2\sin^2\psi+\cos^2\psi}$, et la transformée sera $Z=\int\frac{mQd\psi}{\sqrt{R}}$, dans laquelle

$$R=[\alpha(m^2\sin^2\psi+\cos^2\psi)+\beta m^2\sin^2\psi][\gamma(m^2\sin^2\psi+\cos^2\psi)+\delta m^2\sin^2\psi].$$

Soit $\alpha m^2+\beta m^2=\alpha$, ou $m^2=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, on aura $R=A+B\sin^2\psi$, A et B étant des coefficiens connus; et l'intégrale sera réduite à la forme..... $\int\frac{mQd\psi}{\sqrt{(A+B\sin^2\psi)}}$ dans laquelle Q sera une fonction rationnelle de $\sin^2\psi$, ainsi elle sera ramenée aux fonctions elliptiques.

Cette solution suppose la quantité $\alpha(\alpha+\beta)$ positive; si elle ne l'était pas, non plus que $\gamma(\gamma+\delta)$ qui pourrait la remplacer, on ferait tout simplement $\sin\varphi=x$, ce qui donnerait $Z=\int\frac{Qdx}{\sqrt{(1-xx)}.\sqrt{(\alpha+\beta x^2)}.\sqrt{(\gamma+\delta x^2)}}$; et cette formule où Q peut être supposé une fonction rationnelle de x, est ramenée au cas I, dont nous avons indiqué la solution; on peut même supposer que Q est une fonction rationnelle quelconque de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$; alors Q se réduira toujours à la forme $Q'+Q''\sqrt{(1-x^2)}$, dans laquelle Q' et Q'' seront des fonctions rationnelles de x, et on aura

$$Z=\int\frac{Q'dx}{\sqrt{(1-xx)}.\sqrt{(\alpha+\beta x^2)}.\sqrt{(\gamma+\delta x^2)}}+\int\frac{Q''dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x^2)}.\sqrt{(\gamma+\delta x^2)}},$$

intégrales qui rentrent toutes deux dans les méthodes connues.

207. Nous ne multiplierons pas davantage ces exemples de réduction; ils suffisent pour indiquer les substitutions à faire dans les cas analogues à ceux que nous avons développés. Nous terminerons en réunissant dans un même tableau quelques-unes des formules les plus simples qui se rencontrent fréquemment dans l'application des fonctions elliptiques.

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{d\varphi}{\Delta}&=F(c,\varphi)\\ \int\Delta d\varphi&=E(c,\varphi)\end{aligned}\right\}\text{formules principales,}$$

$$\int\frac{d\varphi}{\Delta^3}=\frac{1}{b^2}E-\frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{b^2\Delta},$$

$$\int\frac{d\varphi\,\sin^2\varphi}{\Delta}=\frac{1}{c^2}(F-E),$$

$$\int\frac{d\varphi\cos^2\varphi}{\Delta}=\frac{1}{c^2}(E-b^2F),$$

$$\int\frac{d\varphi}{\Delta\cos^2\varphi}=\frac{1}{b^2}(\Delta\tang\varphi+b^2F-E),$$

$$\int\frac{d\varphi\,\tang^2\varphi}{\Delta}=\frac{1}{b^2}(\Delta\tang\varphi-E),$$

$$\int\frac{d\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^3}=\frac{1}{c^2}(F-E)+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta},$$

$$\int\frac{d\varphi\,\sin^2\varphi}{\Delta^3}=\frac{1}{b^2c^2}(E-b^2F)-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{b^2\Delta},$$

$$\int\frac{d\varphi}{\Delta^5}=\frac{2(1+b^2)}{3b^4}E-\frac{1}{3b^2}F-\frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{3b^4\Delta}\left(2+2b^2+\frac{b^2}{\Delta^2}\right),$$

$$\int\frac{d\varphi\,\tang^2\frac{1}{2}\varphi}{\Delta}=2\Delta\tang\tfrac{1}{2}\varphi+F-2E,$$

$$\int\frac{d\varphi}{\Delta\cos^2\frac{1}{2}\varphi}=2\Delta\tang\tfrac{1}{2}\varphi+2F-2E,$$

$$\int\frac{\Delta d\varphi}{\cos^2\varphi}=\Delta\tang\varphi+F-E,$$

$$\int\Delta d\varphi\,\tang^2\varphi=\Delta\tang\varphi+F-2E,$$

$$\int\Delta^3 d\varphi=\frac{c^2}{3}\Delta\sin\varphi\cos\varphi+\frac{2+2b^2}{3}E-\frac{b^2}{3}F,$$

$$\int\Delta d\varphi\,\sin^2\varphi=-\tfrac{1}{3}\Delta\sin\varphi\cos\varphi+\frac{2c^2-1}{3c^2}E+\frac{b^2}{3c^2}F,$$

$$\int\Delta d\varphi\,\cos^2\varphi=\tfrac{1}{3}\Delta\sin\varphi\cos\varphi+\frac{1+c^2}{3c^2}E-\frac{b^2}{3c^2}F,$$

toutes ces intégrales sont prises à compter de $\varphi=0$.

208. Les formules suivantes font connaître les différentielles des fonctions F et E, en faisant varier le module c, et celles de la fonction $\Pi=\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta}$ en faisant varier soit le module c, soit le paramètre n.

$$\frac{dE}{dc}=\frac{1}{c}(E-F),$$

$$\frac{dF}{dc}=\frac{1}{b^2c}(E-b^2F)-\frac{c\sin\varphi\cos\varphi}{b^2\Delta},$$

$$(n+c^2)\frac{d\Pi}{dc}=\frac{n}{c}\Pi+\frac{c}{b^2}(E-b^2F)-\frac{c^3\sin\varphi\cos\varphi}{b^2\Delta},$$

$$\left\{\begin{aligned}2\alpha\frac{d\Pi}{dn}&=\frac{c^2-n^2}{n^2}\Pi+\frac{1}{n}E-\left(\frac{c^2+n}{n^2}\right)F+\frac{\Delta\sin\varphi\cos\varphi}{1+n\sin^2\varphi},\\ \alpha&=(1+n)\left(1+\frac{c^2}{n}\right),\end{aligned}\right.$$

Relativement aux fonctions complètes F^1, E^1, on donne comme exemples qui peuvent être utiles, les intégrales suivantes prises à compter de $c = 0$.

$$\int F^1\, c dc = E^1 - b^2 F^1,$$
$$\int \frac{E^1}{b^2}\, dc = cF^1,$$
$$\int \frac{E^1}{b^2}\, c dc = F^1 - E^1,$$
$$\int \frac{E^1 dc}{1-c} = (1+c) F^1 - E^1,$$
$$\int \frac{E^1 dc}{1+c} = E^1 - (1-c) F^1.$$

209. Enfin pour passer du module c au module c^0, et réciproquement, on a les formules suivantes relatives aux fonctions F et E;

$$F(c, \varphi) = \frac{1+c^0}{2} F(c^0, \varphi^0),\ c^0 = \frac{1-b}{1+b},\ \text{tang}(\varphi^0 - \varphi) = b \text{ tang } \varphi,$$
$$E(c, \varphi) = \frac{1}{1+c^0} E(c^0, \varphi^0) - \left(\frac{1-c^0}{2}\right) F(c^0, \varphi^0) + \frac{c^0 \sin\varphi^0}{1+c^0},$$
$$F(c^0, \varphi^0) = (1+b)\, F(c, \varphi),$$
$$E(c^0, \varphi^0) = \frac{2}{1+b} E(c, \varphi) + \frac{2b}{1+b} F(c, \varphi) - (1-b) \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\Delta}.$$

Les deux premières formules peuvent servir à vérifier un résultat dont nous avons fait mention (art. 30); elles donnent

$$E(c, \varphi) - bF(c, \varphi) = \frac{1}{1+c^0} [E(c^0, \varphi^0) - b^{00} F(c^0, \varphi^0)] + \frac{c^0 \sin\varphi^0}{1+c^0};$$

or on a $E(c^0, \varphi^0) - b^{00} F(c^0, \varphi^0) = \int \frac{c^{02} d\varphi^0 \cos^2\varphi^0}{\sqrt{(1 - c^{02} \sin^2\varphi^0)}}$, quantité toujours positive; de même $\sin\varphi^0$ est positif depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Donc dans tout cet intervalle la quantité $E(c, \varphi) - bF(c, \varphi)$ est positive; de sorte qu'on aura en général $E(c, \varphi) > bF(c, \varphi)$, et en particulier $E^1 c > bF^1 c$, ce qui est le résultat que nous voulions vérifier. De plus puisque $\int \frac{d\varphi^0 \cos^2\varphi^0}{\Delta(c^0, \varphi^0)}$ est $> \int d\varphi^0 \cos^2\varphi^0$, ou $> \frac{1}{2}\varphi^0 + \frac{1}{4}\sin 2\varphi^0$, on aura en général ..... $E(c, \varphi) > bF(c, \varphi) + \frac{c^0 \sin\varphi^0}{1+c^0} + \frac{c^{02}}{1+c^0}(\frac{1}{2}\varphi^0 + \frac{1}{4}\sin 2\varphi^0)$, et en particulier $E^1 c > bF^1 c + \frac{c^{02}}{1+c^0} \cdot \frac{\pi}{2}$.

CHAPITRE XXXIII.

Développement des différens cas compris dans l'intégrale $Z = \int \frac{P dx}{\sqrt{Q}}$, P *étant une fonction rationnelle de* x *et* Q *un polynome de la forme* $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta x^6$.

210. Nous avons déjà fait voir (art. 206) que cette intégrale peut toujours être exprimée par des fonctions elliptiques, mais il ne sera pas inutile de développer les différens cas compris dans cette formule, comme nous l'avons fait (art. 6) pour le cas où le polynome ne passe pas le quatrième degré, c'est-à-dire, pour le cas où $\delta = 0$. Nous obtiendrons ainsi un certain nombre de types qui faciliteront beaucoup les applications de la formule proposée.

Le polynome Q se décomposera toujours en trois facteurs réels de la forme $fx^2 + g$, où en un facteur réel $fx^2 + g$ et deux facteurs imaginaires formant le facteur trinome $x^4 + 2mx^2 \cos\theta + m^2$.

Chaque facteur réel, dans lequel on peut omettre tout multiplicateur commun positif, est susceptible des trois formes $x^2 + a^2$, $x^2 - a^2$, $a^2 - x^2$; d'où il paraît suivre qu'en n'admettant que des facteurs réels dans Q, ce polynome serait susceptible de 27 formes; mais on trouvera aisément que ces 27 formes se réduisent à 7 essentiellement différentes.

D'un autre côté, s'il y a des facteurs imaginaires, le facteur réel qui les contient, pourra se combiner avec les trois formes qui conviennent au facteur réel, ce qui fera trois formes distinctes. Ainsi nous aurons en tout dix cas à examiner, et dans chacun de ces cas il faudra résoudre séparément les deux formules $Z' = \int \frac{M dx}{\sqrt{Q}}$, $Z'' = \int \frac{N x dx}{\sqrt{Q}}$, dans lesquelles se décompose la formule proposée, lorsqu'on fait, comme cela est toujours possible, $P = M + Nx$, M et N étant des fonctions rationnelles de x^2.

Cas Ier. $Q = (x^2 + \alpha^2)(x^4 + 2mx^2\cos\theta + m^2)$. Limites $\begin{cases} x = 0, \\ x = \infty. \end{cases}$

211. Pour avoir l'intégrale $Z' = \int \frac{M dx}{\sqrt{Q}}$, soit $x = \alpha \operatorname{tang} \psi$ et ensuite $\sin\psi = y$, ce qui donne immédiatement $x^2 = \frac{\alpha^2 y^2}{1 - y^2}$; soit en même temps:

$$A = \sqrt{(\alpha^4 - 2m\alpha^2\cos\theta + m^2)},\ \cos 2\lambda = \frac{\alpha^2\cos\theta - m}{A},\ \sin 2\lambda = \frac{\alpha^2 \sin\theta}{A},$$

on aura pour première transformée $Z' = \int \frac{M dy}{\sqrt{(A^2y^4 + 2Am\cos 2\lambda \,.\, y^2 + m^2)}}$, dans laquelle M est une fonction rationnelle de y^2. Soit ensuite

$$y = \sqrt{\frac{m}{A}} . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi,\ c^2 = \sin^2\lambda = \tfrac{1}{2} - \left(\frac{\alpha^2\cos\theta - m}{2A}\right),$$

on aura $\frac{dy}{\sqrt{(A^2y^4 + 2Amy^2\cos 2\lambda + m^2)}} = \frac{1}{2\sqrt{Am}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}}$. D'ailleurs par la substitution de $y^2 = \frac{m}{A}\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi$, ou directement par celle de ..... $x^2 = \frac{\alpha^2 m(1 - \cos\varphi)}{A - m + (A + m)\cos\varphi}$, la quantité M se changera en $M' + M''\cos\varphi$, M' et M'' étant des fonctions rationnelles de $\sin^2\varphi$; donc on aura cette transformée finale

$$Z' = \frac{1}{2\sqrt{Am}} \cdot \int \frac{M' d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}} + \frac{1}{2\sqrt{Am}} \int \frac{M'' d\varphi \cos\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}}.$$

La seconde partie s'intègre par arcs de cercle et par logarithmes en faisant $c\sin\varphi = \sin\omega$; la première partie dépend des fonctions elliptiques dont le module est c.

Au reste on peut observer que l'amplitude φ ne croit pas indéfiniment, car la plus grande valeur de y étant 1, φ ne doit pas surpasser la limite déterminée par l'équation $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{A}{m}}$.

Venons maintenant à la seconde formule $Z'' = \int \frac{N x dx}{\sqrt{Q}}$, nous ferons... $x^2 = y^2 - \alpha^2$, puis

$$A = \sqrt{(\alpha^4 - 2m\alpha^2\cos\theta + m^2)},\ \cos 2\mu = \frac{m\cos\theta - \alpha^2}{A},\ \sin 2\mu = \frac{m\sin\theta}{A},$$

et nous aurons pour première transformée $Z'' = \int \frac{N dy}{\sqrt{(y^4 + 2A\cos 2\mu \,.\, y^2 + A^2)}}$. Soit ensuite $y = \sqrt{A} . \operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega$, $k = \sin\mu$, ou $k^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{m\cos\theta - \alpha^2}{2A}\right)$, on aura $Z'' = \frac{1}{2\sqrt{A}} \cdot \int \frac{N d\omega}{\sqrt{(1 - k^2\sin^2\omega)}}$; et comme N est fonction de y^2, on

pourra supposer $N = N' + N'' \cos \omega$, N' et N'' étant des fonctions rationnelles de $\sin^2 \omega$, ce qui donnera

$$Z'' = \frac{1}{2\sqrt{A}} \cdot \int \frac{N' d\omega}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \omega)}} + \frac{1}{2\sqrt{A}} \cdot \int \frac{N'' d\omega \cos \omega}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \omega)}}.$$

La première partie est intégrable par les fonctions elliptiques, la seconde l'est par arcs de cercle et par logarithmes.

Remarquons que les modules $c = \sin \lambda$, $k = \sin \mu$, sont tels que... $\lambda + \mu = 90^\circ + \frac{1}{2}\theta$, c'est la seule relation qu'ils aient entre eux; car d'ailleurs ils n'appartiennent pas à la même échelle.

Cas II. $\quad Q = (a^2 - x^2)(x^4 + 2mx^2 \cos \theta + m^2)$. $\quad$ Limites $\begin{cases} x = 0, \\ x = a. \end{cases}$

212. Soit $x = a \sin \psi$, on aura $\frac{dx}{\sqrt{Q}} = \frac{d \operatorname{tang} \psi}{\sqrt{[A^2 \operatorname{tang}^4 \psi + 2Am \cos 2\lambda . \operatorname{tang}^2 \psi + m^2]}}$,

$$A^2 = a^4 + 2ma^2 \cos \theta + m^2,$$

$$\cos 2\lambda = \frac{a^2 \cos \theta + m}{A}, \quad \sin 2\lambda = \frac{a^2 \sin \theta}{A}.$$

Soit ensuite $\operatorname{tang} \psi = \sqrt{\frac{m}{A}} \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi$, $c^2 = \sin^2 \lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 \cos \theta + m}{A}$, on aura la transformée $Z' = \frac{1}{2\sqrt{(Am)}} \int \frac{M d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}}$. Et comme on a $x^2 = a^2 \sin^2 \psi = \frac{a^2 m (1 - \cos \varphi)}{m(1 - \cos \varphi) + A(1 + \cos \varphi)}$, si on substitue cette valeur de x^2 dans M, le résultat sera de la forme $M = M' + M'' \cos \varphi$, M' et M'' étant des fonctions rationnelles de $\sin^2 \varphi$, ce qui donnera finalement

$$Z' = \frac{1}{2\sqrt{Am}} \int \frac{M' d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}} + \frac{1}{2\sqrt{Am}} \int \frac{M'' d\varphi \cos \varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}}.$$

La première partie dépend des fonctions elliptiques dont le module est c, la seconde est intégrable par arcs de cercle et par logarithmes. Ces intégrales s'étendront depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$, ou depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \pi$; par conséquent si on veut avoir l'intégrale complète, la seconde partie deviendra nulle et il suffira de tenir compte de la première.

Occupons-nous maintenant de la seconde formule $Z'' = \int \frac{Nx dx}{\sqrt{Q}}$; si on fait toujours $x = a \sin \psi$, on aura pour première transformée

$$Z'' = \int \frac{aN d\psi \sin \psi}{\sqrt{(a^4 \sin^4 \psi + 2ma^2 \cos \theta \sin^2 \psi + m^2)}}.$$

Soit ensuite $\cos\psi = y$, on aura $Z'' = \int \frac{-aNdy}{\sqrt{(A^2 + 2Aa^2\cos 2\mu y^2 + a^4y^4)}}$,

$$A^2 = a^4 + 2ma^2\cos\theta + m^2,$$

$$\cos 2\mu = -\left(\frac{a^2 + m\cos\theta}{A}\right),\ \sin 2\mu = \frac{m\sin\theta}{A}.$$

Soit enfin $y = \frac{\sqrt{A}}{a}\cot\frac{1}{2}\omega$, ce qui donnera directement $x^2 = a^2 - A\cot^2\frac{1}{2}\omega$, si l'on fait $k = \sin\mu$ ou $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{a^2 + m\cos\theta}{2A}$, $N = N' + N''\cos\omega$; on aura pour dernière transformée

$$Z'' = \frac{1}{2\sqrt{A}}\int\frac{N'd\omega}{\sqrt{(1 - k^2\sin^2\omega)}} + \frac{1}{2\sqrt{A}}\int\frac{N''d\omega\cos\omega}{\sqrt{(1 - k^2\sin^2\omega)}}.$$

La seconde intégrale ne dépend que des arcs de cercle et des logarithmes, la première s'exprimera par des fonctions elliptiques dont le module est k. Au reste les modules $c = \sin\lambda$, $k = \sin\mu$, ont entre eux cette relation $\lambda + \mu = \frac{1}{2}(\pi + \theta)$, comme dans le cas I. Il faut observer aussi que l'amplitude ω croît depuis la valeur $\omega = \beta$ déterminée par l'équation $\tang\frac{1}{2}\beta = \frac{\sqrt{A}}{a}$, jusqu'à $\omega = \pi$.

Cas III. $\quad Q = (x^2 - a^2)(x^4 + 2mx^2\cos\theta + m^2)$,

ce cas se ramène au précédent, en faisant $x = \frac{a}{y}$.

Cas IV. $\quad Q = (x^2 + a^2)(x^2 + \beta^2)(x^2 + \gamma^2)$. Limites $\begin{cases} x = 0, \\ x = \infty. \end{cases}$

213. Nous supposerons que les facteurs sont écrits dans l'ordre de leur grandeur, de sorte qu'on ait $a < \beta$ et $\beta < \gamma$. Soit $x = a\tang\psi$ et ensuite $\sin\psi = y$, ou tout d'un coup $x^2 = \frac{a^2y^2}{1 - y^2}$, on aura $\frac{dx}{\sqrt{Q}} = \ldots\ldots$ $\frac{dy}{\sqrt{[\beta^2 - (\beta^2 - a^2)y^2]}\sqrt{[\gamma^2 - (\gamma^2 - a^2)y^2]}}$. Soit $y = \frac{\gamma\sin\varphi}{\sqrt{(\gamma^2 - a^2)}}$, ou $x^2 = \frac{a^2\gamma^2\sin^2\varphi}{\gamma^2 - a^2 - \gamma^2\sin^2\varphi}$, $c^2 = \frac{\gamma^2(\beta^2 - a^2)}{\beta^2(\gamma^2 - a^2)}$, $b^2 = \frac{a^2(\gamma^2 - \beta^2)}{\beta^2(\gamma^2 - a^2)}$, on aura $Z' = \frac{1}{\beta\sqrt{(\gamma^2 - a^2)}}\cdot\int\frac{Md\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}}$. Et comme dans ce cas M est une fonction rationnelle de $\sin^2\varphi$, il n'y a pas lieu de partager cette intégrale en deux autres; on remarquera seulement que la valeur de φ ne peut s'étendre que depuis $\varphi = 0$ jusqu'à la valeur de φ qui donne $\sin^2\varphi = \frac{\gamma^2 - a^2}{\gamma^2}$ ou $\cos\varphi = \frac{a}{\gamma}$.

Venons maintenant à la seconde formule $Z'' = \int\frac{Nxdx}{\sqrt{Q}}$; si on fait $x = a\tang\psi$, et ensuite $\cos\psi = \frac{a}{\sqrt{(\beta^2 - a^2)}}\cot\omega$, $k^2 = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma^2 - a^2}$, la trans-

formée sera

$$Z'' = \frac{1}{\sqrt{(\gamma^2-\alpha^2)}} \cdot \int \frac{N d\omega}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\omega)}},$$

dans laquelle N qui est fonction de x^2, deviendra fonction de $\sin^2\omega$ par la substitution $x^2 = (\beta^2-\alpha^2)\tang^2\omega - \alpha^2$. Cette nouvelle intégrale s'étendra depuis $\tang\omega = \frac{\alpha}{\sqrt{(\beta^2-\alpha^2)}}$, ou $\sin\omega = \frac{\alpha}{\beta}$, jusqu'à $\omega = \frac{1}{2}\pi$, valeurs qui répondent aux limites $x = 0$, $x = \infty$.

Cas V. $Q = (\alpha^2 - x^2)(x^2+\beta^2)(x^2+\gamma^2)$. Limites $\begin{cases} x = 0, \\ x = \alpha. \end{cases}$

214. Soit $x = \alpha\sin\psi$, on aura $\frac{dx}{\sqrt{Q}} = \frac{d\psi}{\sqrt{(\beta^2+\alpha^2\sin^2\psi)}.\sqrt{(\gamma^2+\alpha^2\sin^2\psi)}}$. Soit ensuite $\tang\psi = \frac{\beta}{\sqrt{(\beta^2+\alpha^2)}}\tang\varphi$, et $c^2 = \frac{\alpha^2(\gamma^2-\beta^2)}{\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)}$, ce qui suppose $\gamma > \beta$, on aura

$$Z' = \frac{1}{\gamma\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}\int\frac{M d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}},$$

et la valeur de x^2 à substituer dans M sera $x^2 = \frac{\alpha^2\beta^2\sin^2\varphi}{\beta^2+\alpha^2\cos^2\varphi}$.

Pour avoir la seconde intégrale $Z'' = \int\frac{Nx dx}{\sqrt{Q}}$, on fera $x = \alpha\sin\psi$, puis $\cos\psi = \frac{\sqrt{(\beta^2+\alpha^2)}}{\alpha}\sin\zeta$, $c^2 = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+\gamma^2}$, et on aura $Z'' = \frac{1}{\sqrt{(\alpha^2+\gamma^2)}}\int\frac{-N d\zeta}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\zeta)}}$. Mais comme il convient de rendre l'intégrale positive, on fera, suivant les formules connues, $\sin\zeta = \frac{\cos\omega}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}}$, ce qui donne directement.... $x^2 = \alpha^2 - \frac{(\alpha^2+\beta^2)\cos^2\omega}{1-c^2\sin^2\omega}$, et la transformée finale sera

$$Z'' = \frac{1}{\sqrt{(\alpha^2+\gamma^2)}}\int\frac{N d\omega}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}}.$$

Cette intégrale s'étend depuis la valeur de ω qui donne $\tang\omega = \frac{\beta}{\alpha}$ jusqu'à $\omega = \frac{1}{2}\pi$, valeurs qui répondent aux limites $x = 0$, $x = \alpha$.

Cas VI. $Q = (x^2-\alpha^2)(x^2+\beta^2)(x^2+\gamma^2)$,

ce cas se ramène au précédent en faisant $x = \frac{\alpha}{y}$.

Cas VII. $Q = (x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)(x^2+\gamma^2)$.

215. On suppose que β est la plus grande des deux quantités α et β, et d'après cette supposition l'étendue de l'intégrale comprend deux parties, l'une depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \alpha$, l'autre depuis $x = \beta$ jusqu'à $x = \infty$.

Dans la première partie nous ferons $x = \alpha \sin \psi$, puis $\tang \psi = \frac{\gamma}{\sqrt{(\gamma^2 + \alpha^2)}} \tang \varphi$, $c^2 = \frac{\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2)}{\beta^2(\gamma^2 + \alpha^2)}$, $b^2 = \frac{\gamma^2(\beta^2 - \alpha^2)}{\beta^2(\gamma^2 + \alpha^2)}$, et nous aurons

$$Z' = \int \frac{M dx}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{\beta \sqrt{(\gamma^2 + \alpha^2)}} \cdot \int \frac{M d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}},$$

la valeur de x^2 à substituer dans M étant $x^2 = \frac{\alpha^2 \gamma^2 \sin^2 \varphi}{\gamma^2 + \alpha^2 \cos^2 \varphi}$. Cette intégrale s'étendra depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Dans le même cas on aura $\frac{x dx}{\sqrt{Q}} = \frac{\alpha d\psi \sin \psi}{\sqrt{(\beta^2 - \alpha^2 + \alpha^2 \cos^2 \psi)} \cdot (\sqrt{(\gamma^2 + \alpha^2 - \alpha^2 \cos^2 \psi)}}$.

Soit $\cos \psi = \frac{\sqrt{(\gamma^2 + \alpha^2)}}{\alpha} \cos \zeta$, $k^2 = \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\gamma^2 + \beta^2}$, on aura

$$Z'' = \frac{1}{\sqrt{(\beta^2 + \gamma^2)}} \int \frac{M d\zeta}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \zeta)}},$$

la valeur de x^2 à substituer dans N étant $x^2 = \alpha^2 - (\gamma^2 + \alpha^2) \cos^2 \zeta$. Les limites de ζ seront $\cos \zeta = \frac{\alpha}{\sqrt{(\gamma^2 + \alpha^2)}}$ ou $\tang \zeta = \frac{\gamma}{\alpha}$, et $\zeta = \frac{1}{2}\pi$.

Considérons en second lieu le cas où la variable x s'étend depuis $x = \beta$ jusqu'à $x = \infty$. Soit $x = \frac{\beta}{\cos \psi}$, ensuite $\sin \psi = \frac{\sqrt{(\gamma^2 + \beta^2)}}{\gamma} \cos \sigma, \ldots$ $c^2 = \frac{\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2)}{\beta^2(\alpha^2 + \gamma^2)}$, on aura $Z' = \int \frac{M dx}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{\beta \sqrt{(\gamma^2 + \alpha^2)}} \int \frac{-M d\sigma}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \sigma)}}$.

Pour rendre positive cette intégrale, soit encore $\cos \sigma = \frac{b \sin \varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}}$, on aura finalement

$$Z' = \frac{1}{\beta \sqrt{(\gamma^2 + \alpha^2)}} \int \frac{M d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}},$$

et la valeur de x^2 à substituer dans M sera $x^2 = \frac{\beta^2 \gamma^2 (1 - c^2 \sin^2 \varphi)}{\gamma^2 \cos^2 \varphi - b^2 \beta^2 \sin^2 \varphi}$. Cette intégrale s'étend depuis $\varphi = 0$ jusqu'à la valeur de φ qui donne.... $\sin \varphi = \sqrt{\left(\frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\gamma^2 + \beta^2}\right)}$, ou $\tang \varphi = \frac{\gamma}{b\beta}$.

Pour avoir l'autre intégrale on fera $x^2 = \beta^2 + (\beta^2 - \alpha^2) \tang^2 \omega$, $k^2 = \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\gamma^2 + \beta^2}$, et on aura

$$Z'' = \int \frac{N x dx}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{\sqrt{(\gamma^2 + \beta^2)}} \int \frac{N d\omega}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \omega)}},$$

l'intégrale ayant pour limites $\omega = 0$, $\omega = \frac{1}{2}\pi$.

On voit que les modules c et k sont les mêmes dans les deux parties de chaque intégrale, et les formules entièrement semblables.

Cas VIII. $Q = (x^2 - \alpha^2)(\beta^2 - x^2)(x^2 + \gamma^2)$, hyp. $\beta > \alpha$.

216. L'hypothèse contraire $\alpha > \beta$ ne donnerait pas une forme différente parce que alors le produit $(x^2 - \alpha^2)(\beta^2 - x^2)$ devrait être remplacé par $(x^2 - \beta^2)(\alpha^2 - x^2)$.

Pour avoir l'intégrale $Z' = \int \frac{M dx}{\sqrt{Q}}$, soit $x^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 \sin^2 \varphi + \beta^2 \cos^2 \varphi}$, ... $c^2 = \frac{\gamma^2 (\beta^2 - \alpha^2)}{\beta^2 (\gamma^2 + \alpha^2)}$, $b^2 = \frac{\alpha^2 (\beta^2 + \gamma^2)}{\beta^2 (\gamma^2 + \alpha^2)}$, on aura la transformée

$$Z' = \frac{1}{\beta \sqrt{(\gamma^2 + \alpha^2)}} \int \frac{M d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}};$$

où la variable φ a pour limites $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Pour avoir l'autre intégrale, faisons $k^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\gamma^2 + \beta^2}$, $x^2 = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 k^2 \sin^2 \omega}{1 - k^2 \sin^2 \omega}$, nous aurons

$$Z'' = \int \frac{N x dx}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{\sqrt{(\gamma^2 + \beta^2)}} \int \frac{N d\omega}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \omega)}},$$

les limites de ω étant $\omega = 0$, $\omega = \frac{1}{2}\pi$.

Cas IX. $Q = (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)(x^2 - \gamma^2)$, hyp. $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$.

217. Il y aura alors deux parties à considérer, l'une depuis $x = \alpha$ jusqu'à $x = \beta$, l'autre depuis $x = \gamma$ jusqu'à $x = \infty$.

Soit 1°. $x^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 \sin^2 \varphi + \beta^2 \cos^2 \varphi}$, $c^2 = \frac{\gamma^2 (\beta^2 - \alpha^2)}{\beta^2 (\gamma^2 - \alpha^2)}$, on aura

$$Z' = \int \frac{M dx}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{\beta \sqrt{(\gamma^2 - \alpha^2)}} \int \frac{M d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}},$$

les limites de φ étant $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Pour la seconde intégrale, soit $x^2 = \alpha^2 \cos^2 \psi + \beta^2 \sin^2 \psi$, $k^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\gamma^2 - \alpha^2}$; on aura

$$Z'' = \int \frac{N x dx}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{\sqrt{(\gamma^2 - \alpha^2)}} \int \frac{N d\psi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \psi)}},$$

les limites de ψ étant encore $\psi = 0$, $\psi = \frac{1}{2}\pi$.

2°. Les limites de x étant $x = \gamma$, $x = \infty$, soit d'abord $x = \frac{\gamma}{\cos \psi}$ et ensuite $\sin \psi = \frac{\sqrt{(\gamma^2 - \beta^2)}}{\beta} \operatorname{tang} \omega$, ou immédiatement $x^2 = \frac{\beta^2 \gamma^2 \cos^2 \omega}{\beta^2 - \gamma^2 \sin^2 \omega}$, ... $c^2 = \frac{\gamma^2 (\beta^2 - \alpha^2)}{\beta^2 (\gamma^2 - \alpha^2)}$, on aura

$$Z' = \frac{1}{\beta \sqrt{(\gamma^2 - \alpha^2)}} \int \frac{M d\omega}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \omega)}},$$

les limites de ω étant $\omega = 0$, $\sin\omega = \frac{\beta}{\gamma}$.

Pour avoir la seconde intégrale, soit $x^2 = \gamma^2 + (\gamma^2 - \beta^2)\tang^2\zeta$, $k^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\gamma^2 - \alpha^2}$, on aura

$$Z'' = \frac{1}{\sqrt{(\gamma^2 - \alpha^2)}}\int\frac{N d\zeta}{\sqrt{(1 - k^2\sin^2\zeta)}},$$

les limites de ζ étant encore $\zeta = 0$, $\zeta = \frac{1}{2}\pi$.

Cas X. $$Q = (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)(\gamma^2 - x^2).$$

218. On suppose $\alpha < \beta$ et $\beta < \gamma$, ce qui donne lieu de considérer chaque intégrale dans deux différens systèmes de limites.

Soient 1°. les limites $x = 0$, $x = \alpha$, où $Q = (\alpha^2 - x^2)(\beta^2 - x^2)(\gamma^2 - x^2)$, on fera $x = \alpha\sin\psi$, puis $\tang\psi = \frac{\gamma\tang\varphi}{\sqrt{(\gamma^2 - \alpha^2)}}$, ou tout d'un coup..... $x^2 = \frac{\alpha^2\gamma^2\sin^2\varphi}{\gamma^2 - \alpha^2\cos^2\varphi}$, $c^2 = \frac{\alpha^2(\gamma^2 - \beta^2)}{\beta^2(\gamma^2 - \alpha^2)}$, et on aura

$$Z' = \frac{1}{\beta\sqrt{(\gamma^2 - \alpha^2)}}\int\frac{M d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}}. \qquad \begin{cases}\varphi = 0,\\ \varphi = \frac{1}{2}\pi.\end{cases}$$

Soit de nouveau $x^2 = \alpha^2 - (\gamma^2 - \alpha^2)\cot^2\omega$, $k^2 = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma^2 - \alpha^2}$, et on aura la seconde intégrale

$$Z'' = \frac{1}{\sqrt{(\gamma^2 - \alpha^2)}}\int\frac{N d\omega}{\sqrt{(1 - k^2\sin^2\omega)}}.$$

Les limites de ω sont $\cos\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$, $\omega = \frac{1}{2}\pi$.

Soient 2°. les limites $x = \beta$, $x = \gamma$, on fera $x^2 = \frac{\alpha^2\beta^2(1 - c^2\sin^2\psi)}{\alpha^2 - c^2\beta^2\sin^2\psi}$, ... $c^2 = \frac{\alpha^2(\gamma^2 - \beta^2)}{\beta^2(\gamma^2 - \alpha^2)}$, et on aura la première intégrale

$$Z' = \frac{1}{\beta\sqrt{(\gamma^2 - \alpha^2)}}\int\frac{M d\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}. \qquad \begin{cases}\psi = 0,\\ \psi = \frac{1}{2}\pi.\end{cases}$$

Soit ensuite $x^2 = \frac{\beta^2 - k^2\alpha^2\sin^2\zeta}{1 - k^2\sin^2\zeta}$, $k^2 = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma^2 - \alpha^2}$, on aura la seconde intégrale

$$Z'' = \frac{1}{\sqrt{(\gamma^2 - \alpha^2)}}\int\frac{N d\zeta}{\sqrt{(1 - k^2\sin^2\zeta)}}. \qquad \begin{cases}\zeta = 0,\\ \zeta = \frac{1}{2}\pi.\end{cases}$$

219. Ayant ainsi résolu les différens cas que peut présenter la formule $\int\frac{P dx}{\sqrt{Q}}$, dans laquelle P est une fonction rationnelle de x et Q un polynome de la forme $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta x^6$, nous pouvons appliquer ces solutions

à la formule générale $\int \frac{Pdx}{R}$ dans laquelle R est un radical de la forme $\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)}$, sans être obligé de faire les transformations indiquées (art. 4). En effet, si le polynome du quatrième degré $\alpha + \beta x + \gamma x^2 +$ etc., a un facteur réel du premier degré $f + gx$, soit ce facteur $f + gx = x^1$, et le polynome exprimé en x^1 n'aura pas de terme constant. Cette opération étant censée faite d'avance, on pourra supposer $\alpha = 0$, ce qui réduit R à la forme $\sqrt{(\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)}$. Maintenant l'intégrale $\int \frac{Pdx}{R}$ devant être considérée pour toutes les valeurs de x, on pourra supposer pour les valeurs positives $x = y^2$ et pour les valeurs négatives $x = -y^2$; deux cas qui doivent être traités séparément.

Soit $x = y^2$, alors P deviendra une fonction de y^2, et en faisant... $Q = \beta + \gamma y^2 + \delta y^4 + \varepsilon y^6$, on aura l'intégrale $\int \frac{2Pdy}{\sqrt{Q}}$ qui sera comprise dans les dix cas dont nous avons donné la solution. Il en serait de même de l'intégrale prise dans le sens négatif, où il faudra faire $x = -y^2$, et qui dépend toujours des mêmes formules.

220. Le seul cas qu'on ne peut traiter par cette voie est celui où le polynome du quatrième degré sous le radical n'aurait que des facteurs imaginaires. Alors nous pourrons supposer $R^2 = (\alpha^2 + 2\alpha x \cos\theta + x^2)..(\beta^2 + 2\beta x \cos\lambda + x^2)$.

Dans ce cas il faudra recourir à la méthode ordinaire pour faire disparaître les puissances impaires de la variable sous le radical. Soit pour cet effet $x = \frac{p + qz}{1 + z}$, il faudra satisfaire aux équations

$$\alpha^2 + \alpha \cos\theta (p + q) + pq = 0,$$
$$\beta^2 + \beta \cos\lambda (p + q) + pq = 0,$$

d'où l'on tire

$$p + q = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha \cos\theta - \beta \cos\lambda}, \quad pq = \frac{\alpha\beta(\alpha \cos\lambda - \beta \cos\theta)}{\alpha \cos\theta - \beta \cos\lambda}.$$

Soit pour abréger

$$f^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos(\theta + \lambda),$$
$$g^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos(\theta - \lambda),$$

on déduira des équations précédentes $p - q = \frac{\pm fg}{\alpha \cos\theta - \beta \cos\lambda}$, et faisant encore $\alpha \cos\theta - \beta \cos\lambda = \delta$, on aura

$$p = \frac{\beta^2 - \alpha^2 \pm fg}{2\delta}, \quad q = \frac{\beta^2 - \alpha^2 \mp fg}{2\delta}.$$

Cela posé, la substitution de la valeur de x donnera

$$R^2(1+z)^4 = (M+Nz^2)(A+Bz^2);$$

on a d'ailleurs séparément

$$(1+z)^2(\alpha^2+2\alpha x\cos\theta+x^2) = M+Nz^2,$$
$$(1+z)^2(\beta^2+2\beta x\cos\lambda+x^2) = A+Bz^2;$$

et si l'on fait successivement $z=0$, $z=\infty$, valeurs qui correspondent à $x=p$, $x=q$, on aura

$$M=\alpha^2+2\alpha p\cos\theta+p^2,\quad A=\beta^2+2\beta p\cos\lambda+p^2,$$
$$N=\alpha^2+2\alpha q\cos\theta+q^2,\quad B=\beta^2+2\beta q\cos\lambda+q^2,$$

ce qui fait voir que ces quatre coefficiens sont toujours positifs.

On a encore sous une autre forme

$$M=(p+\alpha\cos\theta)(p-q),\quad A=(p+\beta\cos\lambda)(p-q),$$
$$N=(q+\alpha\cos\theta)(q-p),\quad B=(q+\beta\cos\lambda)(q-p);$$

de là résulte

$$MB=-(p-q)^2(pq+p\beta\cos\lambda+q\alpha\cos\theta+\alpha\beta\cos\theta\cos\lambda).$$

Substituant les valeurs $pq=\frac{\alpha\beta(\alpha\cos\lambda-\beta\cos\theta)}{\delta}$, $p=\frac{\beta^2-\alpha^2\pm fg}{2\delta}$, ... $q=\frac{\beta^2-\alpha^2\mp fg}{2\delta}$, on aura

$$MB=\tfrac{1}{8}(p-q)^2(\beta^2+\alpha^2-2\alpha\beta\cos\theta\cos\lambda\pm fg).$$

Mais $\beta^2+\alpha^2-2\alpha\beta\cos\theta\cos\lambda=\frac{1}{2}(f^2+g^2)$, donc $MB=\frac{1}{4}(p-q)^2(f\pm g)^2$.

On aura semblablement $NA=\frac{1}{4}(p-q)^2(f\mp g)^2$.

On peut prendre à volonté le signe ambigu provenant de la valeur de $p-q$; si on prend le signe supérieur, afin que MB soit le plus grand des deux produits MB, AN, on aura

$$MB=\tfrac{1}{4}(p-q)^2(f+g)^2,$$
$$AN=\tfrac{1}{4}(p-q)^2(f-g)^2.$$

Maintenant l'intégrale proposée $Z=\int\frac{Pdx}{R}$ étant réduite à la forme $Z=(q-p)\int\frac{Pdz}{\sqrt{[(M+Nz^2)(A+Bz^2)]}}$, on fera $z=\sqrt{\frac{A}{B}}\,.\,\text{tang}\,\varphi$, ... $c^2=1-\frac{AN}{BM}=1-\left(\frac{f-g}{f+g}\right)^2=\frac{4fg}{(f+g)^2}$, $b=\frac{f-g}{f+g}$, et on aura enfin

$$Z = \frac{1}{f+g}\int\frac{2Pd\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}.$$

Il convient que la variable φ qui remplace x croisse en même temps que x; c'est ce qui aura lieu si $q-p$ est positif; et comme nous avons $q-p=\frac{fg}{\beta\cos\lambda-\alpha\cos\theta}$, cette condition sera remplie en prenant pour $\beta\cos\lambda$ le plus grand des coefficiens $\beta\cos\lambda$, $\alpha\cos\theta$, afin que la différence $\beta\cos\lambda-\alpha\cos\theta$ soit positive.

Il restera à substituer dans P la valeur $x=\frac{p+q\sqrt{\frac{A}{B}}.\tang\varphi}{1+\sqrt{\frac{A}{B}}.\tang\varphi}$, et le résultat sera toujours de la forme $P=P'+P''\tang\varphi$, P' et P'' étant des fonctions rationnelles de $\tang^2\varphi$, ou de $\sin^2\varphi$; on aura donc

$$Z=\frac{1}{f+g}\int\frac{2P'd\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}+\frac{1}{f+g}\int\frac{2P''d\varphi\tang\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}.$$

La seconde partie deviendra rationnelle en faisant $1-c^2\sin^2\varphi=x^2$; quant à la première, elle dépend des fonctions elliptiques dont le module est c.

La solution précédente n'aurait pas lieu si on avait $\cos\theta=\beta\cos\lambda$; mais alors la substitution $x+\alpha\cos\theta=y$, suffirait pour faire disparaître le second terme dans chaque facteur de R^2, et la formule serait ramenée au cas IV de l'art. 6.

Il ne sera pas inutile d'ajouter ici un exemple numérique où l'on trouvera l'application de plusieurs de nos formules.

Exemple.

221. Soit proposé de trouver l'intégrale $Z=\int\frac{ydy}{\sqrt{[y(1+y)(2+y)(3+y)]}}$. En supposant d'abord y positif on fera $y=x^2$, ce qui donnera

$$Z=\int\frac{2x^2dx}{\sqrt{[(1+x^2)(2+x^2)(3+x^2)]}};$$

cette formule se rapporte au cas IV: faisant donc $\alpha^2=1$, $\beta^2=2$, $\gamma^2=3$, on aura $c^2=\frac{3}{4}$, $b^2=\frac{1}{4}$, $c=\sin 60^\circ$, $x^2=\frac{3\sin^2\varphi}{2-3\sin^2\varphi}$, et la transformée sera

$$Z=\int\frac{3\sin^2\varphi}{2-3\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}.$$

Il se rencontre ici une fonction de troisième espèce dont le paramètre est négatif et plus grand que l'unité; cette fonction devra donc être transformée par la formule de l'art. 52, et on aura

$$Z = \log\left(\frac{2\Delta + \tang\varphi}{2\Delta - \tang\varphi}\right) - \int\frac{d\varphi}{(1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi)\Delta}.$$

Dans cette nouvelle formule le paramètre $-\frac{1}{2}$ étant représenté par $-c^2 \sin^2\theta$, on a $\sin^2\theta = \frac{2}{3} = \frac{1}{1+b}$; donc $2F\theta = F^1c$. Donc par la formule du n° 55

$$\Pi\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{3}{2}F + \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{2\Delta - \sin\varphi\cos\varphi}{2\Delta + \sin\varphi\cos\varphi}\right).$$

Ainsi l'intégrale Z se réduit à une fonction de la première espèce, et on a simplement

$$Z = \log\left(\frac{2\Delta + \tang\varphi}{2\Delta - \tang\varphi}\right) + \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{2\Delta + \sin\varphi\cos\varphi}{2\Delta - \sin\varphi\cos\varphi}\right) - \tfrac{3}{2}F(c, \varphi).$$

Les limites de φ sont $\varphi = 0$, $\sin\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$; dans cette dernière limite qui répond à $x = \infty$, on a $2\Delta = \tang\varphi$; ainsi Z^1 est un infini logarithmique.

En second lieu supposons y négatif et soit $y = -x^2$, nous aurons

$$Z = \int\frac{2x^2dx}{\sqrt{[(x^2-1)(2-x^2)(3-x^2)]}};$$

dans cette intégrale il faut considérer deux parties, l'une depuis $x = 1$ jusqu'à $x = \sqrt{2}$, l'autre depuis $x = \sqrt{3}$ jusqu'à $x = \infty$.

Pour la première partie soit $x = \frac{1}{\cos\psi}$ et $\sin\psi = \sqrt{\frac{1}{2}}.\sin\varphi$, ou tout d'un coup $x^2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}$, la transformée sera, en faisant toujours $c^2 = \frac{3}{4}$,

$$Z = \int\frac{d\varphi}{(1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi)\sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}}.$$

Nous retombons ainsi sur la fonction de troisième espèce $\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)$ qui se ramène immédiatement à la première espèce, de sorte qu'on a

$$Z = \tfrac{3}{2}F(c, \varphi) + \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{2\Delta - \sin\varphi\cos\varphi}{2\Delta + \sin\varphi\cos\varphi}\right).$$

Cette intégrale s'étend depuis $x = 1$ jusqu'à $x = \sqrt{2}$, ou depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; dans cette dernière limite on aura l'intégrale complète $Z^1 = \frac{3}{2}F^1c$.

Considérons enfin la seconde partie de l'intégrale qui s'étend depuis $x = \sqrt{3}$ jusqu'à $x = \infty$; alors la quantité sous le radical étant.....

$(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)$, si on applique les formules du cas IX, on aura $c^2=\frac{3}{4}$, $x^2=\frac{3\cos^2\omega}{1-\frac{3}{2}\sin^2\omega}$, et l'intégrale cherchée

$$Z=\int\frac{6\cos^2\omega}{2-3\sin^2\omega}\cdot\frac{d\omega}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}}$$

ou
$$Z=2\int\frac{d\omega}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}}+\int\frac{1}{1-\frac{3}{2}\sin^2\omega}\cdot\frac{d\omega}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}}.$$

Par les réductions déjà indiquées on a

$$Z=3F-\Pi\left(-\tfrac{1}{2}\right)+\log.\frac{2\Delta+\tang\omega}{2\Delta-\tang\omega},$$

et enfin

$$Z=\tfrac{3}{2}F(c,\omega)+\log.\frac{2\Delta+\tang\omega}{2\Delta-\tang\omega}-\tfrac{1}{2}\log.\frac{2\Delta+\sin\omega\cos\omega}{2\Delta-\sin\omega\cos\omega}.$$

Cette formule s'étend depuis $\omega=0$ jusqu'à $\sin\omega=\sqrt{\frac{2}{3}}$, et dans cette dernière limite elle devient un infini logarithmique.

222. L'intégrale proposée se détermine comme on voit, dans ses différentes parties, par les seules fonctions de première espèce jointes à des quantités logarithmiques. Mais je remarque qu'il aurait été possible de trouver cette intégrale d'une manière beaucoup plus simple.

En effet si on écrit la formule proposée de cette manière

$$Z=\int\frac{ydy}{\sqrt{[(3y+y^2)(2+3y+y^2)]}},$$

on voit immédiatement que pour faire disparaître les puissances impaires de la variable sous le radical, il suffit de faire $y=\frac{1}{2}(x-3)$, ce qui donnera

$$Z=\int\frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{[(x^2-1)(x^2-9)]}}$$

ou

$$Z=\int\frac{xdx}{\sqrt{[(x^2-1)(x^2-9)]}}-\int\frac{3dx}{\sqrt{[(x^2-1)(x^2-9)]}}.$$

La première partie s'intègre par logarithmes, et la seconde par une fonction de première espèce, de sorte qu'on parviendra tout d'un coup au résultat que nous n'avons pu trouver par l'autre méthode qu'après plusieurs réductions.

Dans ces dernières formules il faudra considérer deux parties, l'une depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, l'autre depuis $x=3$ jusqu'à $x=\infty$.

Pour la première partie le radical sera $\sqrt{[(1-x^2)(9-x^2)]}$, et on aura d'abord

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{[(1-x^2)(9-x^2)]}}=-\log\left(\frac{\sqrt{(1-x^2)}+\sqrt{(9-x^2)}}{4}\right).$$

Pour avoir l'autre intégrale $\int \frac{3dx}{\sqrt{(1-x^2)}.\sqrt{(9-x^2)}}$, soit $x = \sin\varphi^0$, $c^0 = \frac{1}{3}$, la transformée sera $\int \frac{d\varphi^0}{\sqrt{(1-c^{02}\sin^2\varphi^0)}} = F(c^0, \varphi^0)$. Nous indiquons ici par c^0 le module de cette nouvelle fonction, parce qu'en partant du module $c = \frac{1}{8}\sqrt{3}$, dont le complément $b = \frac{1}{8}$, le terme suivant de l'échelle $c^0 = \frac{1-b}{1+b} = \frac{1}{3}$; on aura donc l'intégrale cherchée

$$Z = F(c^0, \varphi^0) - \log\left(\frac{\cos\varphi^0 + 3\Delta^0}{4}\right).$$

Cette intégrale s'étend depuis $\varphi^0 = 0$ jusqu'à $\varphi^0 = \frac{1}{2}\pi$, ainsi l'intégrale complète sera $Z^1 = F^1c^0 + \frac{1}{8}\log 2$. Cette même intégrale correspond à l'intégrale en y prise depuis $y = -\frac{3}{2}$ jusqu'à $y = -1$.

Venons enfin à la seconde partie de l'intégrale prise depuis $x = 3$ jusqu'à $x = \infty$, alors on aura

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)}.\sqrt{(x^2-9)}} = \log\left(\frac{\sqrt{(x^2-1)} + \sqrt{(x^2-9)}}{\sqrt{8}}\right).$$

Pour avoir la seconde intégrale $\int \frac{3dx}{\sqrt{(x^2-1)}.\sqrt{(x^2-9)}}$, soit $x = \frac{3}{\sin\psi}$, $c^0 = \frac{1}{3}$, elle deviendra $-\int \frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^{02}\sin^2\psi)}} = -F(c^0, \psi) + F^1c^0$; on aura donc l'intégrale totale

$$Z = \log\left(\frac{\sqrt{(x^2-1)} + \sqrt{(x^2-9)}}{\sqrt{8}}\right) + F(c^0, \psi) - F^1c^0.$$

Cette intégrale s'étend depuis $x = 3$ et $\psi = \frac{1}{2}\pi$, jusqu'à $x = \infty$ et $\psi = 0$. Elle devient donc encore un infini logarithmique dans la seconde limite.

Les expressions que nous avons trouvées par la première méthode sont moins simples que celles-ci; mais il n'y a pas de doute qu'elles ne donnent le même résultat pour l'intégrale prise entre deux valeurs données de y.

CHAPITRE XXXIV.

Sur le développement des fonctions elliptiques en séries.

223. Il peut être nécessaire dans plusieurs cas, surtout dans les problèmes de Mécanique, d'exprimer par la seule variable φ les fonctions elliptiques dont ces problèmes dépendent. Alors le développement se fera de la manière ordinaire, mais les méthodes précédentes serviront toujours à simplifier la détermination des coefficiens.

Considérons d'abord la fonction $F = \int \frac{d\varphi}{\Delta}$, et supposons

$$\frac{1}{\Delta} = A - 2A_1 \cos 2\varphi + 4A_2 \cos 4\varphi - 6A_3 \cos 6\varphi + \text{etc.},$$

il s'agit de déterminer les coefficiens A, A_1, A_2, etc. Pour cela soit $c^0 = \frac{1-b}{1+b}$, on aura

$$\Delta^2 = 1 - c^2 \sin^2 \varphi = \frac{(1 + c^0 e^{2\varphi\sqrt{-1}})(1 + c^0 e^{-2\varphi\sqrt{-1}})}{(1+c^0)^2},$$

donc si on fait

$$P = 1 - \tfrac{1}{2} c^0 e^{2\varphi\sqrt{-1}} + \frac{1.3}{2.4} c^{02} e^{4\varphi\sqrt{-1}} - \frac{1.3.5}{2.4.6} c^{03} e^{6\varphi\sqrt{-1}} + \text{etc.},$$

$$Q = 1 - \tfrac{1}{2} c^0 e^{-2\varphi\sqrt{-1}} + \frac{1.3}{2.4} c^{02} e^{-4\varphi\sqrt{-1}} - \frac{1.3.5}{2.4.6} c^{03} e^{-6\varphi\sqrt{-1}} + \text{etc.},$$

on aura $\frac{1}{\Delta} = (1 + c^0) PQ$. Tout se réduit donc à multiplier entre elles les deux séries précédentes, pour former successivement le terme constant et ceux qui contiennent $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi$, $\cos 6\varphi$, etc. On trouvera ainsi, pour les coefficiens cherchés, les valeurs suivantes dont la loi est facile à saisir :

$$A = (1 + c^0)\left(1 + (\tfrac{1}{2})^2 c^{02} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 c^{04} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 c^{06} + \text{etc.}\right),$$

$$A_1 = \frac{1+c^0}{1}\left(\tfrac{1}{2} c^0 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1.3}{2.4} c^{03} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} c^{05} + \text{etc.}\right),$$

$$A_2 = \frac{1+c^0}{2}\left(\frac{1.3}{2.4}c^{0_2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}c^{0_4} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}c^{0_6} + \text{etc.}\right),$$

$$A_3 = \frac{1+c^0}{3}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}c^{0_3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}c^{0_5} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}c^{0_7} + \text{etc.}\right),$$

$$A_4 = \frac{1+c^0}{4}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}c^{0_4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5..9}{2.4.6..10}c^{0_6} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3\ 5..11}{2.4.6..12}c^{0_8} + \text{etc.}\right),$$

etc.

De là on voit que la suite A, A_1, $2A_2$, $3A_3$, $4A_4$, etc., décroît continuellement de manière que le rapport d'un terme au précédent, approche de plus en plus de la limite c^0, le décroissement étant plus rapide dans le commencement de la suite. On voit aussi qu'en appelant N le coefficient $\frac{1.3.5..2n-1}{2.4.6..\ 2n}$, la valeur du coefficient A_n sera toujours comprise entre $\frac{1+c^0}{n}Nc^{0_n}$ et $\frac{1+c^0}{n}\cdot\frac{Nc^{0_n}}{b^0}$.

L'usage des séries précédentes sera d'autant plus avantageux que le module secondaire c^0 sera plus petit; et comme la valeur $c^0 = \frac{1}{2}$, répond à un module primitif $c = \frac{2}{3}\sqrt{2} = 0.9428$; on pourra, tant que c ne surpassera pas cette limite, employer ces mêmes séries pour calculer les valeurs des coefficiens. Mais si c était plus grand que la limite qui vient d'être fixée, alors c^0 devenant plus grand que $\frac{1}{2}$, les suites seraient peu convergentes; voici dans ce cas le moyen qu'il conviendrait de prendre pour calculer les coefficiens.

224. Si on multiplie successivement les deux membres de l'équation supposée par $d\varphi$, $d\varphi\cos 2\varphi$, $d\varphi\cos 4\varphi$, et qu'on prenne de part et d'autre l'intégrale depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on aura

$$A.\frac{\pi}{2} = \int\frac{d\varphi}{\Delta},\ A_1\frac{\pi}{2} = \int\frac{-d\varphi\cos 2\varphi}{\Delta},\ 2A_2.\frac{\pi}{2} = \int\frac{d\varphi\cos 4\varphi}{\Delta},\ \text{etc.}$$

Ainsi chaque coefficient peut se déterminer en particulier par une intégrale définie, et toutes ces intégrales ne dépendent que des fonctions complètes F^1, E^1, qu'on sait évaluer dans tous les cas, avec la précision nécessaire.

Les deux premiers A et A_1 sont ceux qu'il importe de déterminer le plus exactement; ils se trouvent par les formules $\frac{\pi}{2}A = F^1c$, et $\frac{\pi}{2}A_1 = \frac{2}{c^2}(F^1c - E^1c) - F^1c$; et si on substitue pour F^1 et E^1 leurs valeurs données (n°s 69 et 90), on aura

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{b}\, b^{\circ}.b^{\circ\circ}.b^{\circ\circ\circ}.\text{ etc.}\right)},$$

$$A_1 = A\left(\frac{c^{\circ}}{2} + \frac{c^{\circ}c^{\circ\circ}}{4} + \frac{c^{\circ}c^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ}}{8} + \text{etc.}\right).$$

Ces deux premiers coefficiens étant trouvés, on pourrait en déduire tous les autres. Car en différenciant l'équation $\frac{1}{\Delta} = A - 2A_1\cos 2\varphi + \cos 4A_2\cos 4\varphi - \text{etc.}$, on en tire

$$\frac{c^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta^3} = 4A_2 \sin 2\varphi - 16A_3 \sin 4\varphi + 36A_4 \sin 6\varphi - \text{etc.}$$

Multipliant le premier membre par $\frac{2\Delta^2}{c^2}$ et le second par la quantité équivalente $\frac{2}{c^2} - 1 + \cos 2\varphi$; comparant ensuite le résultat avec l'équation proposée multipliée par $\sin 2\varphi$, on trouvera les équations suivantes entre trois coefficiens consécutifs

$$2.3A_2 = 4A_1\left(\frac{2}{c^2} - 1\right) - A,$$

$$3.5A_3 = 16A_2\left(\frac{2}{c^2} - 1\right) - 1.3A_2,$$

$$4.7A_4 = 36A_3\left(\frac{2}{c^2} - 1\right) - 2.5A_3,$$

$$5.9A_5 = 64A_4\left(\frac{2}{c^2} - 1\right) - 3.7A_3,$$

etc.

En général A_n désignant le $n^{ième}$ terme de la suite A_1, A_2, A_3, etc., on aura

$$n(2n-1)A_n = (2n-2)^2 A_{n-1}\left(\frac{2}{c^2} - 1\right) - (n-2)(2n-3)A_{n-2};$$

c'est la loi suivant laquelle chaque coefficient, à compter de A_3, se déduit des deux précédens. Le coefficient A_2 excepté de la loi générale, se détermine par l'équation $6A_2 = 4A_1\left(\frac{2}{c^2} - 1\right) - A$, ou directement par la formule

$$\frac{6A_2}{A} = c^{\circ\circ} + (1 + c^{\circ\circ})\left(\frac{c^{\circ\circ}}{2} + \frac{c^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ}}{4} + \frac{c^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ}c^{\circ\circ\circ\circ}}{8} + \text{etc.}\right).$$

Lorsque c sera très peu différent de l'unité, on déterminera E^1 et F^1 par les formules qui conviennent à ce cas, et on trouvera les coefficiens A et A_1 par les formules $\frac{\pi}{2}A = F^1$, $\frac{\pi}{2}A_1 = \frac{2}{c^2}(F^1 - E^1) - F^1$; on calculera ensuite A_2 par l'équation $6A_2 = 4A_1\left(\frac{2}{c^2} - 1\right) - A$; les autres se déduiront

chacun des deux précédens par la loi générale que nous avons exposée, laquelle donnera des résultats d'autant plus exacts que c différera moins de l'unité. Mais l'usage de ces formules n'est plus aussi sûr lorsque c se rapproche de la limite 0, parce que le facteur $\frac{2}{c^2} - 1$ qui devient de plus en plus grand, donne lieu aux erreurs de s'accumuler et de rendre de plus en plus fautive la détermination des coefficiens. Nous donnerons par la suite les moyens d'obvier à cet inconvénient, il suffit pour le présent de remarquer qu'on évite toute difficulté par l'usage des séries données ci-dessus.

225. Ayant calculé jusqu'à la limite convenable les coefficiens A, A_1, A_2, etc., on aura l'expression générale de la fonction F, savoir :

$$F = A\varphi - A_1 \sin 2\varphi + A_2 \sin 4\varphi - A_3 \sin 6\varphi + \text{etc.}$$

Pour avoir semblablement l'expression de la fonction E, soit

$$E = B\varphi + B_1 \sin 2\varphi - B_2 \sin 4\varphi + B_3 \sin 6\varphi - \text{etc.},$$

on aura en différenciant chaque membre,

$$\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)} = B + 2B_1 \cos 2\varphi - 4B_2 \cos 4\varphi + 6B_3 \cos 6\varphi - \text{etc.}$$

Différenciant de nouveau, il vient

$$\frac{c^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}} = 2^2 B_1 \sin 2\varphi - 4^2 B_2 \sin 4\varphi + 6^2 B_3 \sin 6\varphi - \text{etc.}$$

Le premier membre a aussi pour expression,

$$\tfrac{1}{2} c^2 \sin 2\varphi (A - 2A_1 \cos 2\varphi + 4A_2 \cos 4\varphi - 6A_3 \cos 6\varphi + \text{etc.}),$$

ou, en faisant le développement,

$$\tfrac{1}{2} c^2 \left\{ \begin{array}{llll} A \sin 2\varphi - & A_1 \sin 4\varphi + & 2A_2 \sin 6\varphi - & 3A_3 \sin 8\varphi + \text{etc.} \\ -2A_2 & +3A_3 & -4A_4 & +5A_5 \end{array} \right\}.$$

Donc en comparant ces deux expressions, on aura

$$B_1 = \frac{c^2}{8}(A - 2A_2),$$

$$2^2 B_2 = \frac{c^2}{8}(A_1 - 3A_3),$$

$$3^2 B_3 = \frac{c^2}{8}(2A_2 - 4A_4),$$

$$4^2 B_4 = \frac{c^2}{8}(3A_3 - 5A_5),$$

etc.

A l'égard du premier terme B, il se déduit immédiatement de la valeur connue de E^1, puisqu'on a $E^1 = B\frac{1}{2}\pi$.

Ainsi on a en quelque sorte par un même calcul la suite des coefficiens A et celle des coefficiens B, ce qui permet de développer aussi loin qu'on voudra les fonctions E et F, ordonnées suivant les sinus des multiples pairs de l'amplitude φ.

226. Si on veut développer semblablement la fonction de troisième espèce $\Pi = \int \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta}$, on supposera

$$\Pi = M\varphi - M_1 \sin 2\varphi + M_2 \sin 4\varphi - M_3 \sin 6\varphi + \text{etc.},$$

et on aura pour déterminer les coefficiens M, M_1, etc., l'équation

$$\frac{1}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta} = M - 2M_1 \cos 2\varphi + 4M_2 \cos 4\varphi - 6M_3 \cos 6\varphi + \text{etc.}$$

Si on fait $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on aura $\Pi^1(n, c) = M.\frac{1}{2}\pi$, ainsi le coefficient M est déterminé par la fonction complète $\Pi^1(n, c)$ dont on connaît la valeur en fonctions de la première et de la seconde espèce. On pourrait de même déterminer les autres coefficiens par les intégrales suivantes prises depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$:

$$M_1 = \frac{2}{\pi}\int \frac{-d\varphi \cos 2\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta},\ 2M_2 = \frac{2}{\pi}\int \frac{d\varphi \cos 4\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta},\ 3M_3 = \frac{2}{\pi}\int \frac{-d\varphi \cos 6\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta}, \text{etc.}$$

Mais quoique ces intégrales puissent aussi être exprimées au moyen des fonctions de la première et de la seconde espèce, elles ne peuvent guères être utiles dans la pratique, à cause de leur complication toujours croissante, et parce qu'elles contiennent comme diviseurs, des puissances de plus en plus élevées du paramètre n qui peut être très petit. Il faut donc avoir recours à d'autres moyens.

Observons d'abord qu'en faisant $\alpha = \frac{\sqrt{(1+n)}-1}{\sqrt{(1+n)}+1}$, on a l'équation

$$\frac{\sqrt{(1+n)}}{1+n\sin^2\varphi} = 1 + 2\alpha \cos 2\varphi + 2\alpha^2 \cos 4\varphi + 2\alpha^3 \cos 6\varphi + \text{etc.}$$

D'un autre côté on est censé connaître les coefficiens A, A_1, A_2, A_3, etc., qui satisfont à l'équation

$$\frac{1}{\Delta} = A - 2A_1 \cos 2\varphi + 4A_2 \cos 4\varphi - 6A_3 \cos 6\varphi + \text{etc.};$$

il ne s'agit donc que de multiplier les seconds membres de ces équations et d'égaler le produit à la suite

$$k\,(\mathrm{M} - 2\mathrm{M}_1 \cos 2\varphi + 4\mathrm{M}_2 \cos 4\varphi - 6\mathrm{M}_3 \cos 6\varphi + \text{etc.}),$$

dans laquelle $k = \sqrt{(1+n)}$. Ce produit convenablement disposé donnera les valeurs suivantes des coefficiens que l'on cherche

$$\begin{aligned}
k\mathrm{M} &= \mathrm{A} - 2\alpha\mathrm{A}_1 + 4\alpha^2\mathrm{A}_2 - 6\alpha^3\mathrm{A}_3 + 8\alpha^4\mathrm{A}_4 - \text{etc.},\\
-2k\mathrm{M}_1 &= \begin{cases}\alpha\,(k\mathrm{M}+\mathrm{A})\\ -2\mathrm{A}_1 + 4\alpha\mathrm{A}_2 - 6\alpha^2\mathrm{A}_3 + 8\alpha^3\mathrm{A}_4 - \text{etc.},\end{cases}\\
4k\mathrm{M}_2 &= \begin{cases}\alpha^2\,(k\mathrm{M}+\mathrm{A}) - 2\alpha\mathrm{A}_1\\ +4\mathrm{A}_2 - 6\alpha\mathrm{A}_3 + 8\alpha^2\mathrm{A}_4 - 10\,\alpha^3\mathrm{A}_5 + \text{etc.},\end{cases}\\
-6k\mathrm{M}_3 &= \begin{cases}\alpha^3\,(k\mathrm{M}+\mathrm{A}) - 2\alpha^2\mathrm{A}_1 + 4\alpha\mathrm{A}_2\\ -6\mathrm{A}_3 + 8\alpha\mathrm{A}_4 - 10\,\alpha^2\mathrm{A}_5 + \text{etc.},\end{cases}\\
8k\mathrm{M}_4 &= \begin{cases}\alpha^4\,(k\mathrm{M}+\mathrm{A}) - 2\alpha^3\mathrm{A}_1 + 4\alpha^2\mathrm{A}_2 - 6\alpha\mathrm{A}_3\\ +8\mathrm{A}_4 - 10\,\alpha\mathrm{A}_5 + 12\,\alpha^2\mathrm{A}_6 - \text{etc.},\end{cases}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

La loi de ces expressions est très facile à saisir; d'ailleurs connaissant déjà les coefficiens A, et la constante α étant toujours une fraction assez petite, il est clair qu'on pourra prolonger indéfiniment le calcul des coefficiens M, sans craindre de multiplier les erreurs; avantage qu'on ne pourrait peut-être obtenir par aucune autre méthode. On aura donc avec toute la précision nécessaire le développement de la fonction Π.

227. *Remarque.* La forme sous laquelle nous avons mis ci-dessus (223) la valeur de Δ^2, conduit immédiatement à cette formule

$$\log\frac{1}{\Delta} = \log(1+c^0) - c^0\cos 2\varphi + \tfrac{1}{2}c^{0\,2}\cos 4\varphi - \tfrac{1}{3}c^{0\,3}\cos 6\varphi + \text{etc.}$$

Il en résulte que n étant un entier quelconque, l'intégrale $\int d\varphi \cos 2n\varphi \log\frac{1}{\Delta}$, prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, a pour valeur

$$\int d\varphi \cos 2n\varphi \log\frac{1}{\Delta} = \frac{\pi}{4n}(-c^0)^n.$$

Le cas de $n = 0$ ferait exception, mais il se résout directement par la formule

$$\int d\varphi \log\frac{1}{\Delta} = \frac{\pi}{2}\log(1+c^0);$$

et parce que les puissances paires $\sin^{2n}\varphi$, $\cos^{2n}\varphi$, peuvent se développer en cosinus des multiples de 2φ, on aura aussi les intégrales suivantes prises entre les mêmes limites :

$$\int d\varphi \cos^2\varphi \log\frac{1}{\Delta} = \frac{\pi}{4}\left[\log(1+c^0) - \frac{c^0}{2}\right],$$

$$\int d\varphi \sin^2\varphi \log\frac{1}{\Delta} = \frac{\pi}{4}\left[\log(1+c^0) + \frac{c^0}{2}\right],$$

$$\int d\varphi \cos^4\varphi \log\frac{1}{\Delta} = \frac{\pi}{16}\left[3\log(1+c^0) - 4\frac{c^0}{2} + \frac{c^{02}}{4}\right],$$

$$\int d\varphi \sin^4\varphi \log\frac{1}{\Delta} = \frac{\pi}{16}\left[3\log(1+c^0) + 4\frac{c^0}{2} + \frac{c^{02}}{4}\right],$$

$$\int d\varphi \cos^6\varphi \log\frac{1}{\Delta} = \frac{\pi}{64}\left[10\log(1+c^0) - 15\frac{c^0}{2} + 6\frac{c^{02}}{4} - \frac{c^{03}}{6}\right],$$

$$\int d\varphi \sin^6\varphi \log\frac{1}{\Delta} = \frac{\pi}{64}\left[10\log(1+c^0) + 15\frac{c^0}{2} + 6\frac{c^{02}}{4} + \frac{c^{03}}{6}\right].$$

etc.

On trouverait de même la valeur de l'intégrale $\int d\varphi \sin^{2n}\varphi \cos^{2m}\varphi \log\frac{1}{\Delta}$.

CHAPITRE XXXV.

Sur diverses suites d'intégrales définies, dont les valeurs peuvent être assignées par les fonctions elliptiques.

Les formules que nous avons rassemblées dans ce chapitre étant très nombreuses, nous avons cru devoir, pour plus de clarté, les ranger dans une table générale divisée en seize cases qui forment autant de tables particulières. Par cette disposition on aura l'avantage de saisir d'un coup-d'œil l'ensemble des résultats et de retrouver plus facilement les formules dont on pourrait avoir besoin.

CASE I.

228. D'après les dénominations rapportées en tête de la case, si on fait $\sin^2\omega = \sin^2\alpha\cos^2\varphi + \sin^2\beta\sin^2\varphi$, on aura généralement

$$\int \frac{d\omega \cos\omega \sin^{2n+1}\omega}{MN} = \int d\varphi\,(\sin^2\alpha\cos^2\varphi + \sin^2\beta\sin^2\varphi)^n.$$

Mettant le second membre sous la forme $\sin^{2n}\beta\int d\varphi\,(1 - k\cos^2\varphi)^n$, dévelop-

pant le binome et intégrant chaque terme par les formules connues, depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on aura pour résultat

$$\int \frac{d\omega \cos\omega \sin^{2n+1}\omega}{MN} = \frac{\pi}{2} \sin^{2n}\beta \left(1 - nk.\tfrac{1}{2} + \frac{n.n-1}{2} k^2 . \frac{1.3}{2.4} - \text{etc.}\right).$$

Le second membre pourrait encore être mis sous la forme $\frac{\pi}{2} X^n$, X^n étant le coefficient de x^n dans le développement du produit..... $(1 - x\sin^2\alpha)^{-\frac{1}{2}} (1 - x\sin^2\beta)^{-\frac{1}{2}}$.

La même substitution donnerait

$$\int \frac{d\omega \cos\omega}{MN \sin^{2n+1}\omega} = \int \frac{d\varphi}{(\sin^2\alpha \cos^2\varphi + \sin^2\beta \sin^2\varphi)^{n+1}};$$

mais cette formule peut être mise sous une forme plus simple et débarrassée de fractions. Il suffit pour cela de faire directement

$$\sin^2\omega = \frac{\sin^2\alpha \sin^2\beta}{\sin^2\alpha \cos^2\varphi + \sin^2\beta \sin^2\varphi},$$

et on obtient

$$\int \frac{d\omega \cos\omega}{MN \sin^{2n+1}\omega} = \frac{1}{\sin^{2n+1}\alpha \sin^{2n+1}\beta} \int d\varphi \, (\sin^2\alpha \cos^2\varphi + \sin^2\beta \sin^2\varphi)^n,$$

l'intégrale en φ devant encore être prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. On a donc généralement, quel que soit n, cette formule remarquable,

$$\int \frac{d\omega \cos\omega}{MN \sin^{2n+1}\omega} = \frac{1}{\sin^{2n+1}\alpha \sin^{2n+1}\beta} \cdot \int \frac{d\omega \cos\omega \sin^{2n+1}\omega}{MN}.$$

CASE II.

229. Les formules de cette case sont entièrement semblables à celles de la case I, ce qu'on peut voir d'ailleurs *a priori*, en mettant M et N sous la forme $M = \sqrt{(\cos^2\alpha - \cos^2\omega)}$, $N = \sqrt{(\cos^2\omega - \cos^2\beta)}$.

CASE III.

230. Cette case contient six formules générales fort remarquables, surtout dans les premiers cas, qui offrent des résultats très simples et très élégans. Et d'abord la substitution

$$\sin^2\omega = \frac{\sin^2\alpha \sin^2\beta}{\sin^2\alpha \cos^2\varphi + \sin^2\beta \sin^2\varphi},$$

donne immédiatement pour la formule $A^{2n} = \int \frac{MN\, d\omega \cos\omega}{\sin^{2n+1}\omega}$, cette trans-

formée

$$\frac{(\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha)^2}{\sin^{2n-1} \alpha \sin^{2n-1} \beta} \int d\varphi \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, (\sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \sin^2 \beta \sin^2 \varphi)^{n-2},$$

où l'intégrale doit être prise de $\varphi = 0$ à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Mettant le binome sous la forme $\sin^{2n-4} \beta \, (1 - k \cos^2 \varphi)^{n-2}$; développant la puissance et effectuant l'intégration de chaque terme entre les limites données, on a la valeur de A^{2n} insérée dans la case III.

De cette valeur se déduit l'intégrale B^{2n}, par le seul changement de $\sin \alpha$ en $\cos \beta$ et de $\sin \beta$ en $\cos \alpha$.

Par la substitution $\sin^2 \omega = \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \sin^2 \beta \sin^2 \varphi$, l'intégrale $\int MN d\omega \cos \omega \sin^{2n-3} \omega$, désignée par C^{2n}, prend la forme

$$C^{2n} = (\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha)^2 \int d\varphi \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, (\sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \sin^2 \beta \sin^2 \varphi)^{n-2},$$

de sorte qu'on a en général

$$C^{2n} = \sin^{2n-1} \alpha \sin^{2n-1} \beta . A^{2n}.$$

A l'égard des intégrales désignées par D^{2n}, K^{2n}, H^{2n}, il est aisé de vérifier immédiatement, sans transformations, les équations

$$D^{2n} = D^{2n-2} + A^{2n}, \quad K^{2n} = K^{2n-2} + B^{2n}, \quad H^{2n} = H^{2n-2} - C^{2n};$$

ainsi tout se réduit à connaître la valeur de D^0, qui est la même que celle de K^0 et de H^0; or on trouve aisément $D^0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos(\beta - \alpha)$.

Si on proposait de trouver une intégrale telle que

$$\int \frac{MN d\omega}{\sin^{2n} \omega \cos^{2m} \omega} \text{ ou } \int \frac{MN d\omega}{\sin^{2n+1} \omega \cos^{2m+1} \omega},$$

il faudrait simplifier son dénominateur par des opérations successives, au moyen de la formule $\frac{1}{\sin^2 \omega \cos^2 \omega} = \frac{1}{\sin^2 \omega} + \frac{1}{\cos^2 \omega}$. Soit, par exemple, l'intégrale $P = \int \frac{MN d\omega}{\sin^3 \omega \cos^5 \omega}$: on aura par deux applications de cette formule

$$\int \frac{MN d\omega}{\sin^3 \omega \cos^5 \omega} = \int \frac{MN d\omega}{\sin \omega \cos^5 \omega} + \int \frac{MN d\omega}{\sin \omega \cos^3 \omega} + \int \frac{MN d\omega}{\sin^3 \omega \cos \omega},$$

ou en d'autres termes, $P = K^4 + K^2 + D^2$.

Nota. Les résultats contenus dans ces trois premières cases sont exprimés en quantités purement algébriques, et ils n'appartiennent proprement à ce chapitre que parce que leur usage devient nécessaire dans quelques-unes des cases suivantes.

CASES IV et V.

231. Si l'on fait $\sin^2\omega = \frac{\sin^2\alpha \sin^2\beta}{\sin^2\beta \cos^2\varphi + \sin^2\alpha \sin^2\varphi}$, $c^2 = 1 - \frac{\tang^2\alpha}{\tang^2\beta}$, ou $c = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$, γ étant un angle auxiliaire tel que $\cos\gamma = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, on aura en général

$$\int \frac{d\omega}{MN \sin^{2n}\omega} = \frac{1}{\cos\alpha \sin\beta} \int \frac{d\varphi}{\Delta} (1 + \Delta^2 \cot^2\alpha)^n.$$

L'intégrale en φ devant être prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on voit que cette intégrale pourra toujours s'exprimer par les fonctions elliptiques complètes $F^1(c)$, $E^1(c)$, au moyen de la formule de réduction que nous avons rapportée.

La formule générale de la case V se déduit de celle de la case IV, en mettant $\frac{1}{2}\pi - \beta$ au lieu de α, et $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ au lieu de β, ce qui ne change point la valeur du module c, ni par conséquent celles des fonctions complètes $F^1(c)$, $E^1(c)$.

Les formules de ces deux cases serviront à trouver en général la valeur des intégrales $\int \frac{d\omega}{MN} \tang^{2n}\omega$, $\int \frac{d\omega}{MN} \cot^{2n}\omega$ et aussi celle de l'intégrale..... $\int \frac{d\omega}{MN \sin^{2n}\omega \cos^{2m}\omega}$, puisque ces diverses intégrales peuvent être décomposées en une suite finie de termes compris dans les cases IV et V.

CASE VI.

232. La même substitution dont on a fait usage dans les deux cases précédentes donne la formule

$$\int \frac{d\omega \sin^{2n}\omega}{MN} = \frac{\sin^{2n}\alpha}{\cos\alpha \sin\beta} \int \frac{d\varphi}{(1 - c^2 \cos^2\alpha \sin^2\varphi)^n \Delta},$$

intégrale qui doit toujours être prise entre les limites $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Cette intégrale peut en général s'exprimer par les fonctions complètes $F^1(c)$, $E^1(c)$, $\Pi^1(-c^2\cos^2\alpha, c)$, au moyen de la formule de réduction rapportée dans la case VI, formule qui est déduite de celle de l'article 9. On peut aussi substituer à la fonction de troisième espèce Π^1, sa valeur en fonctions de la première et de la deuxième espèce, donnée par la formule du n° 116; cette valeur est (en supprimant le module c commun à ces fonctions)

$$\Pi^1(-c^2\cos^2\alpha) = F^1 + \frac{\cos\alpha \sin\beta}{\sin^2\alpha} [F^1 E(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) - E^1 F(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha)].$$

Si on observe ensuite que d'après l'équation $1 = b \tang (\frac{1}{2}\pi - \alpha) \tang \theta$, on a (n° 60)

$$F(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) = F^1 - F(\theta)$$
$$E(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) = E^1 - E(\theta) + c^2 \cos\alpha \sin\theta,$$

la valeur de Π^1 pourra s'exprimer ainsi :

$$\Pi^1(-c^2\cos^2\alpha) = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\alpha}F^1 + \frac{\sin\theta\cos\alpha}{\sin^2\alpha}[E^1F(\theta) - F^1E(\theta)];$$

de sorte que les intégrales de la case VI ne dépendront que des fonctions F^1, E^1, $F(\theta)$, $E(\theta)$.

233. Le cas de $\alpha = 0$ mérite d'être développé. Alors on a immédiatement

$$\int\frac{d\omega \sin^2\omega}{MN} = \int\frac{d\omega \sin\omega}{\sqrt{(\cos^2\omega - \cos^2\theta)}}.$$

Soit $\cos\omega = \frac{\cos\theta}{\cos\varphi}$, on aura la transformée $\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right)$, dans laquelle il faut faire $\varphi = \theta$, ce qui donnera

$$\int\frac{d\omega \sin\omega}{\sqrt{(\sin^2\theta - \sin^2\omega)}} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right).$$

Ce résultat se déduit également de la formule générale

$$\int\frac{d\omega \sin^2\omega}{MN} = \frac{\sin\theta}{\cos\alpha}F^1 + E^1F(\theta) - F^1E(\theta);$$

mais pour cela, au lieu de faire $\alpha = 0$, nous ferons $\alpha = \varepsilon$, ε désignant un arc infiniment petit. On aura alors $c^2 = 1 - \varepsilon^2\cot^2\theta$, $b = \varepsilon\cot\theta$,

$$F^1 = \mathcal{L}\frac{4}{b}, \qquad \frac{\sin\theta}{\cos\alpha} = \sin\theta\,(1 + \tfrac{1}{2}b^2\tang^2\theta),$$
$$E(\theta) = \sin\theta + \frac{b^2}{4}\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right) - \frac{b^2}{2}\sin\theta.$$

De là on voit que $\left[\frac{\sin\theta}{\cos\alpha} - E(\theta)\right]F^1$ s'évanouit lorsqu'on fait $b = 0$; on a en même temps $E^1 = 1$ et $F(\theta) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)$. Ainsi le second membre de l'équation précédente se réduit à $\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)$, ce qui est le résultat déjà trouvé.

234. Lorsque α est égal à la quantité infiniment petite ε, la fonction $\Pi^1(-c^2\cos^2\alpha)$ représente l'intégrale

$$\int\frac{d\varphi}{\left(\cos^2\varphi + \frac{\varepsilon^2}{\sin^2\theta}\sin^2\varphi\right)\sqrt{(\cos^2\varphi + \varepsilon^2\cot^2\theta\sin^2\varphi)}},$$

prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. On voit donc que cette intégrale se réduit dans ce cas à $\frac{\sin \beta}{2\varepsilon^2} \mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}\right)$, formule qu'il serait assez difficile de vérifier par l'intégration directe.

Ce résultat suppose que β n'est pas lui-même infiniment petit; car si β était infiniment petit de l'ordre α, on aurait $c^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}$, $b = \frac{\alpha}{\beta}$, ... $E(\beta) = F(\beta) = \beta$, et la formule générale donnerait

$$\int \frac{d\omega \sin^2 \omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)} \cdot \sqrt{(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \beta E^1(c).$$

C'est ce qu'il est facile de vérifier par l'intégration directe. En effet, puisque α et β sont infiniment petits, la variable ω, toujours comprise entre ces deux quantités, est aussi infiniment petite; ainsi l'intégrale dont il s'agit est la même que

$$\int \frac{\omega^2 d\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \alpha^2)} \cdot \sqrt{(\beta^2 - \omega^2)}}.$$

Soit $\omega^2 = \alpha^2 \sin^2\varphi + \beta^2 \cos^2\varphi$, et $c^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}$; cette intégrale devient $\int \beta d\varphi \sqrt{(1 - c^2 \sin^2\varphi)}$, ou $\beta E(c, \varphi)$, dans laquelle faisant $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on a pour résultat $\beta E^1(c)$.

CASE VII.

235. Considérons la double intégrale

$$Z = \iint \frac{dp\,dq \sin p}{\cos^2 p + \cos^2\alpha \sin^2 p \cos^2 q + \cos^2\beta \sin^2 p \sin^2 q},$$

dans laquelle les limites de p, ainsi que celles de q doivent être 0 et $\frac{1}{2}\pi$.

Si l'on intègre d'abord par rapport à q, on aura

$$Z = \frac{\pi}{2} \int \frac{dp \sin p}{\sqrt{(\cos^2 p + \cos^2\alpha \sin^2 p)} \cdot \sqrt{(\cos^2 p + \cos^2\beta \sin^2 p)}}.$$

Soit $\beta > \alpha$, et $\cos p = \cot\beta \operatorname{tang}\varphi$; si l'on fait $c^2 = 1 - \frac{\operatorname{tang}^2\alpha}{\operatorname{tang}^2\beta}$, on aura la transformée

$$Z = \frac{\pi}{2\cos\alpha \sin\beta} \int \frac{d\varphi}{\Delta},$$

laquelle doit être intégrée entre les limites $\varphi = 0$, $\varphi = \beta$; on aura donc

$$Z = \frac{\pi}{2\cos\alpha \sin\beta} F(c, \beta).$$

Faisons maintenant les intégrations dans un ordre inverse, et soit

pour cet effet $\cos p = x$, $\cos^2 \alpha \cos^2 q + \cos^2 \beta \sin^2 q = \cos^2 \omega$; nous aurons d'abord à intégrer, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, la différentielle

$$\frac{dx}{x^2 + (1 - x^2)\cos^2 \omega} \text{ ou } \frac{dx}{\cos^2 \omega + x^2 \sin^2 \omega}.$$

L'intégrale est en général $\frac{1}{\sin \omega \cos \omega}$ arc tang $(x \tang \omega)$, et en faisant $x = 1$, elle se réduit à $\frac{\omega}{\sin \omega \cos \omega}$; on a donc

$$Z = \int \frac{\omega dq}{\sin \omega \cos \omega}.$$

Mais d'après l'équation $\cos^2 \omega = \cos^2 \alpha \cos^2 q + \cos^2 \beta \sin^2 q$, on trouve successivement

$$(\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta)\, dq \sin q \cos q = d\omega \sin \omega \cos \omega,$$
$$\sin q \,.\, \sqrt{(\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta)} = \sqrt{(\sin^2 \omega - \sin^2 \alpha)},$$
$$\cos q \,.\, \sqrt{(\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta)} = \sqrt{(\sin^2 \beta - \sin^2 \omega)},$$
$$dq = \frac{d\omega \sin \omega \cos \omega}{\sqrt{(\sin^2 \omega - \sin^2 \alpha)} \,.\, \sqrt{(\sin^2 \beta - \sin^2 \omega)}}.$$

Donc enfin on a

$$Z = \int \frac{\omega d\omega}{\sqrt{(\sin^2 \omega - \sin^2 \alpha)} \,.\, \sqrt{(\sin^2 \beta - \sin^2 \omega)}},$$

les limites de l'intégrale étant $\omega = \alpha$, $\omega = \beta$.

Comparant ces deux valeurs de Z, on a la formule remarquable

$$\int \frac{\omega d\omega}{\sqrt{(\sin^2 \omega - \sin^2 \alpha)} \,.\, \sqrt{(\sin^2 \beta - \sin^2 \omega)}} = \frac{\pi}{2 \cos \alpha \sin \beta} F(o, \beta),$$

c'est la première de la case VII.

236. Considérons maintenant la double intégrale

$$T = \iint \frac{dp dq \sin p \cos^2 p}{\cos^2 p + \cos^2 \alpha \sin^2 p \cos^2 q + \cos^2 \beta \sin^2 p \sin^2 q},$$

qui aura également pour limites $p = 0$, $p = \frac{1}{2}\pi$; $q = 0$, $q = \frac{1}{2}\pi$.

Si on intègre d'abord par rapport à q, on aura

$$T = \frac{\pi}{2} \int \frac{dp \sin p \cos^2 p}{\sqrt{(\cos^2 p + \cos^2 \alpha \sin^2 p)} \,.\, \sqrt{(\cos^2 p + \cos^2 \beta \sin^2 p)}}.$$

Soit toujours $\beta > \alpha$ et $\cos p = \cot \beta \tang \varphi$; on aura la transformée

$$T = \frac{\pi}{2} \,.\, \frac{\cot^2 \beta}{\cos \alpha \sin \beta} \int \frac{d\varphi \tang^2 \varphi}{\Delta},$$

d'où résulte, après avoir fait $\varphi = \beta$,

$$T = \frac{\pi \cos\alpha}{2\sin^2\alpha \sin\beta}\left[\frac{\sin\beta}{\cos\alpha} - E(c, \beta)\right].$$

Revenons maintenant à la double intégrale, et faisons comme ci-dessus, $\cos p = x$, $\cos^2\alpha \cos^2 q + \cos^2\beta \sin^2 q = \cos^2\omega$, nous aurons d'abord à intégrer depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, la différentielle

$$\frac{x^2 dx}{\cos^2\omega + x^2 \sin^2\omega}.$$

L'intégrale de celle-ci est

$$\frac{x}{\sin^2\omega} - \frac{\cot\omega}{\sin^2\omega} \text{ arc tang}(x \text{ tang } \omega).$$

Faisant $x = 1$, cette quantité se réduit à $\frac{1 - \omega\cot\omega}{\sin^2\omega}$; on a donc

$$T = \int \frac{1 - \omega\cot\omega}{\sin^2\omega}\, dq.$$

Substituant la valeur de dq en fonction de ω, il vient

$$T = \int \frac{(1 - \omega\cot\omega)\, d\omega \cot\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)}.\sqrt{(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}}.$$

Si on compare maintenant les deux valeurs de T, on aura cette seconde formule

$$\int \frac{(1 - \omega\cot\omega)\, d\omega \cot\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)}.\sqrt{(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \frac{\pi\cos\alpha}{2\sin^2\alpha\sin\beta}\left[\frac{\sin\beta}{\cos\alpha} - E(c, \beta)\right].$$

On a d'ailleurs dans la case II,

$$\int \frac{d\omega \cot\omega}{MN} = \frac{\pi}{2\sin\alpha\sin\beta};$$

donc

$$\int \frac{\omega d\omega \cot^2\omega}{MN} = -\frac{\pi}{2\sin\alpha\sin\beta}\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} - 1\right) + \frac{\pi\cot\alpha}{2\sin\alpha\sin\beta} E(c, \beta).$$

Ajoutant à cette intégrale la valeur déjà trouvée de $\int \frac{\omega d\omega}{MN}$, on en déduit

$$\int \frac{\omega d\omega}{MN\sin^2\omega} = -\frac{\pi}{2\sin\alpha\sin\beta}\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} - 1\right)$$
$$+ \frac{\pi\,\text{tang}\,\alpha}{2\sin\alpha\sin\beta} F(c, \beta) + \frac{\pi\cot\alpha}{2\sin\alpha\sin\beta} E(c, \beta):$$

c'est la seconde formule de la case VII.

237. Si on prend la différentielle de la quantité $\frac{MN\omega\cos\omega}{\sin^{2n+1}\omega}$, on aura

$$d\left(\frac{\mathrm{MN}\omega\cos\omega}{\sin^{2n+1}\omega}\right)=\frac{\mathrm{MN}d\omega\cos\omega}{\sin^{2n+1}\omega}+\frac{(2n+1)\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^{2n+2}\omega}\cdot\frac{\omega d\omega}{\mathrm{MN}}$$
$$-\frac{2n(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta)}{\sin^{2n}\omega}\cdot\frac{\omega d\omega}{\mathrm{MN}}$$
$$+\frac{(2n-1)(1+\sin^2\alpha+\sin^2\beta)}{\sin^{2n-2}\omega}\cdot\frac{\omega d\omega}{\mathrm{MN}}-\frac{(2n-2)\omega d\omega}{\mathrm{MN}\sin^{2n-4}\omega}.$$

Intégrant de part et d'autre, et observant que le premier membre est zéro aux deux limites de l'intégrale, désignant de plus par Z^{2n} l'intégrale $\int\frac{\omega d\omega}{\mathrm{MN}\sin^{2n}\omega}$, on aura

$$(2n+1)\sin^2\alpha\sin^2\beta Z^{2n+2}=2n(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta)Z^{2n}$$
$$-(2n-1)(1+\sin^2\alpha+\sin^2\beta)Z^{2n-2}$$
$$+(2n-2)Z^{2n-4}-A^{2n},$$

A^{2n} étant l'intégrale $\int\frac{\mathrm{MN}d\omega\cos\omega}{\sin^{2n+1}\omega}$ dont la valeur est donnée dans la case III.

Cette formule servira à trouver Z^4 par le moyen de Z^2 et Z^0, qui sont les deux premières formules de la case; on aura ensuite Z^6 par le moyen de Z^4, Z^2 et Z^0; et ainsi des autres.

CASE VIII.

238. Si dans la seconde formule de la case VII, on met $\frac{1}{2}\pi-\omega$, $\frac{1}{2}\pi-\beta$, $\frac{1}{2}\pi-\alpha$, à la place de ω, α, β, respectivement, ce qui ne change rien au module c, on aura, en prenant toujours l'intégrale depuis $\omega=\alpha$ jusqu'à $\omega=\beta$,

$$\int\frac{(\frac{1}{2}\pi-\omega)d\omega}{\mathrm{MN}\cos^2\omega}=\frac{\pi(\cos\beta-\cos\alpha)}{2\cos^2\beta\cos\alpha}+\frac{\pi}{2\cos\alpha\sin\beta}\mathrm{F}(c,\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)$$
$$+\frac{\pi\sin\beta}{2\cos^2\beta\cos\alpha}\mathrm{E}(c,\tfrac{1}{2}\pi-\alpha).$$

Mais par les formules de la case V, on a

$$\tfrac{1}{2}\pi\int\frac{d\omega}{\mathrm{MN}\cos^2\omega}=\frac{\pi}{2\cos\alpha\sin\beta}\mathrm{F}^1(c)+\frac{\pi\sin\beta}{2\cos\alpha\cos^2\beta}\mathrm{E}^1(c).$$

De plus, les angles $\frac{1}{2}\pi-\alpha$, β, satisfaisant à l'équation $1=b\tang(\frac{1}{2}\pi-\alpha)\tang\beta$, on a, (art. 60),

$$\mathrm{F}^1(c)-\mathrm{F}(c,\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)=\mathrm{F}(c,\beta),$$
$$\mathrm{E}^1(c)-\mathrm{E}(c,\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)=\mathrm{E}(c,\beta)-c^2\cos\alpha\sin\beta.$$

De là on tirera

$$\int \frac{\omega d\omega}{\mathrm{MN}\cos^2\omega} = \frac{\pi(\cos\beta - \cos\alpha)}{2\cos^2\alpha\cos\beta} + \frac{\pi}{2\cos\alpha\sin\beta}\mathrm{F}(c,\beta) + \frac{\pi\sin\beta}{2\cos\alpha\cos^2\beta}\mathrm{E}(c,\beta),$$

c'est la seconde formule de la case VIII.

239. On peut trouver cette formule d'une manière plus directe. Pour cet effet, si l'on différentie la quantité $\frac{\omega\mathrm{MN}}{\sin\omega\cos\omega}$, on aura

$$d\left(\frac{\omega\mathrm{MN}}{\sin\omega\cos\omega}\right) = \frac{\mathrm{MN}d\omega}{\sin\omega\cos\omega} - \cos^2\alpha\cos^2\beta\,.\,\frac{\omega d\omega}{\mathrm{MN}\cos^2\omega}$$
$$+ \sin^2\alpha\sin^2\beta\,.\,\frac{\omega d\omega}{\mathrm{MN}\sin^2\omega} + (\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1)\frac{\omega d\omega}{\mathrm{MN}}.$$

Intégrant de part et d'autre et observant que le premier membre est nul aux deux limites de l'intégrale, on aura

$$\cos^2\alpha\cos^2\beta\int\frac{\omega d\omega}{\mathrm{MN}\cos^2\omega} = \int\frac{\mathrm{MN}d\omega}{\sin\omega\cos\omega} + \sin^2\alpha\sin^2\beta\int\frac{\omega d\omega}{\mathrm{MN}\sin^2\omega}$$
$$+ (\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1)\int\frac{\omega d\omega}{\mathrm{MN}}.$$

Substituant les valeurs des intégrales données dans la case VII, et celle de $\int\frac{\mathrm{MN}d\omega}{\sin\omega\cos\omega}$ donnée dans la case III, on retombe sur le même résultat que nous avons déjà trouvé.

240. Pour obtenir les autres résultats de la case VIII, il faut différentier la quantité $\frac{\omega\mathrm{MN}\sin\omega}{\cos^{2n+1}\omega}$, ce qui donnera

$$d\left(\frac{\omega\mathrm{MN}\sin\omega}{\cos^{2n+1}\omega}\right) = \frac{\mathrm{MN}d\omega\sin\omega}{\cos^{2n+1}\omega} - (2n+1)\cos^2\alpha\cos^2\beta\,.\,\frac{\omega d\omega}{\mathrm{MN}\cos^{2n+2}\omega}$$
$$+ 2n(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta)\frac{\omega d\omega}{\mathrm{MN}\cos^{2n}\omega}$$
$$- (2n-1)(1 + \cos^2\alpha + \cos^2\beta)\frac{\omega d\omega}{\mathrm{MN}\cos^{2n-2}\omega}$$
$$+ (2n-2)\frac{\omega d\omega}{\mathrm{MN}\cos^{2n-4}\omega}.$$

Intégrant de part et d'autre dans les limites données, et désignant par U^{2n} l'intégrale $\int\frac{\omega d\omega}{\mathrm{MN}\cos^{2n}\omega}$, on aura la formule générale de réduction rapportée dans la case VIII. Cette formule donne, en faisant $n = 1$, la valeur de U^4 ou $\int\frac{\omega d\omega}{\mathrm{MN}\cos^4\omega}$; ensuite on obtiendra de même U^6, U^8, etc.

Si l'on fait $\alpha = 0$, on a $c = 1$, $E(\beta) = \sin\beta$, $F(\beta) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}\right)$; ces substitutions faites dans les deux premières formules de la case, donnent les deux corollaires qui terminent cette case; au surplus, le second de ces corollaires se démontre directement, au moyen de l'intégration par parties.

CASE IX.

241. Considérons maintenant la double intégrale suivante, prise entre les mêmes limites que ci-dessus

$$V = \iint \frac{dp\,dq \sin p \cos^2 q}{\cos^2 p + \sin^2 p\,(\cos^2\alpha \cos^2 q + \cos^2\beta \sin^2 q)}.$$

En intégrant d'abord par rapport à p, puis par rapport à q, on trouve

$$V = \frac{1}{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}\int \omega\,d\omega \sqrt{\left(\frac{\sin^2\beta - \sin^2\omega}{\sin^2\omega - \sin^2\alpha}\right)};$$

cette intégrale étant prise à l'ordinaire depuis $\omega = \alpha$ jusqu'à $\omega = \beta$.

Si on fait les intégrations dans l'ordre inverse, et que pour intégrer par rapport à q, on applique la formule

$$\int \frac{dq \cos^2 q}{A^2\cos^2 q + B^2 \sin^2 q} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{A^2 - B^2}\left(1 - \frac{B}{A}\right);$$

qu'ensuite on fasse $\cos p = x$, on aura

$$V = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}\int\left[\frac{dx}{1-xx} - \frac{dx}{1-xx}\cdot\sqrt{\left(\frac{\cos^2\beta + x^2\sin^2\beta}{\cos^2\alpha + x^2\sin^2\alpha}\right)}\right].$$

Cette intégrale doit être prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; mais il faut des précautions particulières pour éviter les infinis que l'on rencontrerait en intégrant séparément les deux parties de la quantité sous le signe. Voici l'analyse qu'il convient de suivre pour cet objet, analyse qui est d'ailleurs indiquée par la théorie des fonctions elliptiques.

Supposant toujours $\beta > \alpha$, soit $x = \cot\beta \tang\phi$, $c^2 = 1 - \frac{\tang^2\alpha}{\tang^2\beta}$, ou $c = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$, on aura

$$\frac{dx}{1-xx}\sqrt{\left(\frac{\cos^2\beta + x^2\sin^2\beta}{\cos^2\alpha + x^2\sin^2\alpha}\right)} = \frac{\cos^2\beta}{\cos\alpha\sin\beta}\cdot\frac{d\phi}{\left(1 - \frac{\sin^2\phi}{\sin^2\beta}\right)\Delta},$$

L'intégrale de cette quantité est $\frac{\cos^2\beta}{\cos\alpha\sin\beta}\cdot\Pi\left(-\frac{1}{\sin^2\beta}\right)$. Mais cette fonction ayant son paramètre négatif et plus grand que l'unité, il importe de la

changer en une autre dont le paramètre soit plus petit que c^2; c'est ce qui se fera par la formule du n° 52, laquelle donne, en faisant.....

$r = \cot \beta \cos \gamma \cdot \frac{\tang \varphi}{\Delta}$,

$$\Pi\left(-\frac{1}{\sin^2 \beta}\right) = F - \Pi(-\sin^2 \gamma) + \frac{\tang \beta}{2 \cos \gamma} \log \frac{1+r}{1-r}.$$

Multipliant par $\frac{\cos^2 \beta}{\cos \alpha \sin \beta}$, et observant qu'on a $\cos \beta = \cos \alpha \cos \gamma$, il vient

$$\int \frac{dx}{1-xx} \sqrt{\left(\frac{\cos^2 \beta + x^2 \sin^2 \beta}{\cos^2 \alpha + x^2 \sin^2 \alpha}\right)} = \frac{\cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta} [F - \Pi(-\sin^2 \gamma)] + \tfrac{1}{2} \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right).$$

Donc en appelant V′ l'intégrale indéfinie,

$$\int \left[\frac{dx}{1-xx} - \frac{dx}{1-xx} \sqrt{\left(\frac{\cos^2 \beta + x^2 \sin^2 \beta}{\cos^2 \alpha + x^2 \sin^2 \alpha}\right)}\right],$$

on aura

$$V' = \tfrac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \tfrac{1}{2} \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right) + \cot \beta \cos \gamma [-F + \Pi(-\sin^2 \gamma)],$$

les fonctions F et Π ayant d'ailleurs le module commun c et l'amplitude commune φ.

La partie de cette intégrale affectée de logarithmes, peut se mettre sous la forme

$$\log\left(\frac{1+x}{1+r}\right) - \tfrac{1}{2} \log\left(\frac{1-x^2}{1-r^2}\right);$$

d'ailleurs en substituant la valeur de r et celle de x en φ, on trouve

$$\frac{1-x^2}{1-r^2} = \frac{\Delta^2}{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi}.$$

Donc on aura indéfiniment, quel que soit φ,

$$V' = \log\left(\frac{1+x}{1+r}\right) + \tfrac{1}{2} \log\left(\frac{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi}{\Delta^2}\right) + \cot \beta \cos \gamma [-F + \Pi(-\sin^2 \gamma)].$$

Mais lorsqu'on fait $x = 1$, on a $\varphi = \beta$, $r = 1$, $\Delta = \cos \gamma$, et la valeur de V′ devient

$$V' = \tfrac{1}{2} \mathcal{L}(1 + \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha) + \cot \beta \cos \gamma [-F(c, \beta) + \Pi(-\sin^2 \gamma, c, \beta)];$$

cette valeur étant trouvée, il en résulte une seconde expression de V, laquelle est

$$V = \frac{\frac{1}{2} \pi}{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha} V'.$$

Comparant les deux valeurs de V, on a enfin ce résultat remarquable

$$\int \omega d\omega \sqrt{\left(\frac{\sin^2 \beta - \sin^2 \omega}{\sin^2 \omega - \sin^2 \alpha}\right)} = \frac{\pi}{4} \mathcal{L}(1 + \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha)$$
$$+ \frac{\pi \cos^2 \beta}{2 \sin \beta \cos \alpha} [- F(c, \beta) + \Pi(-\sin^2 \gamma, c, \beta)],$$

où l'on a $c = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$, et $\cos \gamma = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$.

242. Il ne sera pas inutile de faire voir comment on peut parvenir à ce résultat par une route fort différente. Pour cet effet, appelons Z l'intégrale inconnue,

$$\int \omega d\omega \sqrt{\left(\frac{\sin^2 \omega - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta - \sin^2 \omega}\right)},$$

prise depuis $\omega = \alpha$ jusqu'à $\omega = \beta$; on aura (parce que la quantité sous le signe est nulle à la première limite de l'intégrale),

$$\frac{dZ}{d\alpha} = - \sin \alpha \cos \alpha \int \frac{\omega d\omega}{MN} = - \frac{\pi \sin \alpha}{2 \sin \beta} F(c, \beta).$$

Réciproquement, Z pourra se déduire de l'intégrale suivante, prise par rapport à α,

$$Z = \frac{\pi}{2 \sin \beta} \int - d\alpha \sin \alpha F(c, \beta).$$

Il s'agit donc de trouver l'intégrale $\int - d\alpha \sin \alpha F(c, \beta)$ que, pour abréger, je désignerai par Z'; mais comme $F(c, \beta)$ lui même peut se mettre sous la forme $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}}$, pourvu qu'après l'intégration on fasse $\varphi = \beta$; on pourra, dans cette supposition, écrire ainsi la valeur de Z',

$$Z' = \iint \frac{- d\varphi d\alpha \sin \alpha}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}} = \iint \frac{- d\varphi d\alpha \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{(\cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + \cot^2 \beta \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha)}}.$$

Prenant d'abord l'intégrale par rapport à α, on aura

$$\int \frac{d\varphi \sqrt{(\cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + \cot^2 \beta \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha)}}{\cos^2 \varphi - \cot^2 \beta \sin^2 \varphi} = \int \frac{\cos \alpha \,.\, \Delta d\varphi}{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \beta}};$$

et parce que $c^2 = \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \beta}$, cette intégrale devient

$$\cos \alpha \sin^2 \gamma F + \cos \alpha \cos^2 \gamma \Pi\left(- \frac{1}{\sin^2 \beta}\right).$$

Mais j'observe qu'à l'intégrale prise par rapport à α, il faut ajouter une constante Φ' qui pourra être fonction de φ et de β; ainsi en supposant $\int \Phi' d\varphi = \Phi$, Φ étant une fonction de φ et β, laquelle deviendra fonction

de β seule lorsqu'on fera $\varphi = \beta$, il vient

$$Z' = \cos\alpha \sin^2\gamma F + \cos\alpha \cos^2\gamma \Pi\left(-\frac{1}{\sin^2\beta}\right) + \Phi.$$

Substituant la valeur de $\Pi\left(-\frac{1}{\sin^2\beta}\right)$ donnée dans l'art. 241, on aura

$$Z' = \cos\alpha . F - \frac{\cos^2\beta}{\cos\alpha} \Pi(-\sin^2\gamma) + \frac{\sin\beta}{2} \mathcal{L}\left(\frac{1+r}{1-r}\right) + \Phi,$$

et par conséquent

$$Z = \frac{\pi\cos\alpha}{2\sin\beta} F - \frac{\pi\cos^2\beta}{2\cos\alpha\sin\beta} \Pi(-\sin^2\gamma) + \frac{\pi}{4} \mathcal{L}\left(\frac{1+r}{1-r}\right) + \frac{\pi}{2\sin\beta}\Phi.$$

Mais on a $\frac{\pi}{4}\mathcal{L}\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = \frac{\pi}{2}\mathcal{L}(1+r) - \frac{\pi}{4}\mathcal{L}(1-r^2)$; d'un autre côté, la valeur de r donne

$$1 - r^2 = \frac{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}{\Delta^2} \cdot \frac{\sin^2\beta - \sin^2\varphi}{\sin^2\beta\cos^2\varphi},$$

et par conséquent

$$\frac{\pi}{4}\mathcal{L}(1-r^2) = \frac{\pi}{4}\mathcal{L}\left(\frac{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}{\Delta^2}\right) + \frac{\pi}{4}\mathcal{L}\left(\frac{\sin^2\beta - \sin^2\varphi}{\sin^2\beta\cos^2\varphi}\right).$$

Réunissant la partie $-\frac{\pi}{4}\mathcal{L}\left(\frac{\sin^2\beta - \sin^2\varphi}{\sin^2\beta\cos^2\varphi}\right)$ avec la fonction $\frac{\pi}{2\sin\beta}\Phi$, comme ne faisant ensemble qu'une seule fonction de φ et de β, laquelle, après avoir fait $\varphi = \beta$, devient une fonction de β seule et peut se désigner par $\psi(\beta)$, on aura enfin

$$Z = \frac{\pi\cos\alpha}{2\sin\beta} F - \frac{\pi\cos^2\beta}{2\cos\alpha\sin\beta} \Pi(-\sin^2\gamma) - \frac{\pi}{4}\mathcal{L}(1+\sin^2\beta - \sin^2\alpha)$$
$$+ \psi(\beta) + \frac{\pi}{2}\mathcal{L}2.$$

Pour déterminer la fonction arbitraire ψ, il faut partir d'un cas particulier; or lorsqu'on fait $\beta = \alpha$, l'intégrale Z prise depuis $\omega = \alpha$ jusqu'à $\omega = \beta$, doit être nulle. Ainsi on voit que la quantité $\psi(\beta) + \frac{\pi}{2}\mathcal{L}2$ se réduit à zéro et qu'on a simplement

$$\int \frac{M}{N}\omega d\omega = \frac{\pi\cos\alpha}{2\sin\beta} F(c, \beta) - \frac{\pi\cos^2\beta}{2\cos\alpha\sin\beta} \Pi(-\sin^2\gamma, c, \beta)$$
$$- \frac{\pi}{4}\mathcal{L}(1+\sin^2\beta - \sin^2\alpha).$$

Cette formule s'accorde avec celle qu'on a trouvée dans l'art. 241, car elles satisfont toutes deux à l'équation

$$\int \frac{N}{M}\omega d\omega + \int \frac{M}{N}\omega d\omega = (\sin^2\beta - \sin^2\alpha)\int \frac{\omega d\omega}{MN}.$$

243. Connaissant l'intégrale $\int \frac{N}{M}\omega d\omega$ qui revient à $\sin^2\beta \int \frac{\omega d\omega}{MN} - \int \frac{\omega d\omega \sin^2\omega}{MN}$, on en déduira la valeur de cette dernière, comme elle est insérée dans la table.

Si on désigne ensuite par V^{2n} l'intégrale $\int \frac{\omega d\omega \sin^{2n}\omega}{MN}$, et qu'ayant différencié la quantité $\omega MN \cos\omega \sin^{2n-3}\omega$, on revienne de la différentielle à son intégrale, on trouvera la formule de réduction .....
$2nV^{2n+2} = (2n-1)(1+\sin^2\alpha+\sin^2\beta)V^{2n} +$ etc., donnée dans la case IX. Faisant dans cette formule $n=1$, on en tire V^4 ou

$$\int \frac{\omega d\omega \sin^4\omega}{MN} = \tfrac{1}{2}(1+\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\int \frac{\omega d\omega \sin^2\omega}{MN} - \tfrac{1}{2}\sin^2\alpha\sin^2\beta\int \frac{\omega d\omega}{MN\sin^2\omega}$$
$$-\frac{\pi}{8}(\sin\beta - \sin\alpha)^2,$$

d'où résulte la formule insérée dans la case IX. On connaîtra ensuite les valeurs de V^6, V^8, etc. par la formule de réduction.

244. Le cas de $\alpha = 0$ fournit plusieurs corollaires remarquables. Alors on a $c=1$, $\gamma=\beta$, $\Delta = \cos\varphi$,

$$F(c,\beta) = \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}\right),$$

$$\Pi(-\sin^2\gamma, c, \varphi) - F(c,\varphi) = \int\left[\frac{d\varphi}{1-\sin^2\beta\sin^2\varphi}\cdot\frac{1}{\cos\varphi} - \frac{d\varphi}{\cos\varphi}\right]$$
$$= \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\int\left[\frac{d\varphi}{\cos\varphi} - \frac{d\varphi\cos\varphi}{1-\sin^2\beta\sin^2\varphi}\right]$$
$$= \frac{\sin^2\beta}{2\cos^2\beta}\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right) - \frac{\sin\beta}{2\cos^2\beta}\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\beta\sin\varphi}{1-\sin\beta\sin\varphi}\right).$$

Faisant $\varphi = \beta$, cette formule donne

$$\Pi - F = \frac{\sin^2\beta}{2\cos^2\beta}\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}\right) - \frac{\sin\beta}{2\cos^2\beta}\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin^2\beta}{1-\sin^2\beta}\right).$$

Substituant cette valeur dans l'expression de $\int \frac{N}{M}\omega d\omega$, on aura

$$\int \frac{\omega d\omega}{\sin\omega}\sqrt{(\sin^2\beta - \sin^2\omega)} = \frac{\pi\sin\beta}{4}\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}\right) - \frac{\pi}{2}\mathcal{L}\frac{1}{\cos\beta}. \quad \begin{cases}\omega = 0,\\ \omega = \beta.\end{cases}$$

Cette intégrale se réduit à $\frac{\pi}{2}\mathcal{L}2$, lorsqu'on fait $\beta = \frac{1}{2}\pi$. En effet, on sait d'ailleurs que l'intégrale $\int \frac{\omega d\omega \cos\omega}{\sin\omega}$, prise depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \frac{1}{2}\pi$, est égale à $\frac{1}{2}\pi l 2$.

245. Si l'on fait $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\pi$ dans la valeur de $\int \frac{N}{M} \omega d\omega$, qui devient..... $\int \frac{\omega d\omega \cos \omega}{\sqrt{(\sin^2 \omega - \sin^2 \alpha)}}$, cette valeur devient indéterminée. Il faut donc supposer $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\pi - \epsilon$, ϵ étant infiniment petit; mais le moyen le plus simple de déterminer, dans ce cas, la valeur de $\int \frac{\omega d\omega \cos \omega}{\sqrt{(\sin^2 \omega - \sin^2 \alpha)}}$, est de remonter à la valeur de V′ de l'art. 241., laquelle, dans le cas de $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\pi$, devient

$$V' = \int \frac{dx}{1 - xx} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{(\cos^2 \alpha + x^2 \sin^2 \alpha)}}\right).$$

Soit $x = \cot \alpha \operatorname{tang} \varphi$, on aura

$$V' = \int \frac{\cos \alpha d\varphi}{\sin \alpha + \sin \varphi} = \mathcal{L}\left(\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi}\right) - \mathcal{L} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Cette intégrale doit être prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \alpha$, ainsi en faisant $\varphi = \alpha$, on aura $V' = \mathcal{L}(2 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha)$, d'où résulte enfin la formule

$$\int \frac{\omega d\omega \cos \omega}{\sqrt{(\sin^2 \omega - \sin^2 \alpha)}} = \frac{\pi}{2} \mathcal{L}(1 + \cos \alpha). \qquad \left\{ \begin{array}{l} \omega = \alpha, \\ \omega = \frac{1}{2}\pi. \end{array} \right.$$

De là on peut réciproquement conclure que dans le cas où $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\pi - \epsilon$, ϵ étant infiniment petit, (qui donne $c^2 = 1 - \epsilon^2 \operatorname{tang}^2 \alpha$, $\sin^2 \gamma = 1 - \frac{\epsilon^2}{\cos^2 \alpha}$), la fonction $\Pi(-\sin^2 \gamma, c, \mathcal{E})$ doit se réduire à

$$\frac{\cos \alpha}{\epsilon^2} \log(1 + \cos \alpha) - \frac{\cos \alpha}{2\epsilon^2} \log(1 + \cos^2 \alpha);$$

et par conséquent l'intégrale

$$\int \frac{\epsilon^2 d\varphi}{\left(\cos^2 \varphi + \frac{\epsilon^2}{\cos^2 \alpha} \sin^2 \varphi\right) \sqrt{(\cos^2 \varphi + \epsilon^2 \operatorname{tang}^2 \alpha \sin^2 \varphi)}},$$

prise entre les limites $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \epsilon$, se réduit à

$$\cos \alpha \log(1 + \cos \alpha) - \tfrac{1}{2} \cos \alpha \log(1 + \cos^2 \alpha).$$

Nous remarquerons que, d'après la formule du n° 234, la même intégrale, prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, a pour valeur $\frac{1}{2} \cos \alpha \, \mathcal{L}\left(\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}\right)$, ou

$$\cos \alpha \log(1 + \cos \alpha) - \tfrac{1}{2} \cos \alpha \log(1 - \cos^2 \alpha).$$

Il n'est pas étonnant que cette seconde valeur soit plus grande que l'autre, puisque l'intégrale est prise dans une plus grande étendue; mais ces deux résultats seraient très difficiles à vérifier par l'intégration directe, et ils

méritent par leur singularité et leur difficulté, de fixer l'attention des géomètres.

246. On peut néanmoins trouver assez facilement la différence qu'il y a entre les deux formules, à raison de la plus grande extension de l'une d'elles. En effet, pour avoir cette différence, soit $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \theta$, on aura à intégrer depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \varepsilon$, la différentielle

$$\frac{\varepsilon^2 d\theta}{\left(\theta^2 + \frac{\varepsilon^2}{\cos^2\alpha}\right)\sqrt{(\theta^2 + \varepsilon^2 \tang^2\alpha)}}.$$

Soit $\theta = \varepsilon \tang \alpha \tang \psi$, la transformée sera $\frac{\cos^2\alpha \,.\, d\psi \cos\psi}{1 - \cos^2\alpha \sin^2\psi}$, et son intégrale $\frac{1}{2}\cos\alpha\, \mathcal{L}\left(\frac{1 + \cos\alpha \sin\psi}{1 - \cos\alpha \sin\psi}\right)$. Faisant à la limite $\theta = \varepsilon$, ou $\psi = \frac{1}{2}\pi - \alpha$, cette intégrale deviendra

$$\tfrac{1}{2}\cos\alpha\, \mathcal{L}\left(\frac{1 + \cos^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha}\right),$$

résultat qui s'accorde parfaitement avec la différence que nous avons trouvée entre les deux intégrales, l'une prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, l'autre prise seulement depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$. Au reste, on peut remarquer que la formule trouvée art. 114, se rapporte à ce genre d'intégrales.

CASE X.

247. Considérons la double intégrale

$$Z = \iint \frac{dp\,dq \sin p\,(A + B\cos^2 p)}{\cos^2 p + \sin^2 p\left(\frac{\cos^2 q}{\cos^2 \beta} + \frac{\sin^2 q}{\cos^2 \alpha}\right)},$$

dont les limites sont 0 et $\frac{1}{2}\pi$ pour chaque variable.

Si on intègre d'abord par rapport à q, et qu'ensuite on fasse $\cos p = x$, il restera à déterminer, entre les limites $x = 0$, $x = 1$, l'intégrale

$$Z = \frac{\pi}{2}\cos\alpha \cos\beta \int \frac{(A + Bx^2)\,dx}{\sqrt{(1 - x^2 \sin^2\beta)}\,.\,\sqrt{(1 - x^2 \sin^2\alpha)}}.$$

Soit $\beta > \alpha$ et $x = \frac{\sin\varphi}{\sin\beta}$, soit en même temps $c = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, on aura

$$Z = \frac{\pi \cos\alpha \cos\beta}{2\sin\beta} \int \frac{dx}{\Delta}\left(A + B\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\beta}\right);$$

d'où résulte, après avoir fait $\varphi = \beta$, l'intégrale cherchée

$$Z = \frac{\pi \cos\alpha \cos\beta}{2\sin\beta} AF(c, \beta) + \frac{\pi \cos\alpha \cos\beta}{2\sin^3\alpha \sin\beta} B[F(c, \beta) - E(c, \beta)].$$

Faisons maintenant les intégrations dans l'ordre inverse, et pour cet effet, soit $\cos p = x$ et

$$\frac{\cos^2 q}{\cos^2 \beta} + \frac{\sin^2 q}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \omega},$$

nous aurons d'abord à intégrer la différentielle

$$\frac{\cos^2 \omega (A + Bx^2)\,dx}{1 - x^2 \sin^2 \omega}.$$

Son intégrale, prise à compter de $x = 0$, est

$$\frac{(A \sin^2 \omega + B) \cot^2 \omega}{2 \sin \omega} \mathcal{L}\left(\frac{1 + x \sin \omega}{1 - x \sin \omega}\right) - Bx \cot^2 \omega;$$

si ensuite on fait $x = 1$ et qu'on appelle V le résultat, on aura

$$V = -B \cot^2 \omega + (A \sin^2 \omega + B) \frac{\cot^2 \omega}{2 \sin \omega} \mathcal{L}\left(\frac{1 + \sin \omega}{1 - \sin \omega}\right).$$

Cela posé, la valeur de Z étant $\int V dq$, il faudra dans cette formule substituer la valeur de dq en fonction de ω : or de l'équation supposée on tire successivement

$$(\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha) \sin^2 q = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \omega} (\cos^2 \omega - \cos^2 \beta),$$

$$(\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha) \cos^2 q = \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \omega} (\cos^2 \alpha - \cos^2 \omega),$$

$$(\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha)\, dq \sin q \cos q = \cos^2 \alpha \cos^2 \beta . \frac{d\omega \sin \omega}{\cos^3 \omega},$$

$$dq = \frac{\cos \alpha \cos \beta . d\omega \operatorname{tang} \omega}{\sqrt{(\sin^2 \omega - \sin^2 \alpha)} . \sqrt{(\sin^2 \beta - \sin^2 \omega)}}.$$

Donc enfin, si on fait pour abréger, $M = \sqrt{(\sin^2 \omega - \sin^2 \alpha)}$, ... $N = \sqrt{(\sin^2 \beta - \sin^2 \omega)}$, $\Omega = \frac{1}{2} \mathcal{L}\left(\frac{1 + \sin \omega}{1 - \sin \omega}\right)$, on aura

$$Z = A \cos \alpha \cos \beta \int \frac{\Omega d\omega \cos \omega}{MN} + B \cos \alpha \cos \beta \int \left(\frac{\Omega}{\sin \omega} - 1\right) \frac{d\omega \cot \omega}{MN},$$

ces intégrales étant prises depuis $\omega = \alpha$ jusqu'à $\omega = \beta$.

248. Comparant entre elles les deux valeurs de Z, on en tire ces deux formules

$$\int \frac{\Omega d\omega \cos \omega}{MN} = \frac{\pi}{2 \sin \beta} F(c, \beta),$$

$$\int \left(\frac{\Omega}{\sin \omega} - 1\right) \frac{d\omega \cot \omega}{MN} = \frac{\pi}{2 \sin^2 \alpha \sin \beta} [F(c, \beta) - E(c, \beta)].$$

Ajoutant à la seconde formule la valeur de $\int \frac{d\omega \cot \omega}{MN}$ donnée dans la case I, on en déduit

$$\int \frac{\Omega d\omega \cos\omega}{\mathrm{MN}\sin^2\omega} = \frac{\pi}{2\sin\alpha\sin\beta} + \frac{\pi}{2\sin^2\alpha\sin\beta}[\mathrm{F}(c,\beta) - \mathrm{E}(c,\beta)].$$

Nous avons ainsi les deux premières formules de la case X.

Pour avoir en général la valeur de l'intégrale $\int \frac{\Omega d\omega \cos\omega}{\mathrm{MN}\sin^{2n}\omega}$, que nous désignons par P^{2n}, il faut différencier la quantité $\frac{\Omega\mathrm{MN}}{\sin^{2n+1}\omega}$, puis revenir de la différentielle à l'intégrale, ce qui donnera la formule de réduction

$$(2n+1)\sin^2\alpha\sin^2\beta\,\mathrm{P}^{2n+2} = 2n(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)\mathrm{P}^{2n} - \text{etc.},$$

rapportée dans la case X; et au moyen de cette formule, on trouvera successivement les valeurs de P^4, P^6, etc.

Quant aux corollaires qui terminent la case, ils se déduisent sans difficulté des formules générales, les uns en faisant $\beta = \frac{1}{2}\pi$, les autres en faisant $\alpha = 0$. Il suffira seulement de faire voir ce que devient, dans le cas de $\alpha = 0$, l'équation

$$\int\left(\frac{\Omega}{\sin\omega} - 1\right)\frac{d\omega\cot\omega}{\mathrm{MN}} = \frac{\pi}{2\sin^2\alpha\sin\beta}[\mathrm{F}(c,\beta) - \mathrm{E}(c,\beta)].$$

Alors le second membre prend une forme indéterminée, et pour en avoir la valeur, il faut supposer α infiniment petit, ce qui rendra de même c infiniment petit. Or on a en général

$$\mathrm{F}(c,\varphi) - \mathrm{E}(c,\varphi) = \int \frac{c^2\sin^2\varphi}{\Delta}d\varphi.$$

et puisque $\Delta = \sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}$, si on rejette les infiniment petits de l'ordre c^4 ou α^4, le second membre se réduit à $c^2\int d\varphi\sin^2\varphi = \frac{c^2}{2}(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)$ donc en faisant $\varphi = \beta$, on aura

$$\int \frac{(\Omega - \sin\omega)\,d\omega\cos\omega}{\mathrm{N}\sin^3\omega} = \frac{\pi}{4\sin^3\beta}(\beta - \sin\beta\cos\beta).$$

CASE XI.

249. Pour avoir la valeur de l'intégrale $\int \frac{\Omega d\omega \cos\omega \sin^{2n}\omega}{\mathrm{MN}}$, que nous désignerons en général par Q^{2n}, il suffit de changer le signe de n dans la formule de réduction de la case précédente, parce qu'alors P^{2n} se change en Q^{2n}, et l'on aura

$$(2n+1)\mathrm{Q}^{2n+2} = 2n(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)\mathrm{Q}^{2n} - (2n-1)\sin^2\alpha\sin^2\beta\,\mathrm{Q}^{2n-2} + \mathrm{H}^{2n},$$

H^{2n} désignant l'intégrale $\int \frac{MN\,d\omega \sin^{2n-1}\omega}{\cos\omega}$, dont la valeur a été donnée dans la case III. De là on tirera la valeur de l'intégrale Q^2, en faisant $n=0$, puis celle de Q^4 en faisant $n=1$, et ainsi de suite.

Les corollaires offrent plusieurs formules remarquables, mais ils se déduisent sans difficulté des formules générales.

CASE XII.

250. Pour parvenir aux formules contenues dans cette case, considérons la double intégrale

$$V=\iint \frac{dp\,dq \sin p \cos^2 q}{\cos^2 p+\sin^2 p\left(\frac{\cos^2 q}{\cos^2 \beta}+\frac{\sin^2 q}{\cos^2 \alpha}\right)},$$

dans laquelle les deux variables ont toujours pour limites 0 et $\frac{1}{2}\pi$.

Si on intègre d'abord par rapport à p, et qu'on fasse $\frac{1}{\cos^2\omega}=\frac{\cos^2 q}{\cos^2\beta}+\frac{\sin^2 q}{\cos^2\alpha}$, on aura

$$V=\frac{\cos\alpha\cos^3\beta}{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}\int\frac{\Omega d\omega}{\cos\omega}\sqrt{\left(\frac{\sin^2\omega-\sin^2\alpha}{\sin^2\beta-\sin^2\omega}\right)},$$

l'intégrale devant être prise depuis $\omega=\alpha$ jusqu'à $\omega=\beta$.

Faisons maintenant les intégrations dans un ordre inverse : l'intégrale étant prise par rapport à q, si on fait $\cos p=x$, on aura

$$V=\frac{\pi\cos^2\alpha\cos^2\beta}{2(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)}\int\frac{dx}{1-xx}\left[1-\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\sqrt{\left(\frac{1-x^2\sin^2\alpha}{1-x^2\sin^2\beta}\right)}\right].$$

Soit pour abréger,

$$X=\int\frac{dx}{1-xx}\quad\text{et}\quad Y=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\int\frac{dx}{1-xx}\sqrt{\left(\frac{1-x^2\sin^2\alpha}{1-x^2\sin^2\beta}\right)},$$

afin qu'on ait $V=\frac{\pi\cos^2\alpha\cos^2\beta}{2(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)}(X-Y)$. Si on fait $x=\frac{\sin\varphi}{\sin\beta}$, et $c=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, on aura d'abord

$$Y=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}\int\frac{\Delta d\varphi}{1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\beta}},$$

ou

$$Y=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}\int\frac{d\varphi}{\Delta}\left(\sin^2\alpha+\frac{\cos^2\alpha}{1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\beta}}\right),$$

ce qui donne l'intégrale indéfinie

$$Y=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}\left[\sin^2\alpha\,.\,F+\cos^2\alpha\,\Pi\left(-\frac{1}{\sin^2\beta}\right)\right].$$

Mais en faisant $r = \cot\beta \cos\alpha . \frac{\tang\varphi}{\Delta}$, on a, comme au n° 241,

$$\Pi\left(-\frac{1}{\sin^2\beta}\right) = F - \Pi(-\sin^2\alpha) + \frac{\tang\beta}{2\cos\alpha}\mathcal{L}\left(\frac{1+r}{1-r}\right);$$

donc

$$Y = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}F - \frac{\cos\beta\cos\alpha}{\sin\beta}\Pi(-\sin^2\alpha) + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1+r}{1-r}\right),$$

et de là

$$X - Y = \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \frac{\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}F + \frac{\cos\beta\cos\alpha}{\sin\beta}\Pi(-\sin^2\alpha).$$

Mais la partie $\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$ se réduit, comme ci-dessus, d'abord à $\mathcal{L}\left(\frac{1+x}{1-r}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1-x^2}{1-r^2}\right)$; ensuite, par la substitution des valeurs de x et de r en fonction de φ, elle devient

$$\mathcal{L}\left(\frac{1+x}{1+r}\right) + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}{\Delta^2\cos^2\varphi}\right):$$

jusque-là il ne s'agit que de l'intégrale indéfinie.

Maintenant à la limite de l'intégrale on a $x = 1$, $\varphi = \beta$, $r = 1$, $\Delta = \cos\alpha$, $\frac{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}{\Delta^2\cos^2\varphi} = 1 + \tang^2\alpha + \tang^2\beta$; donc enfin on aura pour seconde valeur de V,

$$V = \frac{\pi\cos^2\alpha\cos^2\beta}{2(\sin^2\beta - \sin^2\alpha)}\left\{\begin{array}{l}\frac{\cos\beta\cos\alpha}{\sin\beta}\Pi(-\sin^2\alpha, c, \beta) - \frac{\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}F(c, \beta)\\ \quad + \frac{1}{2}\mathcal{L}(1 + \tang^2\alpha + \tang^2\beta)\end{array}\right\}.$$

Comparant ces deux valeurs de V, on aura la formule

$$\int\frac{\Omega d\omega}{\cos\omega}\cdot\frac{M}{N} = \frac{\pi\cos^2\alpha}{2\sin\beta}\Pi(-\sin^2\alpha, c, \beta) - \frac{\pi}{2\sin\beta}F(c, \beta)$$
$$+ \frac{\pi\cos\alpha}{4\cos\beta}\mathcal{L}(1 + \tang^2\alpha + \tang^2\beta).$$

Ajoutant l'équation $\int\frac{\Omega d\omega\cos\omega}{MN} = \frac{\pi}{2\sin\beta}F(c, \beta)$, on trouve

$$\int\frac{\Omega d\omega}{MN\cos\omega} = \frac{\pi}{2\sin\beta}\Pi(-\sin^2\alpha, c, \beta)$$
$$+ \frac{\pi}{4\cos\alpha\cos\beta}\mathcal{L}(1 + \tang^2\alpha + \tang^2\beta);$$

c'est la seconde formule de la cass XII.

251. Pour avoir les autres formules, désignons en général par T^{2n+1} l'in-

tégrale $\int \frac{\Omega d\omega}{MN \cos^{2n+1}\omega}$; si on différencie la quantité $\frac{\Omega MN \sin\omega}{\cos^{2n}\omega}$, et que de la différentielle on revienne à l'intégrale, on trouvera la formule

$$\begin{aligned} 2n \cos^2\alpha \cos^2\beta T^{2n+1} = &(2n-1)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta) T^{2n-1} \\ &-(2n-2)(1+\cos^2\alpha+\cos^2\beta) T^{2n-3} \\ &+(2n-3) T^{2n-5} + B^{2n}, \end{aligned}$$

B^{2n} étant l'intégrale $\int \frac{MN\, d\omega \sin\omega}{\cos^{2n+1}\omega}$, donnée dans la case III.

Si on fait $n = 1$ dans cette formule, on aura

$$\begin{aligned} 2\cos^2\alpha\cos^2\beta T^3 = &(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta) \int \frac{\Omega d\omega}{MN\cos\omega} \\ &- \int \frac{\Omega d\omega \cos^3\omega}{MN} + \frac{\pi(\cos\alpha - \cos\beta)^2}{4\cos\alpha\cos\beta}. \end{aligned}$$

L'intégrale $\int \frac{\Omega d\omega \cos^3\omega}{MN}$ est donnée par les deux premières formules de la case XI; ainsi en substituant sa valeur, on aura

$$\begin{aligned} \int \frac{\Omega d\omega}{MN\cos^3\omega} = &\frac{\pi(\sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\beta\cos^2\alpha)}{8\cos^3\alpha\cos^3\beta} + \frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta} \int \frac{\Omega d\omega}{MN\cos\omega} \\ &- \frac{\pi}{4\sin\beta\cos^2\alpha} F(c,\beta) - \frac{\pi\sin\beta}{4\cos^2\alpha\cos^2\beta} E(c,\beta); \end{aligned}$$

c'est la troisième formule de la case XII.

On déterminera ensuite aisément par la formule de réduction, les intégrales T^5, T^7, etc.

CASE XIII.

252. D'après les dénominations rapportées en tête de la case, si l'on fait $\cos^2\omega = \frac{1 - \sin^2\beta\cos^2\psi}{\cos^2\alpha}$, on aura en général

$$\int \frac{d\omega \sin\omega \cos^{2n+1}\omega}{PQ} = \frac{1}{\cos^{2n+1}\alpha} \int d\psi\,(1 - \sin^2\beta\cos^2\psi)^n, \qquad \begin{cases} \psi = 0, \\ \psi = \theta, \end{cases}$$

d'où l'on voit que cette intégrale ne dépend que de l'angle θ.

De même, si l'on fait $\cos^2\omega = \frac{\cos^2\gamma}{1 - \sin^2\beta\sin^2\varphi}$, on aura généralement

$$\int \frac{d\omega \sin\omega}{PQ\cos^{2n+1}\omega} = \frac{1}{\cos^{2n+1}\gamma} \int d\varphi\,(1 - \sin^2\beta\cdot\sin^2\varphi)^n, \qquad \begin{cases} \varphi = 0, \\ \varphi = \lambda, \end{cases}$$

de sorte que cette intégrale ne dépend que de l'angle λ.

On peut d'ailleurs observer que β est l'hypoténuse d'un triangle sphérique rectangle dont α et γ sont les deux côtés, et que dans ce triangle λ est l'angle opposé au côté γ, et $\frac{1}{2}\pi - \theta$, l'angle opposé au côté α.

De la dernière formule on déduit les deux suivantes, qui s'expriment par des fonctions elliptiques dont le module est $c = \sin \beta$:

$$\int \frac{d\omega \sin \omega}{PQ \cos^{2n} \omega} = \frac{1}{\cos^{2n} \gamma} \int \Delta^{2n-1} d\varphi, \qquad \begin{cases} \varphi = 0, \\ \varphi = \lambda. \end{cases}$$
$$\int \frac{d\omega \sin \omega \cos^{2n} \omega}{PQ} = \cos^{2n} \gamma \int \frac{d\varphi}{\Delta^{2n+1}}.$$

Si dans ces formules on fait $\alpha = 0$, ce qui donne $\beta = \gamma$, $\lambda = \frac{1}{2}\pi$, $Q = \sin \omega$, $P = \sqrt{(\sin^2 \beta - \sin^2 \omega)}$, on aura les deux suivantes :

$$\int \frac{d\omega}{\cos^{2n} \omega \sqrt{(\sin^2 \beta - \sin^2 \omega)}} = \frac{1}{\cos^{2n} \beta} \int \Delta^{2n-1} d\varphi, \qquad \begin{cases} \varphi = 0, \\ \varphi = \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$$
$$\int \frac{d\omega \cos^{2n} \omega}{\sqrt{(\sin^2 \beta - \sin^2 \omega)}} = \cos^{2n} \beta \int \frac{d\varphi}{\Delta^{2n+1}}.$$

Ces intégrales seront donc toujours faciles à exprimer, au moyen des deux fonctions complètes $F^1(c)$, $E^1(c)$, où l'on a toujours $c = \sin \beta$.

Si on observe d'ailleurs qu'on a généralement, lorsque $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, (*)

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta^{2n+1}} = \frac{1}{b^{2n}} \int \Delta^{2n-1} d\varphi,$$

et que dans ce cas, $b = \cos \beta$, on en conclura

$$\int \frac{d\omega \cos^{2n} \omega}{\sqrt{(\sin^2 \beta - \sin^2 \omega)}} = \int \Delta^{2n-1} d\varphi;$$

c'est en effet ce qui résulte immédiatement de la substitution..... $\sin \omega = \sin \beta \sin \varphi$.

De là on voit qu'on a généralement

$$\int \frac{d\omega \cos^{2n} \omega}{\sqrt{(\sin^2 \beta - \sin^2 \omega)}} = \cos^{2n} \beta \int \frac{d\omega}{\cos^{2n} \omega \sqrt{(\sin^2 \beta - \sin^2 \omega)}},$$

ces deux intégrales étant prises entre les limites $\omega = 0$, $\omega = \beta$.

CASE XIV.

253. Il suffit de la substitution $\cos^2 \omega = \frac{\cos^2 \gamma}{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi}$, pour obtenir les deux formules générales comprises dans cette case.

(*) Cette formule a été démontrée art. 148, mais on y parvient directement en faisant $\tang \varphi = \frac{1}{b} \cot \psi$, car alors $\int \frac{d\varphi}{\Delta^{2n+1}}$ a pour tranformée $-\frac{1}{b^{2n}} \int d\psi \Delta^{2n-1}(\psi)$; or cette dernière intégrale devant être prise depuis $\psi = \frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $\psi = 0$, est la même que $\frac{1}{b^2 n} \int d\varphi \Delta^{2n-1}(\varphi)$ prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Les intégrales en φ s'étendent jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; ainsi elles s'exprimeront toutes par les trois fonctions complètes $F^1(c)$, $E^1(c)$, $\Pi^1(-c^2 \sin^2 \beta, c)$. Cette dernière peut d'ailleurs s'exprimer en fonctions de la première et de la deuxième espèce, au moyen de la formule du n° 116, qui donne

$$\Pi^1(-c^2 \sin^2 \beta, c) = F^1(c) + \frac{\tang \beta}{\cos \gamma}[F^1(c) E(c, \beta) - E^1(c) F(c, \beta)].$$

Si on a $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, ce qui donne

$$\beta = \alpha, \quad P = \cos \omega, \quad Q = \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \omega)},$$

les formules précédentes ne peuvent avoir lieu, parce que la valeur de $\cos^2 \omega$ ne peut plus être représentée par la formule supposée. Alors on a l'intégrale

$$T^{2n} = \int \frac{d\omega \cos^{2n-1} \omega}{\sqrt{(1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \omega)}}, \qquad \begin{cases} \omega = 0, \\ \omega = \frac{1}{2}\pi, \end{cases}$$

dans laquelle faisant $\sin \omega = \tang \alpha \tang \varphi$, on obtient la transformée

$$T^{2n} = \frac{1}{\cos^{2n-1} \alpha} \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \varphi}\right)^{n-1}. \qquad \begin{cases} \varphi = 0, \\ \varphi = \frac{1}{2}\pi - \alpha. \end{cases}$$

Cette intégrale ne dépend en général que de la transcendante $\int \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$ qui, dans les limites données, se réduit à $\frac{1}{2} \mathcal{L}\left(\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}\right)$, ou à $\log \cot \frac{1}{2} \alpha$.

CASE XV.

254. Il s'agit de faire voir que les quatre intégrales désignées par T, V, T′, V′, peuvent être transformées en quatre autres d'une forme plus simple, et qui ne contiennent qu'un radical.

Pour cet effet, substituons d'abord, au lieu de ω, la suite..... $\tang \omega - \frac{1}{3} \tang^3 \omega + \frac{1}{5} \tang^5 \omega -$ etc., on aura la première de ces intégrales

$$T = \int \frac{d\omega}{PQ} \left(\frac{1}{3} \tang \omega - \frac{1}{5} \tang^3 \omega + \text{etc.}\right).$$

Soit ensuite $\tang \omega = \tang \gamma \cos \zeta$ et $c = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$, on aura la transformée

$$T = \frac{\tang \gamma}{\sin \beta} \int \frac{d\zeta \cos \zeta}{\Delta} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \tang^2 \gamma \cos^2 \zeta + \frac{1}{7} \tang^4 \gamma \cos^4 \zeta - \text{etc.}\right).$$

Supposons qu'on ait déterminé généralement, pour une valeur quelconque de m, l'intégrale

$$Z = \int \frac{d\zeta \cos \zeta}{\Delta} \left(\frac{m^3}{3} - \frac{m^5}{5} \cos^2 \zeta + \frac{m^7}{7} \cos^4 \zeta - \text{etc.}\right);$$

si dans cette intégrale on fait $m = \text{tang}\,\gamma$, et que Z se change en Z′, on aura alors $T = \frac{Z'}{\sin\zeta\,\text{tang}^2\gamma}$; ainsi tout se réduit à trouver la valeur de Z. Or en différenciant par rapport à m, on a

$$\frac{dZ}{dm} = \int \frac{d\zeta\cos\zeta}{\Delta}(m^2 - m^4\cos^2\zeta + m^6\cos^4\zeta - \text{etc.}) = \int \frac{m^2 d\zeta\cos\zeta}{(1+m^2\cos^2\zeta)\Delta}.$$

Soit $c\sin\zeta = \sin\psi$, ce qui donne $\Delta = \cos\psi$, on aura

$$\frac{dZ}{dm} = \frac{m^2}{c}\cdot\int \frac{d\psi}{(1+m^2)\cos^2\psi + \left(1 - \frac{b^2m^2}{c^2}\right)\sin^2\psi}.$$

Avant d'aller plus loin, j'observe que la valeur de m qu'il faudra substituer après les intégrations étant $\text{tang}\,\gamma$, la quantité $1 - \frac{b^2m^2}{c^2}$ est toujours positive. Soit donc

$$n^2 = \frac{1 - \frac{b^2m^2}{c^2}}{1+m^2},$$

et on aura

$$\frac{dZ}{dm} = \frac{m^2}{c(1+m^2)}\int \frac{d\psi}{\cos^2\psi + n^2\sin^2\psi};$$

d'où l'on tire en effectuant l'intégration,

$$\frac{dZ}{dm} = \frac{m^2}{c(1+m^2)}\,\text{arc tang}\,(n\,\text{tang}\,\psi).$$

Les limites de ζ étant o et $\frac{1}{2}\pi$, celles de $\text{tang}\,\psi$ sont o et $\frac{c}{b}$, faisant donc $\frac{nc}{b} = \text{tang}\,\varphi$, on aura

$$dZ = \frac{m^2 dm}{c(1+m^2)}\varphi.$$

Mais puisqu'on a $n = \frac{b}{c}\,\text{tang}\,\varphi$, on déduit de là,

$$m^2 = \frac{1}{b^2}(c^2 - \sin^2\varphi).$$

Ainsi en substituant la valeur de m en φ, on aura

$$Z = -\frac{1}{b^2}\int\varphi d\varphi\sqrt{(c^2 - \sin^2\varphi)}.$$

Cette intégrale doit être prise depuis la valeur de φ qui donne $m = 0$, jusqu'à celle qui donne $m = \text{tang}\,\gamma$: dans le premier cas on a $\varphi = \lambda$, et dans le second $\varphi = \theta$; et parce que λ est $> \theta$, il convient de mettre Z sous la forme

$$Z = \frac{1}{b^2}\int \varphi d\varphi \sqrt{(c^2 - \sin^2\varphi)}:$$

et l'intégrale devra être prise depuis $\varphi = \theta$, jusqu'à $\varphi = \lambda$.

De là résulte l'intégrale cherchée

$$T = \frac{\sin\zeta}{\sin^2\alpha \sin^2\gamma}\int \varphi d\varphi \sqrt{(\sin^2\lambda - \sin^2\varphi)}; \qquad \begin{cases} \varphi = \theta, \\ \varphi = \lambda. \end{cases}$$

c'est la première formule de la case XV. La seconde, qui donne la valeur de V, se démontrera d'une manière semblable.

255. Pour démontrer les formules qui concernent les deux intégrales T′, V′, il faudra substituer au lieu de Ω sa valeur développée en série, laquelle est $\sin\omega + \frac{1}{3}\sin^3\omega + \frac{1}{5}\sin^5\omega +$ etc. Du reste, le calcul sera entièrement semblable à celui dont nous avons donné le détail dans l'article précédent.

Si on fait $\sin\varphi = \sin\lambda \sin\psi$ et $\sin\lambda = c$; les valeurs trouvées pour $T + T'$ et $V + V'$ prendront cette forme

$$T + T' = \frac{\pi \sin\zeta \sin^2\lambda}{2\sin^2\alpha \sin^2\gamma}\int \frac{d\psi \cos^2\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}},$$

$$V + V' = \frac{\pi}{2\sin\zeta}\int \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}},$$

où les intégrales doivent être prises depuis $\psi = \alpha$ jusqu'à $\psi = \frac{1}{2}\pi$. On obtient ainsi pour les valeurs de ces intégrales, des expressions en fonctions elliptiques qui se transforment comme dans l'art. 238, et donnent les résultats consignés dans la table.

256. Ces mêmes résultats peuvent être obtenus d'une manière plus directe. Considérons pour cet effet la double intégrale

$$Z = \iint \frac{dp dq \sin p\,(A + B\cos^2 p)}{\cos^2 p + \sin^2 p\left(\frac{\cos^2 q}{\cos^2\alpha} + \cos^2\gamma \sin^2 q\right)},$$

dans laquelle les variables ont pour limites o et $\frac{1}{2}\pi$.

Si on exécute les intégrations d'abord par rapport à q, ensuite par rapport à p, et qu'on fasse $c = \frac{\sin\gamma}{\sin\zeta}$, on aura pour résultat

$$Z = B\left[-\frac{\pi\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha} + \frac{\pi\cos\alpha\sin\zeta}{2\sin^2\alpha\sin^2\gamma}E(c, \zeta)\right]$$
$$+ \frac{\pi\cos\alpha}{2\sin\zeta\sin^2\gamma}[A\sin^2\gamma - B\cos^2\gamma]F(c, \zeta).$$

Faisons maintenant les intégrations dans un ordre inverse, et soit

$\cos p = x$, nous aurons d'abord à intégrer la différentielle

$$dP = \frac{(A + Bx^2)dx}{x^2 + m^2(1 - x^2)},$$

où l'on a $m^2 = \frac{\cos^2 q}{\cos^2 \alpha} + \cos^2\gamma \sin^2 q$. Il faut pour cela distinguer deux cas, selon que m est plus grand ou plus petit que l'unité. Or je remarque que depuis $\sin q = 0$ jusqu'à $\sin q = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, la valeur de m est plus grande que l'unité, et qu'on peut faire $m = \frac{1}{\cos\omega}$; mais depuis $\sin q = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ jusqu'à $\sin q = 1$, on a $m < 1$, et il faut faire $m = \cos\omega$.

Soit, 1°. $m^2 = \frac{1}{\cos^2\omega} = \frac{\cos^2 q}{\cos^2\alpha} + \cos^2\gamma \sin^2 q$, on aura

$$dP = \cos^2\omega . \frac{dx(A + Bx^2)}{1 - x^2 \sin^2\omega}.$$

Intégrant depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, et appelant P' cette première partie de la valeur de P, on aura

$$P' = -B \cot^2\omega + (A \sin^2\omega + B)\,\Omega \cot^2\omega.$$

Il ne restera plus qu'à trouver la partie de l'intégrale Z, désignée semblablement par Z', dont la valeur est $\int P'dq$. On substituera pour cet effet la valeur de dq en fonction de ω, et on trouvera, d'après les dénominations de la table,

$$Z' = A \cos\alpha . V' + B \cos\alpha . T'.$$

Soit, 2°. $m = \cos^2\omega = \frac{\cos^2 q}{\cos^2\alpha} + \cos^2\gamma \sin^2 q$, on aura

$$dP = \frac{(A + Bx^2)\,dx}{\cos^2\omega + x^2 \sin^2\omega},$$

et l'intégrale de cette quantité, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, donne pour la seconde partie de la valeur de P,

$$P'' = \frac{B}{\sin^2\omega} + (A - B \cot^2\omega)\frac{\omega}{\sin\omega \cos\omega}.$$

De là résulte la seconde partie de la valeur de Z, $Z'' = \int P''dq$, dans laquelle substituant la valeur de dq en fonction de ω, on trouve

$$Z'' = A \cos\alpha . V + B \cos\alpha . T,$$

donc enfin la valeur totale de Z est

$$Z = A \cos\alpha (V + V') + B \cos\alpha (T + T').$$

Comparant entre elles les deux valeurs de Z, on en tire les deux formules données dans la table pour exprimer les valeurs de $T+T'$ et $V+V'$.

Le cas de $\gamma=\alpha$, où l'on a $\cos\mathcal{C}=\cos^2\alpha$, mérite d'être remarqué, parce qu'alors les quatre intégrales T, T', V, V', sont prises entre les mêmes limites $\omega=0$, $\omega=\alpha$. Il conduit aux formules rapportées dans la table.

Enfin, le cas de $\gamma=\frac{1}{2}\pi$, où l'on a $\mathcal{C}=\frac{1}{2}\pi$, $\lambda=\frac{1}{2}\pi$, $\theta=\frac{1}{2}\pi-\alpha$, donne ces valeurs très simples de T et T',

$$T=\frac{1}{\sin^2\alpha}\int\varphi d\varphi\cos\varphi,\quad T'=\frac{1}{\sin^2\alpha}\int(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi)\,d\varphi\cos\varphi,$$

où les intégrales doivent être prises depuis $\varphi=\frac{1}{2}\pi-\alpha$ jusqu'à $\varphi=\frac{1}{2}\pi$. Or en général on a

$$\int\varphi d\varphi\cos\varphi=\varphi\sin\varphi+\cos\varphi+\text{const.},$$
$$\int(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi)\,d\varphi\cos\varphi=(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi)\sin\varphi-\cos\varphi+\text{const.}$$

Donc entre les deux limites désignées, la première de ces intégrales $=\frac{1}{2}\pi(1-\cos\alpha)+\alpha\cos\alpha-\sin\alpha$, et la seconde $=\sin\alpha-\alpha\cos\alpha$. De là résultent les deux formules

$$\int\frac{(1-\omega\cot\omega)\,d\omega}{\sin\omega\sqrt{(1-\cos^2\alpha\cos^2\omega)}}=\frac{\frac{1}{2}\pi}{1+\cos\alpha}+\frac{\alpha\cot\alpha-1}{\sin\alpha},\qquad\begin{cases}\omega=0,\\ \omega=\frac{1}{2}\pi.\end{cases}$$
$$\int\frac{(\Omega-\sin\omega)\,d\omega\cos\omega}{\sin^2\omega\sqrt{(\sin^2\alpha-\sin^2\omega)}}=\frac{1-\alpha\cot\alpha}{\sin\alpha},\qquad\begin{cases}\omega=0,\\ \omega=\alpha.\end{cases}$$

où l'on doit remarquer que la première de ces intégrales est prise depuis $\omega=0$ jusqu'à $\omega=\frac{1}{2}\pi$, et la seconde depuis $\omega=0$ jusqu'à $\omega=\alpha$.

Ces deux résultats peuvent se vérifier par l'intégration directe. En effet, on a indéfiniment

$$\int\frac{(1-\omega\cot\omega)\,d\omega}{\sin\omega\sqrt{(1-\cos^2\alpha\cos^2\omega)}}=\frac{\omega\sqrt{(1-\cos^2\alpha\cos^2\omega)}}{\sin^2\alpha\sin\omega}$$
$$+\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\operatorname{arc\,sin}(\cos\omega\cos\alpha)+C.$$

Prenant cette intégrale depuis $\omega=0$ jusqu'à $\omega=\frac{1}{2}\pi$, elle se réduit à $\frac{\frac{1}{2}\pi}{1+\cos\alpha}+\frac{\alpha\cot\alpha-1}{\sin\alpha}$.

On a de même en général

$$\int\frac{(\Omega-\sin\omega)\,d\omega\cos\omega}{\sin^2\omega\sqrt{(\sin^2\alpha-\sin^2\omega)}}=-\frac{\Omega\sqrt{(\sin^2\alpha-\sin^2\omega)}}{\sin^2\alpha\sin\omega}+\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\omega}\right)+C.$$

Prenant cette intégrale depuis $\omega=0$ jusqu'à $\omega=\alpha$, elle se réduit à $\frac{1-\alpha\cot\alpha}{\sin\alpha}$, comme on le trouve à la fin de la case XV.

CASE XVI.

257. Par les formules des cases I, II, IV, V et VI, on peut connaître en général la valeur de l'intégrale $\int \frac{d\omega}{MN} \cos^m \omega \sin^n \omega$, quels que soient les nombres entiers m et n, positifs ou négatifs, pourvu que $m+n$ soit pair. Les formules de la case XVI donneront la valeur de cette intégrale lorsque $m+n$ sera impair.

Soit pour cet effet $\sin^2\omega = \sin^2\alpha \sin^2\varphi + \sin^2\beta \cos^2\varphi = \sin^2\beta(1 - c^2 \sin^2\varphi)$, et $c^2 = 1 - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}$, on aura en général

$$\int \frac{d\omega \cos\omega \sin^{2n}\omega}{MN} = \sin^{2n+1}\beta \int \Delta^{2n-1} d\varphi.$$

Cette intégrale devra être prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; ainsi elle ne dépendra en général que des deux fonctions complètes $F^1(c)$, $E^1(c)$. Il en sera de même de l'intégrale générale

$$\int \frac{d\omega \cos\omega}{MN \sin^{2n}\omega} = \frac{1}{\sin^{2n+1}\beta} \int \frac{d\varphi}{\Delta^{2n+1}} = \frac{1}{\sin\beta \sin^{2n}\alpha} \int \Delta^{2n-1} d\varphi,$$

et ainsi on a, quel que soit n,

$$\int \frac{d\omega \cos\omega}{MN \sin^{2n}\omega} = \frac{1}{\sin^{2n}\alpha \sin^{2n}\beta} \int \frac{d\omega \cos\omega \sin^{2n}\omega}{MN}.$$

Par la même substitution on trouve en général

$$\int \frac{d\omega}{MN \cos^{2n-1}\omega} = \frac{1}{\sin\beta \cos^{2n}\beta} \int \frac{d\varphi}{(1 + c^2 \tang^2\beta \sin^2\varphi)^n \Delta},$$

intégrale qui, étant réduite d'après la formule $\int \frac{d\varphi}{D^m \Delta}$ de la case VI, pourra toujours s'exprimer par les trois fonctions complètes $F^1(c)$, $E^1(c)$, $\Pi^1(c^2 \tang^2\beta, c)$; et cette dernière, comme on sait, peut être exprimée en fonctions de la première et de la deuxième espèce, par la formule du n° 107.

Les trois autres formules générales de la case XVI, se déduisent des trois précédentes en mettant $\frac{1}{2}\pi - \beta$ et $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ à la place de α et β.

TABLE GÉNÉRALE DES FORMULES.

CASE I.

Dénominations $\begin{cases} M = \sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)}, \\ N = \sqrt{(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}, \\ k = \dfrac{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}{\sin^2\beta}. \end{cases}$

Limites des intégrales $\begin{cases} \omega = \alpha, \\ \omega = \beta. \end{cases}$

$$\int \frac{d\omega \cos\omega \sin\omega}{MN} = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\int \frac{d\omega \cos\omega \sin^3\omega}{MN} = \frac{\pi}{2}\left(\tfrac{1}{2}\sin^2\alpha + \tfrac{1}{2}\sin^2\beta\right),$$

$$\int \frac{d\omega \cos\omega \sin^5\omega}{MN} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1.3}{2.4}\sin^4\alpha + \tfrac{1}{2}\sin^2\alpha \,.\, \tfrac{1}{2}\sin^2\beta + \frac{1.3}{2.4}\sin^4\beta\right),$$

$$\vdots$$

et en général,

$$\int \frac{d\omega \cos\omega \sin^{2n+1}\omega}{MN} = \int d\varphi\,(\sin^2\alpha\cos^2\varphi + \sin^2\beta\sin^2\varphi)^n, \qquad \text{Lim.} \begin{cases} \varphi = 0, \\ \varphi = \tfrac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

ou, en effectuant l'intégration,

$$\int \frac{d\omega \cos\omega \sin^{2n+1}\omega}{MN} = \frac{\pi}{2}\sin^{2n}\beta\left(1 - nk \,.\, \tfrac{1}{2} + \frac{n.n-1}{2}k^2 \,.\, \frac{1.3}{2.4} - \text{etc.}\right).$$

$$\int \frac{d\omega \cos\omega}{MN \sin\omega} = \frac{\pi}{2\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\int \frac{d\omega \cos\omega}{MN \sin^3\omega} = \frac{\pi}{2\sin^3\alpha\sin^3\beta}\left(\tfrac{1}{2}\sin^2\alpha + \tfrac{1}{2}\sin^2\beta\right),$$

et en général,

$$\int \frac{d\omega \cos\omega}{MN \sin^{2n+1}\omega} = \frac{1}{\sin^{2n+1}\alpha\sin^{2n+1}\beta}\int \frac{d\omega \cos\omega \sin^{2n+1}\omega}{MN}.$$

CASE II.

Mêmes dénominations et limites que dans la case I.

De plus, $h = \dfrac{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}{\cos^2\alpha}$,

$$\int \frac{d\omega \sin\omega \cos\omega}{MN} = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\int \frac{d\omega \sin\omega \cos^3\omega}{MN} = \frac{\pi}{2}\left(\tfrac{1}{2}\cos^2\beta + \tfrac{1}{2}\cos^2\alpha\right),$$

$$\int \frac{d\omega \sin\omega \cos^5\omega}{MN} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1.3}{2.4}\cos^4\beta + \tfrac{1}{2}\cos^2\beta \,.\, \tfrac{1}{2}\cos^2\alpha + \frac{1.3}{2.4}\cos^4\alpha\right),$$

$\vdots$

et en général,

$$\int \frac{d\omega \sin\omega \cos^{2n+1}\omega}{MN} = \frac{\pi}{2}\cos^{2n}\alpha\left(1 - nh \,.\, \tfrac{1}{2} + \frac{n.n-1}{2} h^2 . \frac{1.3}{2.4} - \text{etc.}\right).$$

$$\int \frac{d\omega \sin\omega}{MN\cos\omega} = \frac{\pi}{2\cos\beta\cos\alpha},$$

$$\int \frac{d\omega \sin\omega}{MN\cos^3\omega} = \frac{\pi}{2\cos^3\beta\cos^3\alpha}\left(\tfrac{1}{2}\cos^2\beta + \tfrac{1}{2}\cos^2\alpha\right),$$

$\vdots$

et en général,

$$\int \frac{d\omega \sin\omega}{MN\cos^{2n+1}\omega} = \frac{1}{\cos^{2n+1}\beta\cos^{2n+1}\alpha}\int \frac{d\omega \sin\omega\cos^{2n+1}\omega}{MN}.$$

CASE III. Mêmes dénominations et limites que dans les cases I et II.

$$A^{2n} = \int \frac{MN d\omega \cos\omega}{\sin^{2n+1}\omega},$$

$$A^0 = \frac{\pi}{4}(\sin\beta - \sin\alpha)^2,$$

$$A^2 = \frac{\pi(\sin\beta - \sin\alpha)^2}{4\sin\alpha\sin\beta},$$

$$A^4 = \frac{\pi(\sin^2\beta - \sin^2\alpha)^2}{16\sin^3\alpha\sin^3\beta},$$

$$A^6 = \frac{\pi(\sin^2\beta - \sin^2\alpha)^2}{32\sin^5\alpha\sin^5\beta}(\sin^2\alpha + \sin^2\beta),$$

$\vdots$

et en général,

$$A^{2n} = \frac{\pi k^2 \sin\beta}{4\sin^{2n-1}\alpha}\left(\frac{1}{4} - \frac{n-2}{1}k . \frac{1.3}{4.6} + \frac{n-2.n-3}{1.2}k^2 . \frac{1.3.5}{4.6\ 8} - \text{etc.}\right).$$

$$B^{2n} = \int \frac{MN d\omega \sin\omega}{\cos^{2n+1}\omega},$$

$$B^0 = \frac{\pi}{4}(\cos\alpha - \cos\beta)^2,$$

$$B^2 = \frac{\pi(\cos\alpha - \cos\zeta)^2}{4\cos\alpha\cos\zeta},$$

$$B^4 = \frac{\pi(\cos^2\alpha - \cos^2\zeta)^2}{16\cos^3\alpha\cos^3\zeta},$$

$$\vdots$$

et en général,

$$B^{2n} = \frac{\pi h^2\cos\alpha}{4\cos^{2n-1}\zeta}\left(\frac{1}{4} - \frac{n-2}{1}h.\frac{1.3}{4.6} + \frac{n-2.n-3}{1.2}h^2.\frac{1.3.5}{4.6.8} - \text{etc.}\right).$$

$$C^{2n} = \int MNd\omega\cos\omega\sin^{2n-3}\omega,$$

$$C^0 = \frac{\pi(\sin\zeta - \sin\alpha)^2}{4\sin\alpha\sin\zeta},$$

$$C^2 = \frac{\pi}{4}(\sin\zeta - \sin\alpha)^2,$$

$$C^4 = \frac{\pi}{16}(\sin^2\zeta - \sin^2\alpha)^2,$$

$$\vdots$$

$$C^{2n} = \sin^{2n-1}\alpha\sin^{2n-1}\zeta.A^{2n}.$$

$$D^{2n} = \int\frac{MNd\omega}{\cos\omega\sin^{2n+1}\omega},$$

$$D^0 = \frac{\pi}{2}[1 - \cos(\zeta - \alpha)],$$

$$D^2 = \frac{\pi\sin^2(\zeta - \alpha)}{4\sin\alpha\sin\zeta},$$

$$D^4 = D^2 + A^4,$$

$$\vdots$$

$$D^{2n} = D^{2n-2} + A^{2n}.$$

$$K^{2n} = \int\frac{MNd\omega}{\sin\omega\cos^{2n+1}\omega},$$

$$K^0 = \frac{\pi}{2}[1 - \cos(\zeta - \alpha)],$$

$$K^2 = \frac{\pi\sin^2(\zeta - \alpha)}{4\cos\alpha\cos\zeta},$$

$$\vdots$$

$$K^{2n} = K^{2n-2} + B^{2n}.$$

$$H^{2n} = \int \frac{MN d\omega \sin^{2n-1}\omega}{\cos\omega},$$

$$H^0 = \frac{\pi}{2}[1 - \cos(\zeta - \alpha)],$$

$$H^2 = \frac{\pi}{2}(\cos\alpha - \cos\zeta)^2,$$

$$H^4 = H^2 - C^4,$$

$$\vdots$$

$$H^{2n} = H^{2n-2} - C^{2n}.$$

CASE IV.

Dénominations.
- M et N comme dans la case I.
- Limites des intégrales, *idem*.
- γ angle auxiliaire tel que $\cos\gamma = \frac{\cos\zeta}{\cos\alpha}$.
- Module $c = \frac{\sin\gamma}{\sin\zeta}$.
- Son complément $b = \frac{\tang\alpha}{\tang\zeta}$.
- $\Delta = \sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}$.

$$\int \frac{d\omega}{MN} = \frac{1}{\cos\alpha\sin\zeta} F^1(c),$$

$$\int \frac{d\omega}{MN\sin^2\omega} = \frac{1}{\cos\alpha\sin\zeta} F^1(c) + \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha\sin\zeta} E^1(c),$$

$$\vdots$$

$$\int \frac{d\omega}{MN\sin^{2n}\omega} = \frac{1}{\cos\alpha\sin\zeta}\int \frac{d\varphi}{\Delta}(1 + \Delta^2\cot^2\alpha)^n \qquad \begin{cases} \varphi = 0, \\ \varphi = \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

Connaissant les deux premiers termes $\int \frac{d\varphi}{\Delta} = F^1(c)$, $\int \Delta d\varphi = E^1(c)$, on connaîtra en général l'intégrale $\int \Delta^{2n+1} d\varphi$ par la formule

$$\int \Delta^{2n+1} d\varphi = \frac{2n}{2n+1}(2 - c^2)\int \Delta^{2n-1} d\varphi - \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right) b^2 \int \Delta^{2n-3} d\varphi.$$

CASE V.

Mêmes dénominations que dans la case IV.

$$\int \frac{d\omega}{MN} = \frac{1}{\cos\alpha\sin\zeta} F^1(c),$$

$$\int \frac{d\omega}{MN\cos^2\omega} = \frac{1}{\cos\alpha\sin\zeta} F^1(c) + \frac{\sin\zeta}{\cos\alpha\cos\zeta} E^1(c),$$

$$\vdots$$

$$\int \frac{d\omega}{\mathrm{MN}\cos^{2n}\omega} = \frac{1}{\cos\alpha\sin\zeta}\int \frac{d\varphi}{\Delta}(1+\Delta^2\tang^2\zeta)^n \qquad \left\{\begin{array}{l}\varphi=0,\\ \varphi=\frac{1}{2}\pi.\end{array}\right.$$

Ces formules se développent comme celles de la case précédente, et on peut les exprimer toutes par les deux fonctions complètes $F^1(c)$, $E^1(c)$.

CASE VI. Mêmes dénominations que dans la case IV.

$$\int \frac{d\omega}{\mathrm{MN}} = \frac{1}{\cos\alpha\sin\zeta}F^1(c),$$

$$\int \frac{d\omega\sin^2\omega}{\mathrm{MN}} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\sin\zeta}\Pi^1(-c^2\cos^2\alpha, c) = \frac{\sin\zeta}{\cos\zeta}F^1 + E^1F(\zeta) - F^1E(\zeta),$$

$$\int \frac{d\omega\sin^4\omega}{\mathrm{MN}} = \frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha\sin\zeta}(1+\sin^2\alpha+\sin^2\zeta)\Pi^1(-c^2\cos^2\alpha, c)$$
$$-\frac{\sin\zeta\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}F^1(c) - \frac{\sin\zeta\cos\alpha}{2}E^1(c),$$

$$\vdots$$

$$\int \frac{d\omega\sin^{2m}\omega}{\mathrm{MN}} = \frac{\sin^{2m}\alpha}{\cos\alpha\sin\zeta}\int \frac{d\varphi}{\Delta(1-c^2\cos^2\alpha\sin^2\varphi)^m} \qquad \left\{\begin{array}{l}\varphi=0,\\ \varphi=\frac{1}{2}\pi.\end{array}\right.$$

Pour effectuer les réductions, soit $1+n\sin^2\varphi = \mathrm{D}$, on aura en général la formule

$$(n+1)(n+c^2)\int\frac{d\varphi}{\Delta\mathrm{D}^m} = \frac{2m-3}{2m-2}[n^2+2n(1+c^2)+3c^2]\int\frac{d\varphi}{\Delta\mathrm{D}^{m-1}}$$
$$-\left(\frac{2m-4}{2m-2}\right)(n+nc^2+3c^2)\int\frac{d\varphi}{\Delta\mathrm{D}^{m-2}}$$
$$+\frac{2m-5}{2m-2}c^2\int\frac{d\varphi}{\Delta\mathrm{D}^{m-3}}.$$

Ainsi en partant des trois premiers termes connus, où l'on a $n = -c^2\cos^2\alpha$,

$$\int\frac{\mathrm{D}d\varphi}{\Delta} = \left(1+\frac{n}{c^2}\right)F^1(c) - \frac{n}{c^2}E^1(c),$$

$$\int\frac{d\varphi}{\Delta} = F^1(c),$$

$$\int\frac{d\varphi}{\Delta\mathrm{D}} = \Pi^1(n, c),$$

on déterminera généralement l'intégrale $\int\frac{d\varphi}{\Delta\mathrm{D}^m}$ prise entre les limites $\varphi=0$, $\varphi=\frac{1}{2}\pi$.

COROLLAIRES.

$$\int\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}d\omega = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\sin\zeta}\Pi^1(-c^2\cos^2\alpha, c) - \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\sin\zeta}F^1(c),$$

$$\int\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}d\omega = F^1(c)\,E(c,\zeta) - E^1(c)\,F(c,\zeta),$$

$$\int \frac{d\omega \sin\omega}{\sqrt{(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \tfrac{1}{2}\,\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}\right), \qquad \begin{cases} \omega = 0, \\ \omega = \beta. \end{cases}$$

$$\int \frac{d\omega \sin^3\omega}{\sqrt{(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \frac{1+\sin^2\beta}{4}\,\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}\right) - \tfrac{1}{2}\sin\beta.$$

Les deux dernières se vérifient par l'intégration directe en faisant $\cos\omega = \frac{\cos\beta}{\cos\varphi}$.

CASE VII. Mêmes dénominations que dans la case IV.

$$\int \frac{\omega d\omega}{MN} = \frac{\pi}{2\cos\alpha\sin\beta} F(c, \beta),$$

$$\int \frac{\omega d\omega}{MN \sin^2\omega} = \frac{\pi(\sin\alpha - \sin\beta)}{2\sin^2\alpha\sin\beta} + \frac{\pi}{2\cos\alpha\sin\beta} F(c, \beta) + \frac{\pi\cos\alpha}{2\sin^2\alpha\sin\beta} E(c, \beta),$$

$$\int \frac{\omega d\omega}{MN \sin^4\omega} = -\frac{\pi(\sin\beta - \sin\alpha)^3}{12\sin^3\alpha\sin^5\beta} + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}\int\frac{\omega d\omega}{MN\sin^2\omega}$$
$$- \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1+\sin^2\alpha + \sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}\int\frac{\omega d\omega}{MN}.$$

En général, si on désigne par Z^{2n} l'intégrale $\int\frac{\omega d\omega}{MN\sin^{2n}\omega}$, on aura cette formule de réduction,

$$\begin{aligned}(2n+1)\sin^2\alpha\sin^2\beta Z^{2n+2} = {} & 2n(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta) Z^{2n} \\ & - (2n-1)(1+\sin^2\alpha + \sin^2\beta) Z^{2n-2} \\ & + (2n-2) Z^{2n-4} - A^{2n},\end{aligned}$$

A^{2n} étant l'intégrale $\int\frac{MN d\omega\cos\omega}{\sin^{2n+1}\omega}$, dont la valeur est donnée dans la case III.

COROLLAIRES.

$$\int \frac{(1-\omega\cot\omega)\,d\omega\cos\omega}{\sin^2\omega\sqrt{(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \frac{\pi}{4\sin^3\beta} - \frac{\pi\cos^2\beta}{8\sin^3\beta}\,\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}\right), \qquad \begin{cases} \omega = 0, \\ \omega = \beta. \end{cases}$$

$$\int (1-\omega\cot\omega)\,\frac{d\omega}{\sin^2\omega} = \frac{\pi}{4}, \qquad \begin{cases} \omega = 0, \\ \omega = \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

$$\int \frac{\omega d\omega\cos\omega}{\sin^2\omega\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)}} = \frac{\pi}{2\sin\alpha}(1 - \tang\tfrac{1}{2}\alpha). \qquad \begin{cases} \omega = \alpha, \\ \omega = \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

CASE VIII. Mêmes dénominations que dans la case IV.

$$\int \frac{\omega d\omega}{MN} = \frac{\pi}{2\cos\alpha\sin\beta} F(c, \beta),$$

$$\int \frac{\omega d\omega}{MN\cos^2\omega} = \frac{\pi(\cos\beta - \cos\alpha)}{2\cos^2\alpha\cos\beta} + \frac{\pi}{2\cos\alpha\sin\beta} F(c, \beta) + \frac{\pi\sin\beta}{2\cos\alpha\cos^2\beta} E(c, \beta),$$

$$\int\frac{\omega d\omega}{\mathrm{MN}\cos^4\omega}=\frac{\pi(\cos\alpha-\cos\beta)^2}{12\cos^3\alpha\cos^3\beta}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}\int\frac{\omega d\omega}{\mathrm{MN}\cos^2\omega}$$
$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{1+\cos^2\alpha+\cos^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}\int\frac{\omega d\omega}{\mathrm{MN}}.$$

En général, si on désigne par U^{2n} l'intégrale $\int\frac{\omega d\omega}{\mathrm{MN}\cos^{2n}\omega}$, on aura cette formule de réduction :

$$(2n+1)\cos^2\alpha\cos^2\beta\,.\,\mathrm{U}^{2n+2}=2n(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta)\,\mathrm{U}^{2n}$$
$$-(2n-1)(1+\cos^2\alpha+\cos^2\beta)\,\mathrm{U}^{2n-2}$$
$$+(2n-2)\,\mathrm{U}^{2n-4}+\mathrm{B}^{2n},$$

B^{2n} étant l'intégrale $\int\frac{\mathrm{MN}\,d\omega\sin\omega}{\cos^{2n+1}\omega}$, dont la valeur est donnée dans la case III.

COROLLAIRES.

$$\int\frac{\omega d\omega}{\sin\omega\sqrt{(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}}=\frac{\pi}{4\sin\beta}\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}\right)\qquad\left\{\begin{array}{l}\omega=0,\\ \omega=\beta.\end{array}\right.$$
$$\int\frac{\omega d\omega\sin\omega}{\cos^2\omega\sqrt{(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}}=\frac{\pi(1-\cos\beta)}{2\cos^2\beta}.$$

CASE IX. Mêmes dénominations que dans la case IV.

$$\int\frac{\omega d\omega}{\mathrm{MN}}=\frac{\pi}{2\cos\alpha\sin\beta}\mathrm{F}(c,\beta),$$
$$\int\frac{\omega d\omega\sin^2\omega}{\mathrm{MN}}=\frac{\pi}{2\cos\alpha\sin\beta}\mathrm{F}(c,\beta)-\frac{\pi\cos^2\beta}{2\cos\alpha\sin\beta}\Pi(-\sin^2\gamma,c,\beta)$$
$$-\frac{\pi}{4}\mathcal{L}(1+\sin^2\beta-\sin^2\alpha),$$
$$\int\frac{\omega d\omega\sin^4\omega}{\mathrm{MN}}=\frac{\pi}{8}(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)+\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2-\cos^2\alpha\cos^2\beta}{\cos\alpha\sin\beta}\mathrm{F}(c,\beta)-\frac{\pi}{4}\cos\alpha\sin\beta\,\mathrm{E}(c,\beta)$$
$$-\frac{\pi\cos^2\beta}{4\cos\alpha\sin\beta}(1+\sin^2\beta+\sin^2\alpha)\,\Pi(-\sin^2\gamma,q,\beta)$$
$$-\frac{\pi}{8}(1+\sin^2\beta+\sin^2\alpha)\,\mathcal{L}(1+\sin^2\beta-\sin^2\alpha).$$

En général soit $\mathrm{V}^{2n}=\int\frac{\omega d\omega\sin^{2n}\omega}{\mathrm{MN}}$, on aura la formule de réduction :

$$2n\mathrm{V}^{2n+2}=(2n-1)(1+\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\,\mathrm{V}^{2n}-(2n-2)(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta)\,\mathrm{V}^{2n-2}$$
$$+(2n-3)\sin^2\alpha\sin^2\beta\,\mathrm{V}^{2n-4}-\mathrm{C}^{2n},$$

C^{2n} étant l'intégrale $\int\mathrm{MN}d\omega\cos\omega\sin^{2n-3}\omega$, dont la valeur est donnée dans la case III.

Nota. La fonction $\Pi(-\sin^2\gamma,c,\beta)$ et la fonction $\Pi(-c^2\cos^2\alpha,\alpha,\mathcal{L})$, qui entre pour sa valeur complète dans les formules de la case VI, ont entre elles la

relation suivante, tirée de la formule de l'article 55,

$$\sin^2\alpha\,\Pi(-c^2\cos^2\alpha, c, \beta) + \cos^2\beta\,\Pi(-\sin^2\gamma, c, \beta)$$
$$= \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta}F(c,\beta) - \frac{\sin^2\gamma\cos\alpha}{2\sin\beta}\,\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin^2\beta-\sin^2\alpha}{1-\sin^2\beta+\sin^2\alpha}\right).$$

COROLLAIRES.

$$\int\frac{N}{M}\,\omega d\omega = \frac{\pi}{4}\mathcal{L}(1+\sin^2\beta-\sin^2\alpha) + \frac{\pi\cos^2\beta}{2\cos\alpha\sin\beta}\Pi(-\sin^2\gamma, c, \beta)$$
$$-\frac{\pi\cos^2\beta}{2\cos\alpha\sin\beta}F(c,\beta),$$

$$\int\frac{M}{N}\,\omega d\omega = -\frac{\pi}{4}\mathcal{L}(1+\sin^2\beta-\sin^2\alpha) - \frac{\pi\cos^2\beta}{2\cos\alpha\sin\beta}\Pi(-\sin^2\gamma, c, \beta)$$
$$+\frac{\pi\cos\alpha}{2\sin\beta}F(c,\beta),$$

$$\int\frac{\omega d\omega\sin\omega}{\sqrt{(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}} = \frac{\pi}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\cos\beta}\right), \qquad \begin{cases}\omega = 0,\\ \omega = \beta.\end{cases}$$

$$\int\frac{\omega d\omega}{\sin\omega}\sqrt{(\sin^2\beta-\sin^2\omega)} = \frac{\pi}{4}(1+\sin\beta)\,\mathcal{L}(1+\sin\beta) + \frac{\pi}{4}(1-\sin\beta)\,\mathcal{L}(1-\sin\beta),$$

$$\int\omega d\omega\sin\omega\sqrt{(\sin^2\beta-\sin^2\omega)} = \frac{\pi}{8}\sin^2\beta - \frac{\pi}{4}\cos^2\beta\,\mathcal{L}\left(\frac{1}{\cos\beta}\right),$$

$$\int\frac{\omega d\omega\sin^3\omega}{\sqrt{(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}} = \frac{\pi}{4}(1+\sin^2\beta)\,\mathcal{L}\frac{1}{\cos\beta} - \frac{\pi}{8}\sin^2\beta,$$

$$\int\frac{\omega d\omega\cos\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)}} = \tfrac{1}{2}\pi\,\mathcal{L}(1+\cos\alpha), \qquad \begin{cases}\omega = \alpha,\\ \omega = \tfrac{1}{2}\pi.\end{cases}$$

$$\int\frac{\omega d\omega\cos\omega}{\sin\omega} = \tfrac{1}{2}\pi\,\mathcal{L}2. \qquad \begin{cases}\omega = 0,\\ \omega = \tfrac{1}{2}\pi.\end{cases}$$

CASE X.

Dénominations. $\begin{cases} M \text{ et } N \text{ comme ci-dessus,}\\ \Omega = \int\frac{d\omega}{\cos\omega} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\omega}{1-\sin\omega}\right).\\ \text{module } c = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.\end{cases}$

Limites des intég. $\omega = \alpha$, $\omega = \beta$.

$$\int\frac{\Omega d\omega\cos\omega}{MN} = \frac{\pi}{2\sin\beta}F(c,\beta),$$

$$\int\frac{\Omega d\omega\cos\omega}{MN\sin^2\omega} = \frac{\pi}{2\sin\alpha\sin\beta} + \frac{\pi}{2\sin^2\alpha\sin\beta}F(c,\beta) - \frac{\pi}{2\sin^2\alpha\sin\beta}E(c,\beta),$$

$$\int\frac{\Omega d\omega\cos\omega}{MN\sin^4\omega} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}\int\frac{\Omega d\omega\cos\omega}{MN\sin^2\omega} - \frac{1}{3\sin^2\alpha\sin^2\beta}\int\frac{\Omega d\omega\cos\omega}{MN} - \frac{\pi\sin^2(\beta-\alpha)}{12\sin^3\alpha\sin^3\beta}.$$

En général, soit $P^{2n} = \int \frac{\Omega d\omega \cos\omega}{MN \sin^{2n}\omega}$, on aura cette formule de réduction :

$$(2n+1)\sin^2\alpha \sin^2\beta \,.\, P^{2n+2} = 2n(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)\, P^{2n} - (2n-1)\, P^{2n-2} - D^{2n},$$

D^{2n} étant l'intégrale $\int \frac{MN d\omega}{\cos\omega \sin^{2n+1}\omega}$, dont la valeur est donnée dans la case III.

COROLLAIRES.

$$\int \frac{\Omega d\omega \cos\omega}{\sin^2\omega} \cdot \frac{N}{M} = \frac{\pi \sin\beta}{2\sin\alpha} + \frac{\pi(\sin^2\beta - \sin^2\alpha)}{2\sin^2\alpha \sin\beta} F(c,\beta) - \frac{\pi \sin\beta}{2\sin^2\alpha} E(c,\beta),$$

$$\int \frac{\Omega d\omega \cos\omega}{\sin^2\omega} \cdot \frac{M}{N} = -\frac{\pi \sin\alpha}{2\sin\beta} + \frac{\pi}{2\sin\beta} E(c,\beta),$$

$$\int \frac{\Omega d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)}} = \frac{\pi}{2} F^1(\sin\alpha), \qquad \begin{cases} \omega = \alpha, \\ \omega = \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

$$\int \frac{\Omega d\omega}{\sin^2\omega} \sqrt{(\sin^2\omega + \sin^2\alpha)} = -\frac{\pi}{2}\sin\alpha + \frac{\pi}{2} E^1(\sin\alpha),$$

$$\int \frac{\Omega d\omega \cos\omega}{\sin\omega \sqrt{(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\beta}{\sin\beta}, \qquad \begin{cases} \omega = 0, \\ \omega = \beta. \end{cases}$$

$$\int \frac{(\Omega - \sin\omega)\, d\omega \cos\omega}{\sin^3\omega \sqrt{(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \frac{\pi}{4\sin^3\beta}(\beta - \sin\beta\cos\beta),$$

$$\int \frac{\Omega d\omega}{\sin\omega} = \frac{\pi^2}{4}, \qquad \begin{cases} \omega = 0, \\ \omega = \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

$$\int \left(\frac{\Omega}{\sin\omega} - 1\right) \frac{d\omega}{\sin^2\omega} = \frac{\pi^2}{8}.$$

CASE XI. Mêmes dénominations que dans la case précédente.

$$\int \frac{\Omega d\omega \cos\omega}{MN} = \frac{\pi}{2\sin\beta} F(c,\beta),$$

$$\int \frac{\Omega d\omega \cos\omega \sin^2\omega}{MN} = \frac{\pi}{2}(1 - \cos\alpha\cos\beta) + \frac{\pi}{2}\sin\beta\, F(c,\beta) - \frac{\pi}{2}\sin\beta\, E(c,\beta),$$

$$\int \frac{\Omega d\omega \cos\omega \sin^4\omega}{MN} = \frac{\pi}{12}(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + \frac{2}{3}(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)\int \frac{\Omega d\omega \cos\omega \sin^2\omega}{MN}$$
$$- \frac{1}{3}\sin^2\alpha \sin^2\beta \int \frac{\Omega d\omega \cos\omega}{MN}.$$

En général, si on désigne par Q^{2n} l'intégrale $\int \frac{\Omega d\omega \cos\omega \sin^{2n}\omega}{MN}$, on aura cette formule de réduction :

$$(2n+1\, Q^{2n+2} = 2n\,(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)\, Q^{2n} - (2n-1)\sin^2\alpha \sin^2\beta\, Q^{2n-2} + H^{2n},$$

H^{2n} étant l'intégrale $\int \frac{MN d\omega \sin^{2n-1}\omega}{\cos\omega}$, dont la valeur est donnée dans la case III.

COROLLAIRES.

$$\int \Omega d\omega \cos\omega . \frac{N}{M} = -\frac{\pi}{2}(1 - \cos\alpha\cos\beta) + \frac{\pi}{2}\sin\beta\, E(c, \beta),$$

$$\int \Omega d\omega \cos\omega . \frac{M}{N} = \frac{\pi}{2}(1 - \cos\alpha\cos\beta) + \frac{\pi(\sin^2\beta - \sin^2\alpha)}{2\sin\beta} F(c, \beta) - \frac{\pi}{2}\sin\beta\, E(c, \beta),$$

$$\int \frac{\Omega d\omega \sin\omega \cos\omega}{\sqrt{(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \frac{\pi}{2}(1 - \cos\beta), \qquad \begin{cases} \omega = 0, \\ \omega = \beta. \end{cases}$$

$$\int \frac{\Omega d\omega \cos^2\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)}} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} E'(\sin\alpha),$$

$$\int \Omega d\omega \sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\cos^2\alpha\, F'(\sin\alpha) - \frac{\pi}{2} E'(\sin\alpha), \qquad \begin{cases} \omega = \alpha, \\ \omega = \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

$$\int \frac{\Omega d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)}} \left(\sin^2\omega - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\omega}\right) = \frac{\pi}{2}(1 - \sin\alpha).$$

CASE XII.

Mêmes dénominations que dans la case X.

$$\int \frac{\Omega d\omega \cos\omega}{MN} = \frac{\pi}{2\sin\beta} F(c, \beta),$$

$$\int \frac{\Omega d\omega}{MN\cos\omega} = \frac{\pi}{2\sin\beta}\Pi(-\sin^2\alpha, c, \beta) + \frac{\pi}{4\cos\alpha\cos\beta}\mathcal{L}(1 + \tang^2\beta + \tang^2\alpha),$$

$$\int \frac{\Omega d\omega}{MN\cos^3\omega} = \frac{\pi(\sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\beta\cos^2\alpha)}{8\cos^3\alpha\cos^3\beta} + \frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta}\int\frac{\Omega d\omega}{MN\cos\omega}$$
$$- \frac{\pi}{4\sin\beta\cos^2\alpha} F(c, \beta) - \frac{\pi\sin\beta}{4\cos^2\alpha\cos^2\beta} E(c, \beta).$$

En général, si on désigne par T^{2n+1} l'intégrale $\int \frac{\Omega d\omega}{MN\cos^{2n+1}\omega}$, on aura cette formule de réduction :

$$2n\cos^2\alpha\cos^2\beta\, T^{2n+1} = (2n-1)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta)\, T^{2n-1}$$
$$- (2n-2)(1 + \cos^2\alpha + \cos^2\beta)\, T^{2n-3} + (2n-3)\, T^{2n-5} + B^{2n},$$

B^{2n} étant l'intégrale $\int \frac{MN d\omega \sin\omega}{\cos^{2n+1}\omega}$, dont la valeur est donnée dans la case III.

COROLLAIRES.

$$\int \frac{\Omega d\omega \sin\omega}{\cos\omega\sqrt{(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \frac{\pi}{2\cos\beta}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\cos\beta}\right), \qquad \begin{cases} \omega = 0, \\ \omega = \beta. \end{cases}$$

$$\int \frac{\Omega d\omega \sin^3\omega}{\cos^3\omega\sqrt{(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \frac{\pi\sin^2\beta}{8\cos^3\beta} + \frac{\pi}{4\cos^3\beta}\mathcal{L}\left(\frac{1}{\cos\beta}\right).$$

CASE XIII.

Dénominat. $\begin{cases} P = \sqrt{(\cos^2\omega - \cos^2\gamma)}, \\ Q = \sqrt{(1 - \cos^2\alpha\cos^2\omega)}, \end{cases}$

Angles auxiliaires. $\begin{cases} \zeta \ldots\ \cos\zeta = \cos\alpha\cos\gamma, \\ \theta \ldots\ \operatorname{tang}\theta = \sin\gamma\cot\alpha,\ \cos\theta = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\zeta},\ \sin\theta = \dfrac{\operatorname{tang}\gamma}{\operatorname{tang}\zeta}, \\ \lambda \ldots\ \operatorname{tang}\lambda = \dfrac{\operatorname{tang}\gamma}{\sin\alpha},\quad \sin\lambda = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\zeta},\ \cos\lambda = \dfrac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\zeta}. \end{cases}$

Limites des intégrales... $\omega = 0$, $\omega = \gamma$.

$$\int \frac{d\omega \sin\omega\cos\omega}{PQ} = \frac{\theta}{\cos\alpha},$$

$$\int \frac{d\omega \sin\omega\cos^3\omega}{PQ} = \left(\frac{1+\cos^2\zeta}{2\cos^3\alpha}\right)\theta - \frac{\sin\alpha\sin\gamma}{2\cos^2\alpha},$$

et en général,

$$\int \frac{d\omega \sin\omega\cos^{2n+1}\omega}{PQ} = \frac{1}{\cos^{2n+1}\alpha}\int d\psi\,(1-\sin^2\zeta\cos^2\psi)^n. \qquad \begin{cases} \psi = 0, \\ \psi = \theta. \end{cases}$$

Toutes ces intégrales s'expriment au moyen de l'angle θ; toutes les suivantes s'expriment au moyen de l'angle λ.

$$\int \frac{d\omega \sin\omega}{PQ\cos\omega} = \frac{\lambda}{\cos\gamma},$$

$$\int \frac{d\omega \sin\omega}{PQ\cos^3\omega} = \left(\frac{1+\cos^2\zeta}{2\cos^3\gamma}\right)\lambda + \frac{\sin\alpha\sin\gamma}{2\cos^2\gamma},$$

et en général,

$$\int \frac{d\omega \sin\omega}{PQ\cos^{2n+1}\omega} = \frac{1}{\cos^{2n+1}\gamma}\int d\varphi\,(1-\sin^2\zeta\sin^2\varphi)^n. \qquad \begin{cases} \varphi = 0, \\ \varphi = \lambda. \end{cases}$$

De cette dernière formule on déduit les deux suivantes, en faisant $c = \sin\zeta$ et $\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)} = \Delta$:

$$\int \frac{d\omega \sin\omega}{PQ\cos^{2n}\omega} = \frac{1}{\cos^{2n}\gamma}\int \Delta^{2n-1}d\varphi, \qquad \begin{cases} \varphi = 0, \\ \varphi = \lambda. \end{cases}$$

$$\int \frac{d\omega \sin\omega\cos^{2n}\omega}{PQ} = \cos^{2n}\gamma\int \frac{d\varphi}{\Delta^{2n+1}}.$$

COROLLAIRES.

$$\int \frac{d\omega}{\cos^{2n}\omega\sqrt{(\sin^2\zeta - \sin^2\omega)}} = \frac{1}{\cos^{2n}\zeta}\int \Delta^{2n-1}d\varphi, \qquad \begin{cases} \omega = 0, \\ \omega = \zeta, \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi = 0, \\ \varphi = \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

$$\int \frac{d\omega\cos^{2n}\omega}{\sqrt{(\sin^2\zeta - \sin^2\omega)}} = \cos^{2n}\zeta\int \frac{d\varphi}{\Delta^{2n+1}} = \int \Delta^{2n-1}d\varphi,$$

$$\int \frac{d\omega \sin\omega}{PQ} = F(c, \lambda) \qquad \begin{cases} \omega = 0, \\ \omega = \gamma. \end{cases}$$

$$\int \frac{d\omega \sin\omega}{PQ \cos^2\omega} = \frac{1}{\cos^2\gamma} E(c, \lambda),$$

$$\int \frac{d\omega \sin\omega \cos^2\omega}{PQ} = \frac{1}{\cos^2\alpha} E(c, \lambda) - \frac{\sin\alpha \sin\gamma}{\cos^2\alpha},$$

$$\int \frac{d\omega}{\sqrt{(\sin^2\gamma - \sin^2\omega)}} = F^1(\sin\gamma),$$

$$\int \frac{d\omega}{\cos^2\omega \sqrt{(\sin^2\gamma - \sin^2\omega)}} = \frac{1}{\cos^2\gamma} E^1(\sin\gamma),$$

$$\int \frac{d\omega \cos^2\omega}{\sqrt{(\sin^2\gamma - \sin^2\omega)}} = E^1(\sin\gamma).$$

CASE XIV. Dénominations et limites comme dans la case précédente.

$$\text{Module } c = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}.$$

$$\int \frac{d\omega}{PQ} = \frac{1}{\sin\beta} F^1(c),$$

$$\int \frac{d\omega}{PQ \cos^2\omega} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin\beta} F^1(c) + \frac{\sin\beta}{\cos^2\gamma} E^1(c),$$

et en général,

$$\int \frac{d\omega}{PQ \cos^{2n}\omega} = \frac{1}{\sin\beta \cos^{2n}\gamma} \int \frac{d\varphi}{\Delta} (\cos^2\beta + \Delta^2 \sin^2\beta)^n, \qquad \begin{cases} \varphi = 0, \\ \varphi = \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

intégrale qui pourra toujours s'exprimer au moyen des deux fonctions complètes $F^1(c)$, $E^1(c)$.

De la même formule on tire

$$\int \frac{d\omega \cos^2\omega}{PQ} = \frac{\cos^2\gamma}{\sin\beta} \Pi^1(-\sin^2\gamma, c),$$

et en général,

$$\int \frac{d\omega \cos^{2n}\omega}{PQ} = \frac{\cos^{2n}\gamma}{\sin\beta} \int \frac{d\varphi}{\Delta(1 - \sin^2\gamma \sin^2\varphi)^n}, \qquad \begin{cases} \varphi = 0, \\ \varphi = \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

intégrale qu'il sera toujours possible d'exprimer au moyen des trois fonctions complètes $F^1(c)$, $E^1(c)$, $\Pi^1(-\sin^2\gamma, c)$. D'ailleurs puisque $\sin^2\gamma = c^2 \sin^2\beta$, la troisième fonction se réduit aux fonctions de la première et de la deuxième espèce, par la formule du n° 116, qui donne

$$\Pi^1(-\sin^2\gamma, c) = F^1(c) + \frac{\operatorname{tang}\beta}{\cos\gamma} [F^1(c) E(c, \beta) - E^1(c) F(c, \beta)].$$

CASE XV. Mêmes dénominations que dans la case XIII.

Intégrales T et V prises entre les limites $\omega = 0$, $\omega = \gamma$.

$$T = \int \frac{(1 - \omega \cot \omega)\, d\omega \cot \omega}{\sqrt{(\sin^2\gamma - \sin^2\omega)}.\sqrt{(1 - \cos^2\alpha \cos^2\omega)}},$$

$$V = \int \frac{\omega d\omega}{\sqrt{(\sin^2\gamma - \sin^2\omega)}.\sqrt{(1 - \cos^2\alpha \cos^2\omega)}}.$$

Intégrales T′ et V′ prises entre les limites $\omega = 0$, $\omega = \alpha$.

$$T' = \int \frac{(\Omega - \sin\omega)\, d\omega \cos\omega}{\sin^2\omega \sqrt{(\sin^2\alpha - \sin^2\omega)}.\sqrt{(1 - \cos^2\gamma \cos^2\omega)}},$$

$$V' = \int \frac{\Omega d\omega \cos\omega}{\sqrt{(\sin^2\alpha - \sin^2\omega)}.\sqrt{(1 - \cos^2\gamma \cos^2\omega)}}.$$

Ces quatre intégrales se réduisent aux suivantes, qui ont pour limites $\varphi = \theta$, $\varphi = \lambda$:

$$T = \frac{\sin\theta}{\sin^2\alpha \sin^2\gamma} \int \varphi d\varphi \sqrt{(\sin^2\lambda - \sin^2\varphi)},$$

$$T' = \frac{\sin\theta}{\sin^2\alpha \sin^2\gamma} \int (\tfrac{1}{2}\pi - \varphi)\, d\varphi \sqrt{(\sin^2\lambda - \sin^2\varphi)},$$

$$V = \frac{1}{\sin\theta} \int \frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{(\sin^2\lambda - \sin^2\varphi)}},$$

$$V' = \frac{1}{\sin\theta} \int \frac{(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi)\, d\varphi}{\sqrt{(\sin^2\lambda - \sin^2\varphi)}}.$$

Il résulte de ces expressions les deux formules:

$$T + T' = \frac{\pi \sin\theta}{2 \sin^2\alpha \sin^2\gamma} \int d\varphi \sqrt{(\sin^2\lambda - \sin^2\varphi)},$$

$$V + V' = \frac{\pi}{2 \sin\theta} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\sin^2\lambda - \sin^2\varphi)}},$$

lesquelles peuvent être exprimées en fonctions elliptiques dont le module..... $c = \sin\lambda = \frac{\sin\gamma}{\sin\theta}$, de la manière suivante,

$$T + T' = \frac{\pi \sin\theta}{2 \sin^2\alpha \sin^2\gamma} E(c, \theta) - \frac{\pi \cos^2\gamma}{2 \sin\theta \sin^2\gamma} F(c, \theta) - \frac{\pi \cos\alpha}{2 \sin^2\alpha},$$

$$V + V' = \frac{\pi}{2 \sin\theta} F(c, \theta).$$

COROLLAIRES.

Des valeurs de $T + T'$ et $V + V'$, on déduit, en faisant $\gamma = \alpha$, et par suite, $\cos\theta = \cos^2\alpha$, $c = \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$, les deux formules suivantes:

$$\int \frac{(\omega + \Omega\cos\omega)\,d\omega}{\sqrt{(\cos^2\omega - \cos^2\alpha)}.\sqrt{(1-\cos^2\alpha\cos^2\omega)}} = \frac{\pi}{2\sin\zeta}\,\mathrm{F}(c,\zeta),$$

$$\int \frac{(\Omega - \omega\cos\omega)\,d\omega\cos\omega}{\sin^2\omega\sqrt{(\cos^2\omega - \cos^2\alpha)}.\sqrt{(1-\cos^2\alpha\cos^2\omega)}} = \frac{\pi\sin\zeta}{2\sin^4\alpha}\,\mathrm{E}(c,\zeta)$$

$$-\frac{\pi\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\sin\zeta}\,\mathrm{F}(c,\zeta) - \frac{\pi\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}.$$

Des valeurs de T et T′ on déduit encore les deux formules

$$\int \frac{(1-\omega\cot\omega)\,d\omega}{\sin\omega\sqrt{(1-\cos^2\alpha\cos^2\omega)}} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{1+\cos\alpha} + \frac{\alpha\cot\alpha - 1}{\sin\alpha}, \qquad \begin{cases}\omega = 0,\\ \omega = \frac{1}{2}\pi.\end{cases}$$

$$\int \frac{(\Omega - \sin\omega)\,d\omega\cos\omega}{\sin^2\omega\sqrt{(\sin^2\alpha - \sin^2\omega)}} = \frac{1-\alpha\cot\alpha}{\sin\alpha}. \qquad \begin{cases}\omega = 0,\\ \omega = \alpha.\end{cases}$$

CASE XVI.

Dénominat. $\begin{cases}\text{M et N comme dans la case I.}\\ \text{Module } c = \sqrt{\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{\sin\zeta}\right)},\ b = \frac{\sin\alpha}{\sin\zeta}.\end{cases}$

Limites des intégrales, $\omega = \alpha$, $\omega = \zeta$.

$$\int \frac{d\omega\cos\omega}{\mathrm{MN}} = \frac{1}{\sin\zeta}\,\mathrm{F}^1(c),$$

$$\int \frac{d\omega\cos\omega\sin^2\omega}{\mathrm{MN}} = \sin\zeta\,\mathrm{E}^1(c),$$

$$\int \frac{d\omega\cos\omega\sin^{2n}\omega}{\mathrm{MN}} = \sin^{2n-1}\zeta\int\Delta^{2n-1}d\varphi, \qquad \begin{cases}\varphi = 0,\\ \varphi = \frac{1}{2}\pi.\end{cases}$$

$$\int \frac{d\omega\cos\omega}{\mathrm{MN}\sin^2\omega} = \frac{1}{\sin^3\zeta}\int\frac{d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{\sin^2\alpha\sin\zeta}\,\mathrm{E}^1(c),$$

$$\int \frac{d\omega\cos\omega}{\mathrm{MN}\sin^{2n}\omega} = \frac{1}{\sin^{2n+1}\zeta}\int\frac{d\varphi}{\Delta^{2n+1}} = \frac{1}{\sin\zeta\sin^{2n}\alpha}\int\Delta^{2n-1}d\varphi.$$

$$\int \frac{d\omega}{\mathrm{MN}\cos\omega} = \frac{1}{\sin\zeta\cos^2\zeta}\,\Pi^1(c^2\tang^2\zeta, c),$$

$$\int \frac{d\omega}{\mathrm{MN}\cos^{2n-1}\zeta} = \frac{1}{\sin\zeta\cos^{2n}\zeta}\int\frac{d\omega}{\Delta(1+c^2\tang^2\zeta\sin^2\varphi)^n}. \qquad \begin{cases}\varphi = 0,\\ \varphi = \frac{1}{2}\pi.\end{cases}$$

Toutes ces intégrales peuvent s'exprimer par les trois fonctions complètes $\mathrm{F}^1(c)$, $\mathrm{E}^1(c)$, $\Pi^1(c^2\tang^2\zeta, c)$.

Si l'on change dans ces formules $\sin\alpha$ en $\cos\zeta$, et $\sin\zeta$ en $\cos\alpha$, ce qui donne pour c et b les valeurs $c = \sqrt{\left(1 - \frac{\cos^2\zeta}{\cos^2\alpha}\right)}$, $b = \frac{\cos\zeta}{\cos\alpha}$, ou, suivant les dénominations de la case IV, $c = \sin\gamma$, $b = \cos\gamma$, on aura les trois formules générales qui suivent :

$$\int \frac{d\omega \sin\omega \cos^{2n}\omega}{\mathrm{MN}} = \cos^{2n-1}\alpha \int \Delta^{2n-1} d\varphi, \qquad \begin{cases} \varphi = 0, \\ \varphi = \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

$$\int \frac{d\omega \sin\omega}{\mathrm{MN}\cos^{2n}\omega} = \frac{1}{\cos\alpha \cos^{2n}\zeta} \int \Delta^{2n-1} d\varphi,$$

$$\int \frac{d\omega}{\mathrm{MN}\sin^{2n-1}\omega} = \frac{1}{\cos\alpha \sin^{2n}\alpha} \int \frac{d\varphi}{\Delta(1 + c^2 \cot^2\alpha \sin^2\varphi)^n}.$$

Toutes ces intégrales peuvent donc encore s'exprimer par les trois fonctions complètes $F^1(c)$, $E^1(c)$, $\Pi^1(c^2 \cot^2\alpha, c)$.

Addition au Chapitre XXII.

258. On a vu dans l'article 96 que lorsque le paramètre n de la fonction proposée $\Pi(n, c, \varphi)$ est négatif et de la forme $-1 + b^2 \sin^2\theta$, le paramètre n^0 de la première transformée $\Pi(n^0, c^0, \varphi^0)$ est positif, ainsi que tous les suivans n^{00}, n^{000}, etc. Cette circonstance ne nuit en rien au succès de la méthode dont l'objet est de trouver une valeur approchée de la fonction $\Pi(n, c, \varphi)$. Cependant il ne sera pas inutile de faire voir comment, à partir d'un paramètre donné n de la forme $-1 + b^2 \sin^2\theta$, on peut exprimer successivement la fonction $\Pi(n, c, \varphi)$, par des fonctions semblables dont les paramètres sont de la même forme, et dont les modules se succèdent toujours dans l'ordre décroissant c, c^0, c^{00}, etc.

Nous avons déjà trouvé (art. 68) qu'en faisant $\sin\varphi = \frac{(1 + c^0)\sin\psi}{1 + c^0 \sin^2\psi}$, on a $F(c, \varphi) = (1 + c^0) F(c^0, \psi)$. On déduit de la même substitution.....
$E(c, \varphi) = \int \frac{(1 + c^0)\, d\psi}{\sqrt{(1 - c^{02} \sin^2\psi)}} \left(\frac{1 - c^0 \sin^2\psi}{1 + c^0 \sin^2\psi}\right)^2$, ce qui donne la formule

$$(1 + c^0)\, E(c, \varphi) = 2E(c^0, \psi) - b^{02} F(c^0, \psi) + V,$$

où l'on a
$$V = \frac{2c^0 \Delta(c^0, \psi) \sin\psi \cos\psi}{1 + c^0 \sin^2\psi} = 2c^0 \sin\psi \cos\varphi.$$

Ces formules ne diffèrent pas essentiellement de celles que nous avons données pour exprimer les fonctions $F(c, \varphi)$, $E(c, \varphi)$ par le moyen des fonctions $F(c^0, \varphi^0)$, $E(c^0, \varphi^0)$. On voit seulement ici que l'amplitude φ^0 de nos premières formules est remplacée par l'amplitude ψ, et la relation entre ces deux variables se trouvera en éliminant φ des deux équations..
$\sin\varphi = \frac{(1 + c^0)\sin\psi}{1 + c^0 \sin^2\psi}$, $\sin(2\varphi - \varphi^0) = c^0 \sin\varphi^0$, ce qui donne

$$\tang \varphi^\circ = \frac{2 \sin \psi \cos \psi \sqrt{(1 - c^{\circ 2} \sin^2 \psi)}}{1 - \sin^2 \psi + c^{\circ 2} \sin^4 \psi},$$

ou plus simplement $\tang \frac{1}{2} \varphi^\circ = \tang \psi \sqrt{(1 - c^{\circ 2} \sin^2 \psi)}$. C'est la formule ordinaire de duplication qui satisfait à l'équation $F(c^\circ, \varphi^\circ) = 2F(c^\circ, \psi)$.

L'amplitude ψ a la propriété de croître continuellement avec l'amplitude φ, et de coïncider avec elle dans toutes les valeurs multiples de $\frac{1}{2}\pi$; c'est pourquoi nous désignerons ψ par $\varphi_\circ$, suivant la notation de la seconde échelle, et par ce moyen on ne confondra pas $\varphi_\circ$ avec l'amplitude φ° de la première échelle, laquelle croît suivant une autre loi.

Nous remarquerons d'ailleurs que de l'équation $\sin \varphi = \frac{(1 + c^\circ) \sin \varphi_\circ}{1 + c^\circ \sin^2 \varphi_\circ}$, on déduit

$$\sin \varphi_\circ = \frac{(1 + b) \sin \varphi}{1 + \sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}}.$$

Ainsi on pourra prolonger à volonté la suite des amplitudes φ, $\varphi_\circ$, $\varphi_{\circ\circ}$, etc., après avoir préalablement calculé suivant les formules ordinaires, la suite des modules décroissans c, c°, $c^{\circ\circ}$, etc., et celle de leurs complémens b, b°, $b^{\circ\circ}$, etc.

259. Si on applique maintenant la même substitution à la fonction de troisième espèce $\Pi(n, c, \varphi) = \int \frac{1}{1 + n \sin^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta}$, on aura la transformée

$$\Pi = \int \frac{(1 + c^\circ) d\varphi^\circ}{\Delta_\circ} \cdot \frac{(1 + c^\circ \sin^2 \varphi_\circ)^2}{(1 + c^\circ \sin^2 \varphi_\circ)^2 + n (1 + c^\circ)^2 \sin^2 \varphi_\circ},$$

et on voit que le développement de cette formule produira deux fonctions de troisième espèce que nous désignerons par $\Pi(n_\circ, c^\circ, \varphi_\circ)$, $\Pi(m_\circ, c^\circ, \varphi_\circ)$, et dont les paramètres $n_\circ$, $m_\circ$, se détermineront par les équations

$$n_\circ + m_\circ = 2c^\circ + n(1 + c^\circ)^2,$$
$$n_\circ m_\circ = c^{\circ 2}.$$

Soit donc $n = -1 + b^2 \sin^2 \theta$; si on fait en même temps $n_\circ = -1 + b^{\circ 2} \sin^2 \lambda$ et $m_\circ = -1 + b^{\circ 2} \sin^2 \mu$, on déduira des équations précédentes

$$\sin^2 \lambda = \tfrac{1}{2}(1 + b \sin^2 \theta) + \tfrac{1}{2} \cos \theta \sqrt{(1 - b^2 \sin^2 \theta)},$$
$$\sin^2 \mu = \tfrac{1}{2}(1 + b \sin^2 \theta) - \tfrac{1}{2} \cos \theta \sqrt{(1 - b^2 \sin^2 \theta)};$$

d'où l'on voit que les angles λ et μ sont toujours réels et qu'ils satisfont à la condition $1 = c^\circ \tang \lambda \tang \mu$, ou $F(b^\circ, \lambda) + F(b^\circ, \mu) = F' b^\circ$. On pourra donc exprimer la fonction $\Pi(n, c, \varphi)$ par deux autres fonctions de la même

espèce rapportées au module c^0, et dont les paramètres n_0, m_0 sont de la même forme que le paramètre n. Mais comme ces paramètres n_0, m_0 satisfont à la condition $n_0 m_0 = c^{02}$, les deux fonctions pourront se réduire à une seule.

En effet par la formule du n° 49, on a, en faisant pour abréger.....

$$\tang \psi_0 = \frac{(1-c^0)\sin\theta \tang \varphi_0}{\Delta_0},$$

$$\int \frac{d\varphi_0}{\Delta_0} \cdot \frac{1 - c^{02}\sin^4\varphi_0}{(1+n_0\sin^2\varphi_0)(1+m_0\sin^2\varphi_0)} = \frac{\psi_0}{(1-c^0)\sin\theta};$$

prenant donc à volonté le coefficient k, on aura la formule

$$\Pi(n,c,\varphi) = \frac{k(1+c^0)}{(1-c^0)\sin\theta}\psi_0 + \int \frac{(1+c^0)d\varphi_0}{\Delta_0} \cdot \frac{(1+c^0\sin^2\varphi_0)[1-k+(1+k)c^0\sin^2\varphi_0]}{(1+n_0\sin^2\varphi_0)(1+m_0\sin^2\varphi_0)},$$

dans laquelle on peut faire disparaître du dénominateur le facteur..... $1+m_0\sin^2\varphi_0$. Il suffit pour cela de déterminer k par l'équation ..... $(1+k)c^0 = (1-k)m_0$, ce qui donnera

$$k = \frac{\Delta(b,\theta)}{b\cos\theta} = \sqrt{\left(\frac{n}{n+c^2}\right)};$$

alors la formule précédente se réduit à cette forme très simple

$$\Pi(n,c,\varphi) = \frac{k}{b\sin\theta}\psi_0 + (1+k)\,\mathrm{F}(c,\varphi) - 2k(1+c^0)\,\Pi(n_0, c^0, \varphi_0).$$

Une équation semblable donnera l'expression de $\Pi(n_0, c^0, \varphi_0)$ par le moyen de $\Pi(n_{00}, c^{00}, \varphi_{00})$, et ainsi successivement, jusqu'à ce que le module de la dernière fonction soit assez petit pour qu'on puisse négliger son carré. Arrivé à ce terme la fonction $\Pi(n_l, c^l, \varphi_l)$ se réduira à $\int \frac{d\varphi_l}{1+n_l\sin^2\varphi_l} = \frac{1}{\sqrt{(1+n_l)}} \cdot$ arc $\tang[\sqrt{(1+n_l)}\tang\varphi_l]$. On connaîtra donc la valeur de $\Pi(n, c, \varphi)$ avec un degré d'approximation qui a pour mesure le rapport de $(c_l)^2$ à l'unité.

260. La pratique de cette méthode se réduit, comme on voit, à calculer 1°. la suite des modules décroissans c^0, c^{00}, etc., et celle de leurs complémens b^0, b^{00}, etc.; 2°. la suite des amplitudes φ_0, φ_{00}, etc., selon la formule qui a été donnée pour déduire φ_0 de φ; 3°. l'angle λ qui détermine le paramètre $n_0 = -1 + b^{02}\sin^2\lambda$, et les angles semblables qui déterminent les autres paramètres. Appelons par analogie θ_0 l'angle λ qui détermine le paramètre n_0, comme l'angle θ détermine le paramètre n, la formule qui donne $\sin^2\lambda$ en fonction de $\sin\theta$ pourra se mettre sous la forme $\sin(2\theta_0 + \theta) = -b\sin\theta$, très propre au calcul trigonométrique. On voit par cette formule que $2\theta_0 + \theta$ sera toujours compris entre 180° et 270°; appelant donc α le plus petit

angle qui satisfait à l'équation $\sin\alpha = b \sin\theta$, on aura $2\theta_0 + \theta = 180° + \alpha$; on déterminera de même θ_{00} par θ_0 et ainsi successivement.

Dans le cas des fonctions complètes on est dispensé du calcul des amplitudes, puisque elles sont toutes égales à $\frac{1}{2}\pi$. Alors la formule générale devient

$$\Pi'(n, c, \varphi) = \frac{k}{b \sin\theta} \cdot \tfrac{1}{2}\pi + (1 + k)\, F'c - 2k\,(1 + c^0)\, \Pi'(n_0, c^0),$$

et on en déduit toutes les autres.

Nous remarquerons qu'on peut obtenir une seconde solution du même problème, en faisant disparaître le facteur $1 + n_0 \sin^2\varphi_0$ au lieu du facteur $1 + m_0 \sin^2\varphi_0$. Il faut pour cela changer le signe de k, ou prendre..... $k = -\frac{\Delta(b, \theta)}{b \cos\theta}$; on laissera subsister la dénomination de n_0 pour représenter m_0, et celle de θ_0 à la place de μ, et on aura l'équation $\sin(2\theta_0 - \theta) = b \sin\theta$, pour calculer successivement les angles θ_0, θ_{00}, etc., qui servent à déterminer les paramètres n_0, n_{00}, etc. On obtiendra ainsi une seconde formule générale de réduction entièrement semblable à la première et qui aurait le même usage.

Addition au Chapitre XXXI.

261. En vertu de la première échelle de modules toute fonction de première espèce $F(c, \varphi)$, dont le module et l'amplitude sont donnés, peut être transformée en une autre dont le module sera pris à volonté dans la suite infinie... c^{00}, c^0, c, c', c''..., formée suivant une loi connue d'après le module primitif c. En vertu de la seconde échelle des modules, la même fonction peut être transformée semblablement, de sorte que son module soit un terme quelconque de la suite... c_{00}, c_0, c, $c_{,}$, $c_{,,}$, ... formée suivant une autre loi d'après le même module primitif c; et nous avons remarqué que ces deux suites ne peuvent avoir aucun autre terme commun.

Imaginons que ces deux lignes de modules soient disposées à angles droits, leur point d'intersection étant le lieu du module primitif c; et supposons que les différens termes de chaque suite soient placés à des intervalles égaux sur leur ligne respective. Si l'on considère un terme quelconque de la première ligne (que nous supposerons horizontale) par exemple c'', on pourra par le point correspondant faire passer une ligne verticale, dans laquelle on placera, toujours à des intervalles égaux, les différens termes de la série des modules calculée suivant la loi de la seconde échelle, d'après le module

primitif c''. Cette série pourra être désignée par... $c''_{\circ\circ\circ}$, $c''_{\circ\circ}$, $c''_{\circ}$, c'', $c''_{,}$; $c''_{,,}$, $c''_{,,,}$, etc. De cette construction répétée pour chaque terme de la suite horizontale, résulte le tableau suivant, formant une sorte de damier dont les dimensions sont indéfinies et qui contient dans ses cases tous les modules déduits du module primitif c.

	$c^{\circ\circ\circ\circ}_{\text{IV}}$	$c^{\circ\circ\circ}_{\text{IV}}$	$c^{\circ\circ}_{\text{IV}}$	c°_{IV}	c_{IV}	c'_{IV}	c''_{IV}	c'''_{IV}	$c^{\text{IV}}_{\text{IV}}$
	$c^{\circ\circ\circ\circ}_{\text{III}}$	$c^{\circ\circ\circ}_{\text{III}}$	$c^{\circ\circ}_{\text{III}}$	c°_{III}	c_{III}	c'_{III}	c''_{III}	c'''_{III}	$c^{\text{IV}}_{\text{III}}$
	$c^{\circ\circ\circ\circ}_{\text{II}}$	$c^{\circ\circ\circ}_{\text{II}}$	$c^{\circ\circ}_{\text{II}}$	c°_{II}	c_{II}	c'_{II}	c''_{II}	c'''_{II}	$c^{\text{IV}}_{\text{II}}$
	$c^{\circ\circ\circ\circ}_{,}$	$c^{\circ\circ\circ}_{,}$	$c^{\circ\circ}_{,}$	$c^{\circ}_{,}$	$c_{,}$	$c'_{,}$	$c''_{,}$	$c'''_{,}$	$c^{\text{IV}}_{,}$
	$c^{\circ\circ\circ\circ}$	$c^{\circ\circ\circ}$	$c^{\circ\circ}$	c°	c	c'	c''	c'''	c^{IV}
	$c^{\circ\circ\circ\circ}_{\circ}$	$c^{\circ\circ\circ}_{\circ}$	$c^{\circ\circ}_{\circ}$	$c^{\circ}_{\circ}$	$c_{\circ}$	$c'_{\circ}$	$c''_{\circ}$	$c'''_{\circ}$	$c^{\text{IV}}_{\circ}$
	$c^{\circ\circ\circ\circ}_{\circ\circ}$	$c^{\circ\circ\circ}_{\circ\circ}$	$c^{\circ\circ}_{\circ\circ}$	$c^{\circ}_{\circ\circ}$	$c_{\circ\circ}$	$c'_{\circ\circ}$	$c''_{\circ\circ}$	$c'''_{\circ\circ}$	$c^{\text{IV}}_{\circ\circ}$
	$c^{\circ\circ\circ\circ}_{\circ\circ\circ}$	$c^{\circ\circ\circ}_{\circ\circ\circ}$	$c^{\circ\circ}_{\circ\circ\circ}$	$c^{\circ}_{\circ\circ\circ}$	$c_{\circ\circ\circ}$	$c'_{\circ\circ\circ}$	$c''_{\circ\circ\circ}$	$c'''_{\circ\circ\circ}$	$c^{\text{IV}}_{\circ\circ\circ}$
	$c^{\circ\circ\circ\circ}_{\circ\circ\circ\circ}$	$c^{\circ\circ\circ}_{\circ\circ\circ\circ}$	$c^{\circ\circ}_{\circ\circ\circ\circ}$	$c^{\circ}_{\circ\circ\circ\circ}$	$c_{\circ\circ\circ\circ}$	$c'_{\circ\circ\circ\circ}$	$c''_{\circ\circ\circ\circ}$	$c'''_{\circ\circ\circ\circ}$	$c^{\text{IV}}_{\circ\circ\circ\circ}$

262. Maintenant il est facile de voir que les transformations de la fonction $F(c, \varphi)$ peuvent être faites en général de manière qu'on passe du module c, à un module quelconque contenu dans ce tableau à deux dimensions. Veut-on, par exemple, passer du module c au module $c'''_{\circ\circ}$; on suivra les formules de la première échelle pour passer du module c au module c''', ensuite de celui-ci on passera au module $c'''_{\circ\circ}$ par les formules de la seconde échelle. C'est sans doute un résultat très remarquable que cette multitude infinie de transformations qu'on peut faire subir à la même fonction $F(c,\varphi)$, sans changer sa nature et en conservant le même rapport entre la fonction et sa transformée pour toutes les valeurs de l'amplitude; on chercherait vainement dans la variété infinie des transcendantes un second exemple d'une fonction qui se reproduirait sous tant de formes différentes et à laquelle

on pourrait appliquer plus justement qu'à la spirale logarithmique, la devise que lui avait donnée Jacques Bernoulli : (*Eadem mutata resurgit*).

Il est inutile d'ajouter que la fonction de seconde espèce $E(c, \varphi)$ partage les mêmes propriétés avec la fonction F, mais à un moindre degré, à cause de la complication qu'introduit dans les résultats la quantité algébrique comprise dans chaque formule de réduction.

263. Il reste maintenant à examiner si dans la formation du tableau général on parviendrait aux mêmes résultats en changeant l'ordre des opérations, de l'horizontale à la verticale; c'est-à-dire si en partant, par exemple, du terme c_{μ} considéré comme module primitif, on trouverait par les formules de la première échelle, la même série... $c_{\mu}^{\circ\circ}$, c_{μ}°; c_{μ}, c'_{μ}, c''_{μ}... que donnent les résultats de la première opération. Or à cet égard l'affirmative est aisée à démontrer.

En effet tout se réduit à faire voir que le terme c°, déduit de c, par les formules de la première échelle, est le même que $c_{\prime}^{\circ}$ déduit de $c_{\prime}$ par les formules de la seconde échelle. Soit $c = \sin\theta$, $c_{\prime} = \sin\theta_{\prime}$, on aura par les propriétés de la première échelle $c^{\circ} = \tang^2 \frac{1}{2}\theta$, $c_{\prime}^{\circ} = \tang^2 \frac{1}{2}\theta_{\prime}$. Il faut ensuite que les termes consécutifs c, $c_{\prime}$ soient assujettis à la loi de la seconde échelle qui donne

$$\sqrt{(\sin\theta \sin\theta_{\prime})} + \sqrt{(\cos\theta \cos\theta_{\prime})} = 1;$$

il faut pareillement que les termes c°, $c_{\prime}^{\circ}$, soient assujettis à la même loi, ce qui donne, en faisant $\sin\lambda = \tang^2 \frac{1}{2}\theta$, $\sin\lambda_{\prime} = \tang^2 \frac{1}{2}\theta_{\prime}$,

$$\sqrt{(\sin\lambda \sin\lambda_{\prime})} + \sqrt{(\cos\lambda \cos\lambda_{\prime})} = 1.$$

Substituant dans cette équation les valeurs de $\sin\lambda$ et $\sin\lambda_{\prime}$, on aura

$$\tang\tfrac{1}{2}\theta \tang\tfrac{1}{2}\theta_{\prime} + \frac{\sqrt[4]{(\cos\theta \cos\theta_{\prime})}}{\cos\frac{1}{2}\theta \cos\frac{1}{2}\theta_{\prime}} = 1;$$

cette dernière donne $\sqrt[4]{(\cos\theta \cos\theta_{\prime})} = \cos(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\theta_{\prime})$; donc $\sqrt{(\cos\theta \cos\theta_{\prime})} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\theta + \theta_{\prime}) = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta \cos\theta_{\prime} - \sin\theta \sin\theta_{\prime})$, $\sin\theta \sin\theta_{\prime} = 1 + \cos\theta \cos\theta_{\prime} - 2\sqrt{(\cos\theta \cos\theta_{\prime})}$ et enfin $\sqrt{(\sin\theta \sin\theta_{\prime})} = 1 - \sqrt{(\cos\theta \cos\theta_{\prime})}$, ce qui s'accorde avec la première équation. Donc il est indifférent de former le tableau complet en calculant les séries verticales qui répondent aux différens termes de la ligne horizontale, ou en faisant l'opération inverse, et le résultat est toujours le même.

264. Dans chaque ligne horizontale du tableau, formée suivant la loi de la première échelle, il y a toujours un module compris entre $\sin 9^{\circ}\, 52'$ et

sin 80° 7′, limites qui résultent du module moyen sin 45°. Donc comme il y a une infinité de ces lignes, tant au-dessus qu'au-dessous de la première ligne contenant le module primitif c, il s'ensuit qu'on peut transformer la fonction donnée $F(c, \varphi)$ en une infinité d'autres dont les modules seront compris entre sin 9° 52′ et sin 80° 7′. Il paraît même probable que la transformation pourrait être dirigée de manière à obtenir pour la fonction transformée un module aussi peu différent qu'on voudra d'un module donné.

Nous remarquerons enfin que tous les modules compris dans le tableau général, sont nécessairement différens les uns des autres. Car, s'il existait dans ce tableau deux termes égaux, ils ne pourraient appartenir ni à une même colonne horizontale dont tous les termes croissent dans un sens et décroissent dans l'autre avec la même rapidité, ni à une colonne verticale où les différences d'un terme à l'autre sont encore plus sensibles; ils seraient donc censés déduits l'un et l'autre du module situé à l'intersection de la colonne horizontale de l'un avec la colonne verticale de l'autre; or suivant ce qui a été démontré (art. 196) il est impossible que ces deux colonnes contiennent deux termes égaux.

FIN DE LA THÉORIE.

APPLICATION A LA GÉOMÉTRIE.

SECTION PREMIÈRE.

Surface du cône oblique.

265. Considérons d'abord le cône oblique à base circulaire. Soit S le sommet du cône, C le centre de la base, SO la perpendiculaire abaissée du sommet sur le plan de la base, SAB la section faite dans le cône par le plan SCO. Si on fait le rayon CA $= r$, la hauteur SO $= h$, la distance CO $= f$, et l'angle variable OCM $= \omega$, l'aire ASM correspondante à l'angle ω sera exprimée par l'intégrale Fig. 11.

$$Z = \int \tfrac{1}{2} r d\omega \sqrt{[h^2 + (r - f\cos\omega)^2]}.$$

Pour réduire cette intégrale à la forme ordinaire, j'observe qu'en appelant α et α' les apothèmes SA, SB, on aura $\alpha^2 = h^2 + (f-r)^2$, $\alpha'^2 = h^2 + (f+r)^2$; soit donc $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega = \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$, $m = \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha' + \alpha}$, $c^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{h^2 + r^2 - f^2}{2\alpha\alpha'}\right)$; on aura la transformée

$$Z = \frac{2r(\alpha\alpha')^{\frac{3}{2}}}{(\alpha+\alpha')^2} \int \frac{d\varphi \sqrt{(1 - c^2 \sin^2\varphi)}}{(1 + m\cos\varphi)^2}.$$

Multipliant les deux termes de la fraction par $(1 - m\cos\varphi)^2$, et faisant $n = \frac{m^2}{1-m^2} = \cot^2\theta$, ce qui donne $m = \cos\theta$, et $\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta$, on aura

$$Z = \tfrac{1}{2} r \sqrt{(\alpha\alpha')} \int \frac{1 + 2n - n\sin^2\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)^2} \Delta d\varphi - \frac{r\cos\theta \sqrt{(\alpha\alpha')}}{\sin^2\theta} \int \frac{\Delta d\varphi \cos\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)^2};$$

soit $\operatorname{tang}\psi = \sqrt{(n + c^2)} . \frac{\sin\varphi}{\Delta} = \frac{\sin\varphi \sqrt{(1 - b^2\sin^2\theta)}}{\Delta \sin\theta}$, on aura .....

$\int \frac{\Delta d\varphi \cos\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)^2} = \frac{\sin\theta}{2\sqrt{(1 - b^2\sin^2\theta)}} \left(\psi + \frac{1}{2}\sin 2\psi\right)$. L'autre intégrale se trouvera en développant la différentielle de $\frac{\Delta \sin\varphi \cos\varphi}{1 + n\sin^2\varphi}$, d'où l'on déduit

$$\int \frac{1 + 2n - n\sin^2\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)^2} \Delta d\varphi = \frac{n\Delta \sin\varphi \cos\varphi}{1 + n\sin^2\varphi} - \int \frac{c^2 d\varphi \sin^2\varphi}{\Delta} + (1 + n) \int \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\Delta}.$$

Donc on aura l'aire cherchée

$$Z = \tfrac{1}{2} r \sqrt{(aa')} \left\{ \frac{n\Delta \sin\varphi \cos\varphi}{1 + n \sin^2\varphi} + E(c,\varphi) - F(c,\varphi) + (1+n)\,\Pi(n,c,\varphi) \right\} - \frac{\cot\theta}{\Delta(b,\theta)} \left(\psi + \tfrac{1}{2} \sin 2\psi \right) \Bigg\}.$$

Pour avoir l'aire entière du cône, il faut faire $\omega = 2\pi$, ou $\varphi = 2\pi$, ce qui donne

$$Z' = 2r \sqrt{(aa')}\, [E'c - F'c + (1+n)\,\Pi'(n,c)];$$

formule où l'on pourra substituer la valeur de $\Pi'(n, c)$, donnée par l'équation

$$(1+n)\,\Pi'(n,c) - F'c = \frac{\cot\theta}{\Delta(b,\theta)} [\tfrac{1}{2}\pi + F'c\,F(b,\theta) - F'c\,E(b,\theta) - E'c\,F(b,\theta)],$$

de sorte que l'aire Z' sera entièrement exprimée par des fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce.

266. Le paramètre $n = \cot^2\theta$ est déterminé par le rapport des apothèmes a et a', puisqu'on a $\tang \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{a}{a'}}$; quant au module c, si l'on fait $c = \sin\lambda$, l'angle λ sera égal à $\tfrac{1}{2}(ASO + BSO)$, c'est-à-dire que cet angle est celui que fait la perpendiculaire SO avec la ligne qui divise en deux également l'angle ASB. En effet, si on fait de l'autre côté de SO, l'angle OSP = OSA, et qu'on appelle 2λ l'angle BSP, le triangle BSP dont les trois côtés sont a, a', $2f$, donnera $\cos 2\lambda = \frac{a'^2 + a^2 - 4f^2}{2aa'}$, or $a^2 + a'^2 = 2h^2 + 2f^2 + 2r^2$; donc $\cos 2\lambda = \frac{h^2 + r^2 - f^2}{aa'}$, et par conséquent $\sin^2\lambda = \tfrac{1}{2} - \left(\frac{h^2 + r^2 - f^2}{2aa'}\right)$, ce qui est la valeur de c^2. De là on voit que les quantités a, a', c, θ, qui entrent comme élémens dans le résultat final, se déduisent immédiatement du triangle SAB, section principale du cône.

Nous ne nous arrêterons pas à faire voir comment on pourrait comparer diverses portions de la surface du cône, de manière qu'une portion servît à en mesurer une autre, soit exactement, soit avec des différences déterminables algébriquement ou par arcs de cercle. Ces propriétés sont communes à toutes les quantités qui peuvent s'exprimer par les fonctions elliptiques; mais il n'est pas inutile de remarquer que si on appliquait aux fonctions E, F, Π, contenues dans l'expression de Z, les transformations par lesquelles on change le module c en un autre terme de l'échelle c, c^0, c^{00}, etc., on ramènerait ainsi le cas du cône oblique, à celui d'un cône de plus en plus rapproché du cône droit. Car lorsque c serait assez petit pour être négligé, on serait censé avoir atteint la limite du cône droit, et les fonctions F, E, Π, se réduiraient à l'amplitude φ.

267. Si on développe la surface du cône sur un plan, il en résulte un secteur dans lequel l'angle du sommet que nous désignerons par Φ, se détermine par la formule

$$\Phi = \int \frac{r d\omega \sqrt{[h^2 + (r - f\cos\omega)^2]}}{h^2 + f^2 + r^2 - 2rf\cos\omega};$$

et au moyen des mêmes substitutions on a la transformée.....

$\Phi = \frac{r}{\sqrt{(aa')}} \int \frac{\Delta d\varphi}{1 + n\sin^2\varphi}$, qui donne

$$\Phi = \frac{r}{\sqrt{(aa')}} \left[\left(1 + \frac{c^2}{n}\right) \Pi(n, c, \varphi) - \frac{c^2}{n} F(c, \varphi)\right]:$$

cette intégrale étant prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = 2\pi$, on a l'angle total du secteur

$$\Phi^1 = \frac{4r}{\sqrt{(aa')}} \left[\left(1 + \frac{c^2}{n}\right) \Pi^1(n, c) - \frac{c^2}{n} F^1 c\right].$$

On peut remarquer que si dans l'expression de Φ, on fait $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, ce qui donne $\omega = \theta$, la valeur de Φ devient égale au quart de l'angle total Φ^1. Donc si on détermine le point M de manière que l'angle ACM $= \theta$, l'angle produit par le développement du secteur courbe ASM sera le quart de celui que produit le développement du cône entier.

Connaissant $n = \cot^2\theta$, et $c = \sin\lambda$, le rapport $\frac{r}{\sqrt{(aa')}}$ qui entre dans l'expression de Φ, peut se déduire des équations $4rf = a'^2 - a^2$, ...

$4f^2 = a'^2 + a^2 - 2aa'\cos 2\lambda$, $\tang \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{a}{a'}}$, qui donnent

$$\frac{r}{\sqrt{(aa')}} = \frac{\cot\theta}{\sqrt{(1 - b^2\sin^2\theta)}} = \sqrt{\left(\frac{n(1+n)}{n+c^2}\right)}.$$

268. L'expression que nous avons trouvée pour l'angle indéfini Φ, fournit un moyen fort simple de construire la fonction de troisième espèce $\Pi(n, c, \varphi)$, dans laquelle le paramètre n est positif et représenté par $\cot^2\theta$. On a en effet par cette équation

$$\Pi(n, c, \varphi) = \frac{c^2}{c^2 + n} F(c, \varphi) + \Phi \sqrt{\left(\frac{n}{(1+n)(n+c^2)}\right)},$$

Φ étant l'angle au sommet du cône, décrit sur sa surface convexe par l'apothème mobile qui, partant du point A, se meut toujours dans le même sens le long de la circonférence de la base, jusqu'à ce qu'il ait parcouru l'arc AM $= \omega$, déterminé par l'équation $\tang \frac{1}{2}\omega = \tang \frac{1}{2}\theta \tang \frac{1}{2}\varphi$. Cet angle ω croît continuellement avec l'amplitude φ et s'accorde avec φ dans toutes les valeurs multiples de π; on voit d'ailleurs que l'angle Φ est une fonction révolutive, comme les fonctions F, E, Π, laquelle croît indéfi-

niment avec l'angle φ, et peut être d'autant de circonférences qu'on voudra.

Les données $c = \sin\lambda$, $n = \cot^2\theta$, serviront à déterminer le cône propre à la solution, ou celui qu'on voudra de tous les cônes semblables qui remplissent le même objet. Ayant pris l'apothème α à volonté, faites l'autre apothème $\alpha' = \alpha \cot \frac{1}{2}\theta$; avec les deux côtés α, α', et l'angle compris BSP $= 2\lambda$, faites un triangle BSP; du sommet S comme centre et du rayon, SP $= \alpha$, décrivez un arc qui coupera la base BP, prolongée s'il est nécessaire, en un second point A; le triangle SAB, ainsi construit, sera la section principale du cône cherché, et sa base sera le cercle décrit du diamètre AB, dans un plan perpendiculaire à celui du triangle SAB.

269. Supposons en second lieu que la base du cône soit une ellipse. Soient h la hauteur du cône, f et g les coordonnées du point où la perpendiculaire h rencontre le plan de la base, f étant prise dans la direction du demi-grand axe a et g dans celle du demi-axe conjugué b. Soit φ l'amplitude d'un point quelconque de l'ellipse, les coordonnées de ce point seront $x = a \sin\varphi$, $y = b \cos\varphi$, et l'élément de la courbe $ds = d\varphi \sqrt{(a^2 - c^2 \sin^2\varphi)}$. Si du sommet on mène une perpendiculaire sur la tangente en ce point, le carré de cette perpendiculaire aura pour expression $h^2 + \left(\frac{ag\cos\varphi + bf\sin\varphi - ab}{\Delta}\right)^2$; donc l'élément de la surface du cône sera

$$dZ = \tfrac{1}{2}\, d\varphi \sqrt{[h^2(a^2 - c^2\sin^2\varphi) + (ag\cos\varphi + bf\sin\varphi - ab)^2]}.$$

Cette différentielle paraît fort composée; cependant si on fait $\tang \frac{1}{2}\varphi = z$, ce qui donne $\sin\varphi = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos\varphi = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $d\varphi = \frac{2dz}{1+z^2}$, on aura la transformée

$$dZ = \frac{dz}{(1+z^2)^2} \sqrt{\{a^2h^2(1+z^2)^2 - 4c^2h^2z^2 + [ag - ab + 2bfz - (ag + ab)z^2]^2\}};$$

et puisque la variable sous le radical ne passe pas le quatrième degré, il est clair qu'on pourra trouver l'intégrale Z au moyen des fonctions elliptiques. De plus comme il suffit pour avoir l'aire entière du cône de prendre l'intégrale depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = 2\pi$, on doit prévoir que le résultat final ne dépendra que des fonctions complètes de la troisième espèce, et qu'ainsi l'aire du cône pourra toujours s'exprimer par des fonctions de première et de seconde espèce, c'est-à-dire par des arcs d'ellipse.

Mais avant de nous occuper de l'intégrale prise dans toute sa généralité,

il sera bon d'examiner quelques cas particuliers dont la solution offre moins de difficultés.

Le cas qui semble devoir être le plus simple, est celui du cône droit à base d'ellipse. Alors la perpendiculaire abaissée du sommet passe par le centre de la base; on a à la fois $f = 0$, $g = 0$, et il n'y a d'obliquité dans aucun sens. Dans tous les autres cas l'obliquité est simple ou double.

Elle est simple lorsque l'une des coordonnées f et g est zéro; car dans le cas de $g = 0$, la perpendiculaire abaissée du sommet tombe sur le grand axe de la base ou sur son prolongement; il y a alors obliquité dans le sens du grand axe, mais il n'y en a pas dans le sens du petit axe et le plan qui passe par le sommet et le grand axe divise le cône en deux parties égales et semblables. De même si la coordonnée $f = 0$, il y a obliquité dans le sens du petit axe, mais il n'y en a pas dans le sens du grand axe. Enfin, lorsque f et g ne sont nulles ni l'une ni l'autre, il y a obliquité dans les deux sens ou obliquité double; c'est le cas le plus compliqué; cependant nous verrons qu'il y a une infinité de cônes compris dans cette division, dont l'aire indéfinie peut s'exprimer par des formules aussi simples que celle des cônes à simple obliquité.

Du cône droit à base d'ellipse.

270. La supposition de $f = 0$ et $g = 0$, donne

$$dZ = \tfrac{1}{2}\, d\varphi \sqrt{(a^2h^2 + a^2b^2 - c^2h^2 \sin^2\varphi)};$$

soit le plus petit apothème $\sqrt{(b^2 + h^2)} = \alpha$, et $k = \frac{ch}{a\alpha}$; on aura.....
$Z = \frac{1}{2}\, a\alpha \int d\varphi \sqrt{(1 - k^2 \sin^2\varphi)} = \frac{1}{2}\, a\alpha\, E(k,\varphi)$. Ainsi l'aire Z s'exprime en général par un arc d'ellipse, et l'aire entière du cône sera donnée par la formule très simple $Z' = 2a\alpha E'k$; elle est égale au petit apothème α multiplié par la demi-circonférence de l'ellipse décrite sur le même grand axe $2a$ que la base du cône, avec l'excentricité $ak = \frac{ch}{\alpha}$; de sorte que le demi-petit axe de cette ellipse $b' = \sqrt{\left(a^2 - \frac{c^2h^2}{\alpha^2}\right)} = \frac{ba'}{\alpha}$, a' étant le plus grand apothème $\sqrt{(a^2 + h^2)}$.

Du cône à base d'ellipse où l'on a $g = 0$.

271. Alors il n'y a obliquité que dans le sens du grand axe seulement; mais il faut distinguer trois cas, selon que la différence $c^2h^2 + c^2b^2 - b^2f^2$ sera nulle, positive ou négative.

Premier cas. Soit $b^2f^2 = c^2(h^2 + b^2)$; alors la formule à intégrer est

$$dZ = \tfrac{1}{2}\, d\varphi \sqrt{[a^2b^2 + a^2h^2 - 2ab^2f \sin\varphi + b^2c^2 \sin^2\varphi]},$$

et il arrive que la quantité sous le signe est un quarré parfait, de sorte qu'on a $dZ = \frac{1}{2}\, d\varphi\, [a\sqrt{(b^2 + h^2)} - bc \sin\varphi]$, et en intégrant

$$Z = \tfrac{1}{2}\, a\varphi \sqrt{(b^2 + h^2)} - \tfrac{1}{2}\, bc\,(1 - \cos\varphi).$$

Cette intégrale est prise à compter de $\varphi = 0$; si on l'étend jusqu'à $\varphi = \pi$, on aura la partie de la surface du cône, séparée par le petit axe, du même côté que la perpendiculaire. Cette partie que nous désignerons par..... $Z' = \frac{1}{2}\, a\pi \sqrt{(b^2 + h^2)} - b\varphi$. Si en partant toujours de $\varphi = 0$, on fait croître continuellement φ jusqu'à $\varphi = 2\pi$, on aura la surface totale du cône

$$Z^1 = \pi a \sqrt{(b^2 + h^2)};$$

elle est égale à la circonférence du cercle circonscrit à l'ellipse, multipliée par la moitié du petit apothème.

On voit en même temps que la partie de la surface du cône qui est séparée par le petit axe de l'autre côté de la perpendiculaire, étant nommée Z'', on aurait

$$Z'' = \tfrac{1}{2}\, \pi a \sqrt{(b^2 + h^2)} + bc;$$

ainsi la différence des deux parties séparées par le petit axe, savoir... $Z'' - Z' = 2bc$, est égale au rectangle formé du petit axe $2b$ et de l'excentricité c. Elle est la même pour tous les cônes en nombre infini qui satisfont à l'équation $b^2f^2 = c^2h^2 + c^2b^2$, f et h étant les coordonnées qui déterminent le sommet de chaque cône.

Étant donné l'ellipse qui sert de base au cône, si on décrit dans le plan de cette ellipse une hyperbole telle que le foyer d'une de ces courbes soit le sommet de l'autre, comme dans la figure 14; si ensuite on fait tourner le plan de l'hyperbole autour de l'axe CA, jusqu'à ce qu'il devienne perpendiculaire au plan de l'ellipse, l'hyperbole ainsi tracée sera le lieu de tous les sommets des cônes quarrables, et chacun de ces cônes, dont le sommet est déterminé par les coordonnées f et h, aura pour surface $\pi a \sqrt{(b^2 + h^2)}$. Ces propriétés des cônes à base d'ellipse sont curieuses et n'avaient point encore été remarquées. Au reste le cône dont il s'agit n'est autre chose qu'un cône droit à base circulaire coupé par un plan incliné convenablement à sa base : et comme la même section peut être faite dans différens cônes droits, il s'ensuit que pour une même base elliptique il y a une infinité de sommets qui déterminent autant de cônes quarrables. En appelant I l'in-

clinaison de la base circulaire sur la base elliptique, et σ l'angle que fait l'apothème du cône droit avec son axe, on aurait

$$\operatorname{tang} I = \frac{fh}{b^2 + h^2} = \frac{c^2 h}{b^2 f} \text{ et } \operatorname{tang} \sigma = \frac{b^2}{ah}.$$

Ainsi on construira facilement le cône circulaire par le moyen du cône elliptique, et réciproquement.

272. *Second cas.* Soit $b^2 f^2 < c^2 h^2 + c^2 b^2$: dans ce cas le sommet du cône est situé hors de l'aire de l'hyperbole qui est le lieu de tous les sommets des cônes quarrables. Alors le polynome $a^2 b^2 + a^2 h^2 - 2ab^2 f \sin\varphi + (b^2 f^2 - c^2 h^2) \sin^2\varphi$ se partage en deux facteurs réels $(A - B \sin\varphi)(A - C \sin\varphi)$ dont les coefficiens sont

$$A = a\sqrt{(b^2 + h^2)},$$

$$B = \frac{ab^2 f - ah\sqrt{(b^2 c^2 + c^2 h^2 - b^2 f^2)}}{A},$$

$$C = \frac{ab^2 f + ah\sqrt{(b^2 c^2 + c^2 h^2 - b^2 f^2)}}{A}.$$

On observera d'ailleurs que B et C pris positivement sont toujours plus petits que A; car puisqu'on a

$$a^2 h^2 \cos^2\varphi + b^2 h^2 \sin^2\varphi + b^2 (a - f \sin\varphi)^2 = (A - B \sin\varphi)(A - C \sin\varphi),$$

le premier membre étant toujours positif et jamais nul, le second doit être aussi toujours positif, ce qui n'aurait pas lieu si A n'était pas plus grand que B et C.

Soit maintenant $\varphi = \frac{1}{2}\pi + 2\psi$, on aura

$$dZ = d\psi \sqrt{[(A - B)\cos^2\psi + (A + B)\sin^2\psi]} \cdot \sqrt{[(A - C)\cos^2\psi + (A + C)\sin^2\psi]}.$$

Soit $\operatorname{tang}\psi = m \operatorname{tang}\omega$, et ensuite $m^2 = \frac{A - C}{A + C}$, $k^2 = \frac{2A(C - B)}{(A - B)(A + C)}$, $1 - k^2 = i^2 = \frac{(A + B)(A - C)}{(A - B)(A + C)}$, on aura la transformée

$$dZ = \frac{mbcdo\sqrt{(1 - k^2 \sin^2\omega)}}{(m^2 \sin^2\omega + \cos^2\omega)^2} = \frac{mabdo\sqrt{(1 - k^2 \sin^2\omega)}}{(1 + n \sin^2\omega)^2},$$

dans laquelle on a fait $a = \sqrt{[b^2 + (f - a)^2]}$, et $n = m^2 - 1 = -\frac{2C}{A + C}$.

Cette valeur du paramètre n est toujours négative, mais il faut savoir si elle est de la forme $-1 + i^2 \sin^2\theta$, ou de la forme $-k^2 \sin^2\theta$. La première aura lieu si B est positif, ou si on a $b^2 f^2 > c^2 h^2$, et la seconde si B est négatif ou si on a $b^2 f^2 < c^2 h^2$. Faites ces deux cas il y en a un troisième où l'on aurait $b^2 f^2 = c^2 h^2$, par conséquent $B = 0$, $m = i$ et $n = -k^2$.

273. Ce dernier cas qui est le plus simple de tous, se résout immédiatement par la formule

$$dZ = \tfrac{1}{2}\, d\varphi \sqrt{(a^2b^2 + a^2h^2 - 2abch \sin\varphi)}.$$

Car si on fait $\varphi = 2\psi - \frac{1}{2}\pi$, on aura $dZ = d\psi \sqrt{(a^2b^2 + a^2h^2 + 2abch \cos 2\psi)}$ ou $dZ = ba'd\psi \sqrt{(1 - k^2 \sin^2\psi)}$, en faisant $k^2 = 1 - \frac{a^2}{a'^2}$, a' et a étant toujours le plus grand et le plus petit apothème. Donc on a $Z = ba' E(k, \psi)$; cette aire commence à compter de $\psi = 0$ ou de $\varphi = -\frac{1}{2}\pi$, c'est-à-dire à l'extrémité du grand axe de l'autre côté de la perpendiculaire h; si on fait $\psi = \pi$, on aura l'aire entière du cône $Z^1 = 2ba' E^1 k$.

On peut remarquer que l'équation $bf = ch$ entre les coordonnées f et h, est celle de l'asymptote de l'hyperbole qui passe par tous les sommets des cônes quarrables; cette asymptote passe donc par tous les sommets des cônes dont l'aire ne dépend que d'un arc d'ellipse. Ainsi une même construction très simple donne à la fois la ligne des sommets de tous les cônes quarrables par un arc de cercle, et celle des sommets de tous les cônes quarrables par un arc d'ellipse.

274. Supposons maintenant $bf > ch$, on pourra faire $n = -1 + i^2 \sin^2\theta$, et on aura $\sin^2\theta = \frac{A - B}{A + B}$, quantité plus petite que l'unité, puisque B est positive. Il s'agit alors d'intégrer la différentielle

$$dZ = \frac{abmd\omega \sqrt{(1 - k^2 \sin^2\omega)}}{(1 + n \sin^2\omega)^2};$$

c'est ce qui se fera aisément par les réductions ordinaires, d'où l'on tire, en mettant $\sqrt{(1 + n)}$ au lieu de m,

$$Z = \frac{-ba}{2\sqrt{(1+n)}} \left[\frac{n\Delta \sin\omega \cos\omega}{1 + n \sin^2\omega} + E - \left(1 + \frac{k^2}{n}\right) F + \left(n + 2 + \frac{k^2}{n}\right) \Pi n \right],$$

Πn représentant l'intégrale $\int \frac{d\omega}{(1 + n \sin^2\omega)\Delta}$. Cette formule donne la valeur de l'aire à compter du point où $\omega = 0$, et $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, c'est-à-dire à compter de l'extrémité du grand axe la plus proche de la perpendiculaire; si ensuite on fait $\omega = \pi$, on aura l'aire entière du cône

$$Z^1 = \frac{ba}{\sqrt{(1+n)}} \left[E^1 k - \left(1 + \frac{k^2}{n}\right) F^1 k + \left(n + 2 + \frac{k^2}{n}\right) \Pi^1(n, k) \right],$$

valeur qui se rapproche beaucoup de celle que donne le cône oblique à base circulaire, car le paramètre n qui est de la forme $-1 + i^2 \sin^2\theta$, se ramène aisément à la forme $n = \cot^2\theta$.

275. Supposons en troisième lieu $bf < ch$, ce qui rend la quantité B négative, alors on devra faire $n = -k^2 \sin^2\theta$ et on aura $\sin^2\theta = \frac{C(A-B)}{A(C-B)}$, quantité positive et plus petite que l'unité, puisqu'il en résulte $\cos^2\theta = \frac{-B(A-C)}{C-B}$. Au reste l'intégrale sera toujours de la même forme, savoir :

$$Z = \frac{b\alpha}{2\sqrt{(1+n)}}\left[\frac{n\Delta \sin\omega.\cos\omega}{1+n\sin^2\omega} + E - \left(1+\frac{k^2}{n}\right)F + \left(n+2+\frac{k^2}{n}\right)\Pi n\right],$$

et on aura l'aire totale du cône

$$Z' = \frac{b\alpha}{\sqrt{(1+n)}}\left[E'k - \left(1+\frac{k^2}{n}\right)F'k + \left(n+2+\frac{k^2}{n}\right)\Pi'(n,k)\right].$$

276. *Troisième cas.* Soit $b^2f^2 > c^2h^2 + b^2c^2$; dans ce cas le sommet du cône est situé au-dedans de l'hyperbole déjà tracée, dont le contour renferme tous les sommets des cônes quarrables.

Alors la quantité sous le radical $a^2b^2 + a^2h^2 - 2ab^2f\sin\varphi + (b^2f^2 - c^2h^2)\sin^2\varphi$ n'est point décomposable en facteurs réels de la forme $(A - B\sin\varphi)(A - C\sin\varphi)$; elle le serait en facteurs de la forme $[A - B\sin(\varphi+\theta)][A - B\sin(\varphi-\theta)]$. Mais il n'en résulterait pas plus de facilité pour l'intégration de la formule. Soit donc comme ci-dessus $\varphi = \frac{1}{2}\pi + 2\psi$, ou $\sin\varphi = 1 - 2\sin^2\psi$, nous aurons

$$dZ = d\psi\sqrt{(A - 2B\sin^2\psi + C\sin^4\psi)},$$
$$A = b^2h^2 + b^2(f-a)^2 = b^2\alpha^2,\quad A - 2B + C = b^2\alpha'^2,$$
$$B = 2b^2f^2 - 2c^2h^2 - 2ab^2f,$$
$$C = 4b^2f^2 - 4c^2h^2,$$

et on pourra faire

$$dZ = d\psi\cos^2\psi\sqrt{[b^2\alpha^2 + 2(A-B)\tang^2\psi + b^2\alpha'^2\tang^4\psi]}.$$

Soit ensuite $\tang\psi = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}}.\tang\frac{1}{2}\omega$, $m = \frac{\alpha'-\alpha}{\alpha'+\alpha}$, $k^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{A-B}{2b^2\alpha\alpha'}\right)$, on aura

$$dZ = \frac{2b(\alpha\alpha')^{\frac{3}{2}}}{(\alpha+\alpha')^2}.\frac{d\omega\sqrt{(1-k^2\sin^2\omega)}}{(1+m\cos\omega)^2}.$$

Cette différentielle étant entièrement semblable à celle que nous avons trouvée pour le cône à base circulaire, le résultat de l'intégration sera le même en mettant b à la place de r.

A l'égard du module k, si on fait $k = \sin\lambda$, on aura $\cos 2\lambda = \frac{A-B}{b^2\alpha\alpha'}$, ou

$$\sin 2\lambda = \frac{2ah\sqrt{(b^2f^2 - b^2c^2 - c^2h^2)}}{b^2\alpha\alpha'}.$$

Ainsi en regardant les élémens α, α', λ, comme les mêmes dans les deux cônes, la surface totale du cône elliptique sera à celle du cône circulaire :: $2b$: $2r$. Les parties correspondantes aux mêmes amplitudes seraient dans le même rapport; d'ailleurs le diamètre $2r$ se déduit des données du cône elliptique par la formule

$$2r = \frac{\alpha'^2 - \alpha^2}{\sqrt{(\alpha'^2 + \alpha^2 - 2\alpha\alpha' \cos 2\lambda)}}.$$

Du Cône à base d'ellipse où l'on a $f = 0$.

277. Alors il n'y a obliquité que dans le sens du second axe seulement, et le plan qui passe par le sommet et le second axe divise le cône en deux parties égales et semblables. La formule à intégrer est dans ce cas

$$dZ = \tfrac{1}{2}\, d\varphi \sqrt{[a^2b^2 + b^2h^2 - 2a^2bg \cos\varphi + (a^2g^2 + c^2h^2) \cos^2\varphi]},$$

où il faut remarquer que la quantité sous le signe n'est point décomposable en deux facteurs réels de la forme $A - B \cos\varphi$, et qu'à plus forte raison elle ne peut devenir un carré parfait. C'est pourquoi il faut la considérer dans toute sa généralité.

Soit $A = a^2b^2 + b^2h^2$, $B = a^2bg$, $C = a^2g^2 + c^2h^2$, la formule à intégrer sera $dZ = \frac{1}{2}\, d\varphi \sqrt{(A - 2B \cos\varphi + C \cos^2\varphi)}$; substituant pour $\cos\varphi$ sa valeur $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi$, et remplaçant le sinus par son expression en tangente aura

$$dZ = \tfrac{1}{2}\, d\varphi \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi \sqrt{[A - 2B + C + 2(A - C) \tang^2 \tfrac{1}{2}\varphi + (A + 2B + C) \tang^4 \tfrac{1}{2}\varphi)}.$$

Soient α et α' les deux apothèmes qui aboutissent aux extrémités du petit axe, on aura

$$A - 2B + C = a^2[h^2 + (g - b)^2] = a^2\alpha^2,$$
$$A + 2B + C = a^2[h^2 + (g + b)^2] = a^2\alpha'^2,$$

soit ensuite $\tang \frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} \cdot \tang \frac{1}{2}\psi$, $k^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{A - C}{2a^2\alpha\alpha'}\right)$, $m = \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha' + \alpha}$, on aura la transformée

$$Z = \frac{2a(\alpha\alpha')^{\frac{3}{2}}}{(\alpha' + \alpha)^2} \cdot \int \frac{d\psi \sqrt{(1 - k^2 \sin^2\psi)}}{(1 + m \cos\psi)^2}.$$

Cette formule est entièrement semblable à celle qui a lieu pour le cône à base circulaire; ainsi l'aire du cône elliptique dont il s'agit peut se réduire à celle d'un cône oblique à base de cercle; on prendra pour élémens de celui-ci les mêmes quantités α, α', λ que dans le cône elliptique, en faisant

$k = \sin\lambda$, $\cos 2\lambda = \frac{A - C}{a^2 a a'}$, ou $\sin 2\lambda = \frac{2bk\sqrt{(c^2h^2 + a^2g^2 + a^2c^2)}}{a^2 a a'}$; on aura en même temps le diamètre de la base circulaire $2r = \frac{a'^2 - a^2}{\sqrt{(a'^2 + a^2 - 2aa'\cos 2\lambda)}}$; et cela posé l'aire entière du cône elliptique, sera à l'aire entière du cône circulaire :: $2a : 2r$. Le même rapport aura lieu entre les deux portions de ces cônes, pour lesquelles les amplitudes ψ et ϕ sont égales.

Du Cône elliptique à double obliquité.

278. Alors les coordonnées f et g ne sont nulles, ni l'une ni l'autre, et le calcul pour réduire l'aire aux fonctions elliptiques deviendrait très prolixe, si la nature de la question ne fournissait des moyens de parvenir plus facilement au résultat.

On sait que dans tout cône à base d'ellipse, comme dans toute surface du second ordre, il est possible de faire des sections circulaires dans deux sens différens; ainsi un cône à base d'ellipse est réellement un cône à base de cercle dont la surface indéfiniment prolongée se termine à un plan elliptique. Cette considération appliquée à notre problème présente plusieurs avantages; et d'abord elle simplifie beaucoup la détermination de l'angle résultant du développement de la surface du cône sur un plan; car cet angle est le même à limites égales, dans le cône circulaire et dans le cône elliptique. L'intégrale dont cet angle dépend semble très compliquée dans le cône elliptique; cependant on voit *a priori* qu'elle doit se réduire à la valeur assez simple qu'elle a dans le cône circulaire, et on peut présumer qu'une transformation semblable appliquée à l'expression de l'aire, donnera à celle-ci tout le degré de simplicité dont elle est susceptible.

Pour obtenir ces réductions, il faut commencer par déterminer dans un cône elliptique donné, la position de l'un des plans qui produisent des sections circulaires; et comme tous les plans parallèles produisent des sections semblables, nous pourrons supposer que la section circulaire dont il s'agit, passe par le centre même de l'ellipse qui sert de base au cône.

Soient comme ci-dessus a et b les demi-axes de l'ellipse, et $a^2 - b^2 = c^2$, soient f et g les coordonnées parallèles à a et b, du point O où aboutit la perpendiculaire h abaissée du sommet S sur le plan de la base. Fig. 11, 2.

Soit ε l'angle que fait avec le grand axe, la droite CE, intersection du plan de la section avec le plan de la base, I l'inclinaison mutuelle de ces deux plans; les coordonnées d'un point quelconque M de l'ellipse sont, en appelant ϕ l'amplitude comptée de l'extrémité du petit axe, $x = a\sin\phi$,

Fig. 11, 2. $y = b \cos\varphi$. Soit m le point de la section qui correspond au point M de la base, en sorte que les deux points M, m soient situés sur un même apothème SmM, m étant supposé intermédiaire entre S et M.

Si on abaisse du point m une perpendiculaire mq sur l'intersection CE, la position du point m dans le plan de la section, sera déterminée par les coordonnées $Cq = t$, $qm = u$; celle du point n qui est la projection du point m sur le plan de l'ellipse, est déterminée relativement à la droite CE par les coordonnées $Cq = t$, $qn = u \cos I$; par conséquent les coordonnées du même point relativement aux axes de l'ellipse seront..... $x' = t \cos\varepsilon - u \sin\varepsilon \cos I$, $y' = t \sin\varepsilon + u \cos\varepsilon \cos I$. Enfin la troisième coordonnée du point m sera $mn = u \sin I$.

Maintenant comme les trois points M, n, O, sont en ligne droite, on aura la proportion MO : On :: $h : h - u \sin I$, d'où résultent, entre les différences des coordonnées de ces points, les deux proportions

$$h : h - u \sin I :: f - x : f - x' :: y - g : y' - g.$$

Donc

$$x = \frac{h(t \cos\varepsilon - u \sin\varepsilon \cos I) - fu \sin I}{h - u \sin I},$$

$$y = \frac{h(t \sin\varepsilon + u \cos\varepsilon \cos I) - gu \sin I}{h - u \sin I}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de l'ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, on aura l'équation de la section

$$a^2(ht \sin\varepsilon + hu \cos\varepsilon \cos I - gu \sin I)^2 - a^2b^2(h - u \sin I)^2 = 0$$
$$+ b^2(ht \cos\varepsilon - hu \sin\varepsilon \cos I - fu \sin I)^2;$$

et pour que la section soit un cercle, il faut que le coefficient de tu soit zéro, et que le coefficient de t^2 soit égal à celui de u^2, ce qui donnera les deux équations suivantes pour déterminer les inconnues ε et I :

$$(a^2g \sin\varepsilon + b^2f \cos\varepsilon) \sin I = c^2h \sin\varepsilon \cos\varepsilon \cos I,$$

$$h^2(a^2 \sin^2\varepsilon + b^2 \cos^2\varepsilon) = a^2(h \cos\varepsilon \cos I - g \sin I)^2 + b^2(h \sin\varepsilon \cos I + f \sin I)^2$$
$$- a^2b^2 \sin^2 I.$$

La première donne $\tang I = \frac{c^2h \sin\varepsilon \cos\varepsilon}{a^2g \sin\varepsilon + b^2f \cos\varepsilon}$, et substituant cette valeur dans la seconde, on aura

$$0 = a^4g^2 \sin^2\varepsilon - b^4f^2 \cos^2\varepsilon + c^2 \sin^2\varepsilon \cos^2\varepsilon (a^2h^2 \sin^2\varepsilon + b^2h^2 \cos^2\varepsilon + a^2b^2 - b^2f^2 - a^2g^2).$$

Ainsi en faisant $\sin^2\varepsilon = x$, l'équation en x sera du troisième degré, et parce que les substitutions $x = 0$, $x = 1$, donnent des résultats de signes

contraires, il y aura une valeur de x entre 0 et 1, par conséquent une valeur réelle pour l'angle ε, qui en donnera une pour l'inclinaison I. On voit encore que l'angle ε pouvant être pris en plus ou en moins, il y aura toujours deux manières de faire passer par le centre C le plan de la section circulaire. Dans les deux positions de ce plan l'intersection CE fait un angle égal avec le grand axe de l'ellipse, mais l'angle I que les plans du cercle et de l'ellipse font ensemble ne sera pas le même.

279. Connaissant l'une des deux positions du plan de la section circulaire, il reste à trouver le centre de cette section. Pour cela reprenons l'équation de la section qui est, en faisant $A = CE$, ou $A^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\varepsilon + b^2\cos^2\varepsilon}$,

$$t^2 + u^2 + \frac{2A^2}{h} u \sin I - A^2 = 0;$$

si on la met sous cette forme $t^2 + \left(u + \frac{A^2}{h} u \sin I\right)^2 = A^2\left(1 + \frac{A^2}{h^2} u^2 \sin^2 I\right)$, on voit que le centre C′ est déterminé, relativement à la droite CE considérée comme ligne des abscisses, par les coordonnées $t = 0$, $u = -\frac{A^2}{h}\sin I$, et que le quarré du rayon $r'^2 = A^2\left(1 + \frac{A^2}{h^2}\sin^2 I\right)$.

On trouvera de même que le point O′ où aboutit la perpendiculaire abaissée du sommet sur la section circulaire est déterminé, relativement au même axe CE, par les coordonnées

$$t = f\cos\varepsilon + g\sin\varepsilon,$$
$$u = h\sin I - f\sin\varepsilon\cos I + g\cos\varepsilon\cos I.$$

On a enfin la hauteur SO′ ou $h' = h\cos I + f\sin\varepsilon\sin I - g\cos\varepsilon\sin I$, et appelant f' la distance C′O′, on aura

$$f'^2 = (f\cos\varepsilon + g\sin\varepsilon)^2 + (h\sin I - f\sin\varepsilon\cos I + g\cos\varepsilon\cos I + l)^2,$$

en faisant $l = \frac{A^2\sin I}{h} = CC'$.

Connaissant les élémens a', f', h' relatifs au cône à base de cercle dont la surface indéfinie se confond avec celle du cône donné à base d'ellipse, on pourra par ces trois élémens, déterminer l'angle Φ résultant du développement d'une partie quelconque de la surface du cône sur un plan, ce qui se fera par les formules que nous avons données pour cet objet. Ainsi cette transcendante pour un cône à base d'ellipse, ne dépend généralement que de la fonction Fk et d'une fonction de troisième espèce $\Pi(n, k)$ dont le paramètre et le module sont donnés par les élémens a', f', h'.

Au moyen de ce même cône à base circulaire on peut réduire à la forme la plus simple la formule dont l'intégrale exprime l'aire du cône proposé à base elliptique.

280. Pour cet effet, appelons ω l'angle que fait un rayon quelconque $C'm$ avec l'axe fixe $C'O'$, et γ l'angle que fait cet axe avec la parallèle à CE menée par le centre C', ce dernier angle sera déterminé en même temps que f' par les équations

$$f' \sin\gamma = l + h \sin I - f \sin\varepsilon \cos I + g \cos\varepsilon \cos I,$$
$$f' \cos\gamma = f \cos\varepsilon + g \sin\varepsilon.$$

Si on prolonge l'ordonnée $mq = u$ jusqu'à cette parallèle $C'q'$, on aura $m'q' = u + l = r' \sin(\omega + \gamma)$; donc $u = r' \sin(\omega + \gamma) - l$, et le rapport $\frac{h}{h - u \sin I} = \frac{h}{h + l \sin I - r' \sin I \sin(\omega + \gamma)}$.

L'élément de la surface du cône circulaire $= \frac{1}{2} r' d\omega \sqrt{[h'^2 + (r' - f' \cos\omega)^2]}$. Multipliant cet élément par le carré du rapport précédent, on aura celui du cône elliptique

$$dZ = \left(\frac{h}{h + l \sin I}\right)^2 \frac{\frac{1}{2} r' d\omega \sqrt{[h'^2 + (r' - f' \cos\omega)^2]}}{[1 - e \sin(\omega + \gamma)]^2},$$

où l'on a fait $e = \frac{r' \sin I}{h + l \sin I}$; et comme on a $r'^2 = l^2 + \frac{lh}{\sin I}$, cette valeur se réduit à $e = \frac{l}{r'} = \cos CC'E$. Soit l'angle $CC'E = \mu$, on aura $e = \cos\mu$, $A = CE = r' \sin\mu$, donc $\frac{h}{h + l \sin I} = \frac{hl}{r'^2 \sin I} = \frac{A^2}{r'^2} = \sin^2\mu$. Donc enfin

$$dZ = \frac{\frac{1}{2} r' \sin^4\mu \, d\omega \sqrt{[h'^2 + (r' - f' \cos\omega)^2]}}{[1 - \cos\mu \sin(\omega + \gamma)]^2}.$$

281. Les cinq élémens r', f', h', μ, γ, répondent aux cinq données du cône à base d'ellipse, savoir a, b, f, g, h; on a vu comment ils s'en déduisent par la résolution d'une équation du troisième degré. Réciproquement les quantités a, b, f, g, h, peuvent se déduire des élémens r', f', h', μ, γ, supposés connus. En effet par les angles γ et μ, le premier donnant la direction de $C'C$ (puisque l'angle $O'C'C = \frac{1}{2}\pi - \gamma$), le second donnant la direction de $C'E$, on a immédiatement la position de la droite CE, qui détermine le centre C de l'ellipse, et qui est en même temps l'intersection du plan de l'ellipse et du plan du cercle; l'inclinaison I de ces deux plans est déterminée par les équations $\frac{h}{\sin I} = \frac{r' \sin^2\mu}{\cos\mu}$, $f' \sin\gamma = r' \cos\mu + h \sin I$. $- (f \sin\varepsilon - g \cos\varepsilon) \cos I$, $h' = h \cos I + (f \sin\varepsilon - g \cos\varepsilon) \sin I$, d'où

l'on déduit $\cot I = \frac{r' - f' \sin\gamma \cos\mu}{h' \cos\mu}$. Ainsi le plan de la base elliptique est donné de position par rapport au plan de la base circulaire, et on a en même temps le centre C de cette base ; il reste donc à déterminer les deux demi-axes a et b, et l'angle ε que fait le premier avec la droite CE, ainsi que les coordonnées f, g, h, qui déterminent la position du sommet S par rapport au plan de la base.

Dans le plan SO'K perpendiculaire à la droite CE, on connaît $SO' = h'$, $O'K = r' \cos\mu - f' \sin\gamma$, et l'angle $O'KO = I$; ainsi en abaissant la perpendiculaire SO sur le plan de l'ellipse, on aura $SO = h' \cos I \ldots\ldots\ldots + (f' \sin\gamma - r' \cos\gamma) \sin I = \frac{r' \sin^2\mu}{\cos\mu} \sin I$, et $KO = h' \sin I \ldots\ldots\ldots + (r' \cos\mu - f' \sin\gamma) \cos I$. La position du point O, pied de la perpendiculaire h, est donc déterminée dans le plan de l'ellipse. Si ensuite on cherche l'équation de la section faite par le plan qui passe par la droite CE et qui fait un angle I avec le plan du cercle, on trouvera que cette équation peut se réduire à la forme $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, x et y étant les coordonnées parallèles aux axes a et b, en supposant que le demi-axe a qui passe par le point C fait avec la droite CE un angle $ECA = \varepsilon$; il suffit pour cela de satisfaire aux équations

$$\tang 2\varepsilon = \frac{2f'h' \sin\gamma \sin I}{h^2 - h'^2 + f'^2 \sin^2\gamma \sin^2 I},$$

$$a^2 = \frac{r'^2 h'^2 \sin^2\mu}{(h' \cos\varepsilon - f' \sin\varepsilon \sin\gamma \sin I)^2 + r'^2 \tang^2\mu \sin^2\varepsilon \sin^2 I},$$

$$b^2 = \frac{r'^2 h'^2 \sin^2\mu}{(h' \sin\varepsilon + f' \cos\varepsilon \sin\gamma \sin I)^2 + r'^2 \tang^2\mu \cos^2\varepsilon \sin^2 I}.$$

D'ailleurs l'angle ε étant déterminé par $\tang 2\varepsilon$, on pourra choisir entre les deux valeurs ε, $\varepsilon + \frac{1}{2}\pi$, celle qui rend $a > b$.

282. Ainsi on revient facilement du cône circulaire dont les élémens sont r', f', h', au cône elliptique proposé, au moyen des élémens additionnels γ et μ. Nous pouvons donc exprimer la surface cherchée du cône à base elliptique par les élémens du cône circulaire, joints aux deux angles γ et μ ; par ces nouvelles dénominations il n'y aura plus lieu de recourir aux élémens propres du cône elliptique, ainsi nous pourrons supprimer les accens des lettres r', f', h', et nous aurons à intégrer la formule

$$dZ = \frac{\frac{1}{2} r \sin^4\omega d\omega \sqrt{[h^2 + (r - f\cos\omega)^2]}}{[1 - \cos\mu \sin(\omega + \gamma)]^4}.$$

Soient comme ci-dessus, α et α' le plus petit et le plus grand apothème

du cône, lesquels sont donnés par les équations $\alpha^2 = h^2 + (f - r)^2$, ... $\alpha'^2 = h^2 + (f + r)^2$; soit $\frac{\alpha}{\alpha'} = \text{tang}^2 \frac{1}{2}\theta$, ou $\cos\theta = \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha' + \alpha}$; si on fait $\text{tang}\,\omega = \text{tang}\,\frac{1}{2}\theta\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi$, on aura $\cos\omega = \frac{\cos\theta + \cos\varphi}{1 + \cos\theta\cos\varphi}$, ... $\sin\omega = \frac{\sin\theta\sin\varphi}{1 + \cos\theta\cos\varphi}$, $d\omega = \frac{d\varphi\sin\theta}{1 + \cos\theta\cos\varphi}$; soit encore $c^2 = \frac{4f^2 - (\alpha' - \alpha)^2}{4\alpha\alpha'}$, on aura la transformée

$$dZ = \frac{K d\varphi \sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}}{[1 - \cos\lambda\sin(\varphi - \delta)]^2},$$

où l'on a fait $K = \frac{1}{2} r (\alpha\alpha')^{\frac{1}{2}} \sin^2\mu \sin^2\lambda$, $\sin\lambda = \frac{\sin\theta\sin\mu}{1 - \cos\theta\cos\mu\sin\gamma}$, ... $\text{tang}\,\delta = \frac{\cos\theta - \cos\mu\sin\gamma}{\sin\theta\cos\mu\cos\gamma}$.

La différentielle de l'aire du cône elliptique étant réduite ainsi à la forme la plus simple dont elle est susceptible, nous allons procéder à l'intégration de cette formule par les moyens que fournit notre théorie. Mais avant de développer ces calculs dans toute leur généralité, il sera bon d'examiner un cas particulier qui conduit à des résultats fort simples, quoiqu'il soit compris dans les cas de la double obliquité.

Du cas où l'on a $\cos\theta = \cos\mu\sin\gamma$.

283. Alors on a $\delta = 0$, et la formule de l'aire devient $Z = \int \frac{K d\varphi \sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}}{(1 - \cos\lambda\sin\varphi)^2}$; elle devra d'abord être divisée en deux parties, savoir :

$$T = \int \frac{K\Delta d\varphi\,(1 + \cos^2\lambda\sin^2\varphi)}{(1 - \cos^2\lambda\sin^2\varphi)^2},\quad P = \int \frac{2K\cos\lambda.\Delta d\varphi\sin\varphi}{(1 - \cos^2\lambda\sin^2\varphi)^2},$$

et on aura $Z = T + P$. La seconde partie P est facile à intégrer par logarithmes ou par arcs de cercle; quant à la première partie T, on trouvera par les réductions ordinaires

$$\frac{T\sin^2\lambda}{K} + \frac{\cos^2\lambda.\Delta\sin\varphi\cos\varphi}{1 - \cos^2\lambda\sin^2\varphi} = \int \frac{c^2 d\varphi\cos^2\varphi}{\Delta} + \int \frac{b^2 d\varphi}{(1 - \cos^2\lambda\sin^2\varphi)\Delta}.$$

La première de ces intégrales $\int \frac{c^2 d\varphi\cos^2\varphi}{\Delta} = E(c, \varphi) - b^2 F(c, \varphi)$, la seconde $= b^2\Pi(n, c, \varphi)$, en faisant $n = -\cos^2\lambda$; mais il faut savoir si ce paramètre appartient à la forme circulaire $-1 + b^2\sin^2 p$, ou à la forme logarithmique $-c^2\sin^2 q$, c'est-à-dire si $\cos^2\lambda$ est plus grand ou plus petit que c^2. Or on a $\sin\lambda = \frac{\sin\mu}{\sin\theta}$, $\cos^2\lambda = \frac{\cos^2\mu\cos^2\gamma}{\sin^2\theta}$, et $c^2 = \frac{4f^2 - (\alpha' - \alpha)^2}{4\alpha\alpha'}$,

où $c^2 \sin^2\theta = \left(\frac{2f}{\alpha'+\alpha}\right)^2 - \cos^2\theta = \left(\frac{2f}{\alpha'+\alpha}\right)^2 - \cos^2\mu \sin^2\gamma$. Donc la condition $\cos^2\lambda > c^2$, suppose $\cos\mu > \frac{2f}{\alpha'+\alpha}$: on a vu qu'un triangle formé par les deux côtés α', α, et l'angle compris 2C tel que $c = \sin C$, a pour troisième côté $2f$, ainsi on a toujours $2f < \alpha' + \alpha$; de sorte qu'on peut faire $\frac{2f}{\alpha'+\alpha} = \cos\mathcal{C}$ ou $\sin\mathcal{C} = b\sin\theta$, donc si on a $\mu < \mathcal{C}$ il s'ensuivra $\cos\lambda > \cos\mathcal{C}$, et $\cos^2\lambda > c^2$; ainsi on pourra supposer $n = -1 + b^2\sin^2 p$, et on aura $\sin p = \frac{\sin\lambda}{b}$, ou $\sin p = \frac{\sin\mu}{\sin\mathcal{C}}$. Si au contraire on a $\mu > \mathcal{C}$, il faudra faire $n = -c^2\sin^2 q$, et on aura $\sin q = \frac{\cos\mu\cos\gamma}{c\sin\theta}$, ce qui donne une valeur réelle de q, puisque $c^2\sin^2\theta - \cos^2\mu\cos^2\gamma = \cos^2\mathcal{C} - \cos^2\mu = \sin^2\mu - \sin^2\mathcal{C}$. Le cas particulier où l'on aurait $\mu = \mathcal{C}$, $\cos\lambda = c$, et $n = -c^2$, tient le milieu entre les deux valeurs générales de n ; alors l'intégrale $\int\frac{b^2 d\varphi}{(1-\cos^2\lambda\sin^2\varphi)\Delta} = \int\frac{b^2 d\varphi}{\Delta^3} = \mathrm{E}(c,\varphi) - \frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}$; on a en même temps $\mathrm{P} = \frac{2\mathrm{K}c}{b^2}\left(1 - \frac{\cos\varphi}{\Delta}\right)$, donc en remettant la valeur de K, on a l'expression générale de Z comme il suit :

$$\mathrm{Z} = \tfrac{1}{2}r\sqrt{(\alpha\alpha')}\sin^2\mu\left[2\mathrm{E}(c,\varphi) - b^2\mathrm{F}(c,\varphi) + 2c\left(1 - \frac{\cos\varphi}{\Delta}\right) - \frac{2c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right].$$

Ainsi l'aire indéfinie d'un secteur du cône s'exprime par les seules fonctions E et F, et en faisant $\varphi = 2\pi$, on aura l'aire totale

$$\mathrm{Z}^1 = 2r\sqrt{(\alpha\alpha')}\sin^2\mu\,(2\mathrm{E}^1 c - b^2\mathrm{F}^1 c).$$

Dans ce cas les deux élémens μ et γ qui déterminent la base du cône elliptique, se déduisent des élémens du cône circulaire, par les équations

$$\cos\mu = \frac{2f}{\alpha'+\alpha},\quad \sin\gamma = \frac{\cos\theta}{\cos\mu} = \frac{\alpha'-\alpha}{2f}.$$

Venons maintenant aux deux cas généraux.

284. Soit 1°. $\mu < \mathcal{C}$; on fera $n = -1 + b^2\sin^2 p$, $\sin p = \frac{\sin\mu}{\sin\mathcal{C}}$, et on aura l'aire indéfinie

$$\mathrm{Z} = \mathrm{P} + \tfrac{1}{2}r\sqrt{(\alpha\alpha')}\sin^2\mu\left[\mathrm{E}(c,\varphi) - b^2\mathrm{F}(c,\varphi) + b^2\Pi(n,c,\varphi) + \frac{n\Delta\sin\varphi\cos\varphi}{1+n\sin^2\varphi}\right],$$

où il faudra substituer la valeur de l'intégrale P, savoir :

$$P = 2k\cos\lambda\int\frac{\Delta d\varphi\sin\varphi}{(1-\cos^2\lambda\sin^2\varphi)^2} = \frac{2K\cos\lambda}{b^2c^4\sin^3 p\cos p}(\psi - p + \sin p\cos p - \sin\psi\cos\psi),$$

ψ étant déterminé par l'équation $\cot\psi = \frac{\cos\varphi\cot p}{\Delta}$.

Faisant $\varphi = 2\pi$, on aura l'aire entière du cône

$$Z' = 2r\sqrt{(aa')}\sin^2\mu[E'c - b^2F'c + b^2\Pi'(n, c)],$$

où il faudra substituer la valeur de $\Pi'(n, c)$, exprimée en fonctions de la première et de la seconde espèce.

285. Soit 2°. $\mu > 6$, on fera $n = -c^2\sin^2 q = \frac{\cos\lambda}{c} = \frac{\cot\theta\cot\gamma}{c}$, et on aura

$$\begin{cases} Z = P + \frac{1}{2}r\sqrt{(aa')}\sin^2\mu\left[E(c,\varphi) - b^2F(c,\varphi) + b^2\Pi(n,c,\varphi) + \frac{n\Delta\sin\varphi\cos\varphi}{1+n\sin^2\varphi}\right], \\ P = 2K\cos\lambda\int\frac{\Delta d\varphi\sin\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^2}. \end{cases}$$

L'expression de l'intégrale P se trouvera par logarithmes, au moyen des substitutions $\cos\varphi = b\cot\psi$, $\cos\psi = x$; mais cette valeur n'entre point dans l'expression de l'aire entière, laquelle est

$$Z' = 2r\sqrt{(aa')}\sin^2\mu[E'c - b^2F'c + b^2\Pi'(n, c)].$$

Ces deux cas généraux sont, comme on voit, susceptibles d'une solution aussi simple que celle des cônes à base circulaire; et le cas de $\mu = 6$ est encore plus simple, puisqu'il se résout par les seules fonctions E et F.

Solution générale du cas de la double obliquité.

286. Nous avons à intégrer la formule $dZ = \frac{K\Delta d\varphi}{D^2}$, dans laquelle $D = 1 - \cos\lambda\sin(\varphi - \delta)$; et d'abord pour réduire le dénominateur à sa première puissance, il faut différencier la quantité $\frac{\Delta}{D}\cos(\varphi - \delta)$ et comparer la différentielle à la formule proposée, ce qui donnera cette réduction

$$\frac{Z\sin^2\lambda}{K} + \frac{\cos\lambda.\Delta\cos(\varphi-\delta)}{D} = \int\frac{d\varphi}{\Delta}\cdot\frac{1 - c^2\sin^2\varphi - c^2\cos\lambda\sin\varphi\cos\varphi\cos(\varphi-\delta)}{1-\cos\lambda\sin(\varphi-\delta)}.$$

Soit T cette dernière intégrale, pour faire disparaître $\cos\varphi$ du dénominateur il faudra multiplier les deux termes de la fraction par $1 - \cos\lambda\sin(\varphi + \delta)$, et le nouveau dénominateur sera $D' = 1 - \cos^2\lambda\sin^2\delta - 2\cos\lambda\cos\delta\sin\varphi + \cos^2\lambda\sin^2\varphi$. Le produit étant fait pareillement dans le numérateur, on verra que l'intégrale se partage en trois parties, l'une dégagée du dénominateur D', les deux autres affectées de ce dénominateur; on aura ainsi

$$T = \int (c^2 \cos^2\delta - c^2 \sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta} - P + T',$$

$$P = \cos\lambda \sin\delta \int \frac{d\varphi \cos\varphi\,(1 - c^2 \cos\lambda \cos\delta \sin\varphi)}{D'\Delta},$$

$$T' = \int \frac{d\varphi}{D'\Delta}\left[1 - c^2\cos^2\delta + c^2\cos^2\lambda \sin^2\delta \cos^2\delta - \cos\lambda \cos\delta (1 - c^2 \cos 2\delta)\sin^2\varphi\right].$$

Par la substitution $c \sin\varphi = x$, l'intégrale P devient de la forme $\int \frac{X dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, X étant une fonction rationnelle de x; ainsi cette intégrale ne dépend que des arcs de cercle et des logarithmes; d'ailleurs elle n'entrera pas dans l'expression de l'aire entière du cône. Il ne reste donc à trouver que l'intégrale T'.

Pour cela représentons la différentielle à intégrer par $\frac{d\varphi}{D'\Delta}(B - C\sin^2\varphi)$, il faudra multiplier les deux termes de cette fraction par ce que devient D' en changeant le signe de $\sin\varphi$. On aura alors au lieu de D' un nouveau dénominateur $D'' = A^2 + 2A \cos^2\lambda \cos 2\alpha \sin^2\varphi + \cos^4\lambda \sin^4\varphi$, dans lequel $A = 1 - \cos^2\lambda \sin^2\delta$, et $\cot\alpha = \sin\lambda \tang\delta$; et l'intégrale sera partagée en deux parties de sorte qu'on aura $T' = P' + T''$,

$$P' = \cos\lambda \cos\delta \int \frac{d\varphi \sin\varphi}{D'\Delta}\left[b^2 - b^2 \cos^2\lambda \cos^2\delta + (1 - c^2 \cos 2\delta)\cos^2\lambda \cos^2\varphi\right],$$

$$T'' = \int \frac{d\varphi}{\Delta} \cdot \frac{A - A^2c^2\cos^2\delta - \cos^2\lambda \sin^2\varphi\left[Ac^2 \cos^2\delta + (1 - 2c^2 \cos^2\delta)\cos 2\delta\right]}{A^2 + 2A \cos^2\lambda \cos 2\alpha \sin^2\varphi + \cos^4\lambda \sin^4\varphi}.$$

L'intégrale P' dépend des arcs de cercle et des logarithmes, et l'intégrale T'' réduite au dernier degré de simplicité dont elle est susceptible, dépend d'une fonction elliptique de troisième espèce dont le paramètre est imaginaire; elle s'exprimera donc par deux autres fonctions dont les paramètres sont réels, suivant les formules qui ont été données pour cet objet.

Rassemblant ces différens résultats, on aura l'aire indéfinie Z par la formule

$$Z = \tfrac{1}{2} r\sqrt{(aa')}.\sin^2\mu\left[E(c,\varphi) - (1 - c^2\cos^2\delta)F(c,\varphi) - P + P' + T'' - \frac{A\cos\lambda\cos(\varphi - \delta)}{D}\right].$$

Prenant cette intégrale depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = 2\pi$, et appelant T''_1 la valeur complète de T'', c'est-à-dire cette valeur prise de $\varphi = 0$ à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on aura l'aire totale du cône elliptique,

$$Z' = 2r\sqrt{(aa')}\sin^2\mu\left[E'c - (1 - c^2\cos^2\delta)F'c + T''_1\right].$$

Nous pourrions continuer plus loin cette analyse en cherchant l'expression de l'intégrale T'' par deux fonctions de troisième espèce dont les para-

mètres sont réels, mais la prolixité qui semble inévitable dans ces calculs, est une raison suffisante pour ne pas aller au-delà des résultats généraux qui viennent d'être obtenus.

Examen d'une question particulière.

287. La question de la surface du cône oblique nous donne l'occasion d'en examiner une d'un ordre moins élevé, mais dont le résultat mérite d'être remarqué.

Dans un cône elliptique à double obliquité il y a toujours un apothème *maximum* et un apothème *minimum;* mais quelquefois il peut y en avoir quatre; c'est-à-dire qu'outre le *maximum* et le *minimum* absolus qui existent dans tous les cas, il y a encore deux *maxima* ou *minima* relatifs.

La question ramenée à la base du cône, se réduit à faire passer par le point O dont les coordonnées sont f et g, deux ou quatre perpendiculaires à la circonférence de l'ellipse. Soient x et y les coordonnées de l'un des points cherchés, on aura l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ à laquelle on satisfait en faisant $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$; et le quarré de la distance de ce point au point O étant $(f - a\cos\theta)^2 + (g - b\sin\theta)^2$, la condition du *maximum* ou *minimum* de cette distance donnera l'équation

$$af\sin\theta - bg\cos\theta = c^2\sin\theta\cos\theta. \qquad (1)$$

Soit $\frac{af}{bg} = p$, $\frac{c^2}{bg} = q$, cette équation deviendra $p\sin\theta - \cos\theta = q\sin\theta\cos\theta$; elle serait facile à résoudre trigonométriquement en la mettant sous la forme $\sin(\theta - \alpha) = k\sin 2\theta$; mais pour avoir la solution analytique, soit $\tang\frac{1}{2}\theta = t$, on aura

$$t^4 - 2(p+q)t^3 + 2(p-q)t - 1 = 0. \qquad (2)$$

Puisque cette équation du quatrième degré a son dernier terme négatif, il s'ensuit qu'elle a au moins deux racines réelles, ce qui est manifeste par la nature du problème. On trouve d'ailleurs par les formules connues que l'équation (2) aura deux racines réelles seulement si la quantité

$$27p^2q^2 - (q^2 - p^2 - 1)^3$$

est positive, et qu'elle en aura quatre, si cette quantité est négative; mais cette condition peut se réduire à de plus simples termes.

Soit $p^2 = \alpha^3$ et $q^2 = \beta^3$, on aura dans le premier cas $3\alpha\beta - \beta^3 + \alpha^3 + 1 > 0$ ou $(\alpha + 1)^3 - \beta^3 - 3\alpha(\alpha + 1 - \beta) > 0$. Le premier membre est le pro-

duit de $\alpha+1-\beta$ par la quantité toujours positive $\beta^2+\beta(\alpha+1)+(\alpha+1)^2$. Donc, en supprimant ce facteur, la condition précédente deviendra... $\alpha+1-\beta>0$, c'est-à-dire que l'équation (2) aura deux racines réelles et deux imaginaires si on a $q^{\frac{2}{3}}<p^{\frac{2}{3}}+1$, et qu'elle aura quatre racines réelles si on a $q^{\frac{2}{3}}>p^{\frac{2}{3}}+1$.

De là on voit que par le point donné O, dont les coordonnées sont f et g, il ne pourra être mené que deux normales à l'ellipse, si l'on a $c^{\frac{4}{3}}<(af)^{\frac{2}{3}}+(bg)^{\frac{2}{3}}$, et qu'on en pourra mener quatre dans le cas contraire $c^{\frac{4}{3}}>(af)^{\frac{2}{3}}+(bg)^{\frac{2}{3}}$: en cas d'égalité il n'y aurait que trois normales parce que deux des quatre coïncideraient en une seule.

Si on considère f et g comme les coordonnées x et y d'une courbe décrite d'après l'équation $(c^2)^{\frac{2}{3}}=(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}$, cette courbe ne sera autre chose que la développée de notre ellipse; d'où résulte ce théorème :

D'un point quelconque pris dans l'intérieur de la développée de l'ellipse, il est toujours possible de mener quatre normales à la circonférence de l'ellipse; de tout point pris hors de l'aire de cette courbe on n'en pourra mener que deux, et d'un point pris sur le contour de cette courbe, on pourra toujours faire passer trois normales.

Ce théorème au reste se démontre immédiatement par l'inspection de la courbe, en se rappelant que toute perpendiculaire à l'ellipse est tangente à sa développée, et réciproquement.

On déduit de là aussi une conséquence fort remarquable, sur la résolution de l'équation du quatrième degré dont le troisième terme manque et dont le dernier terme est négatif. Cette équation, qu'on peut toujours réduire à la forme

$$t^4+At^3+Bt-1=0,$$

aura deux racines réelles et deux imaginaires, si l'on a $\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1$; elle aura quatre racines réelles dans le cas contraire. On peut encore réduire la même équation à la forme $p\sin\theta-\cos\theta=q\sin\theta\cos\theta$, en faisant $t=\tang\frac{1}{2}\theta$, $p=\frac{1}{4}(A+B)$; $q=\frac{1}{4}(A-B)$; et si de plus on fait $\cot\lambda=\frac{1}{4}(A+B)$, $k=\frac{1}{8}(A-B)\sin\lambda$, elle se réduira ultérieurement à la forme $\sin(\theta-\lambda)=k\sin 2\theta$, qu'il est facile de résoudre trigonométriquement.

SECTION II.

Détermination de l'aire de l'ellipsoïde.

288. Soit l'équation de la surface proposée,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

l'expression de l'aire, comprise entre des limites données, dépendra de la double intégrale

$$S=\int\!\!\int dxdy\sqrt{\left(\frac{1+\frac{c^2-a^2}{a^2}\cdot\frac{x^2}{a^2}+\frac{c^2-b^2}{b^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)};$$

mais l'une ou l'autre des deux intégrations ne peut s'effectuer sans introduire des fonctions elliptiques qui ne permettraient pas d'obtenir la seconde intégrale. Pour rendre la première intégration possible, au moins par arcs de cercle ou par logarithmes, on pourrait appliquer la méthode que nous avons donnée dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, année 1788; mais on parviendra plus directement au même but de la manière suivante.

Soit $z=c\cos\theta$, on aura $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\theta$; soit ensuite $y=b\sin\theta\cos\varphi$, on aura $x=a\sin\theta\sin\varphi$. D'après ces équations, qui équivalent à l'équation de la surface, il faudra exprimer l'élément de l'aire en fonction des deux nouvelles variables θ et φ. Et d'abord pour avoir la valeur de $dxdy$, je différencie l'équation $x=a\sin\theta\sin\varphi$, en supposant θ constant, j'ai $dx=ad\varphi\cos\varphi\sin\theta$; ensuite il faut avoir la valeur de dy, en supposant x constante; c'est ce que donnera l'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\theta$, d'où l'on tire $ydy=b^2d\theta\sin\theta\cos\theta$; donc $dxdy=abd\varphi d\theta\sin\theta\cos\theta$.

Substituant cette valeur ainsi que celles de x et y dans l'expression de l'aire S; faisant de plus, pour abréger, $\frac{a^2-c^2}{a^2}=\delta$, $\frac{b^2-c^2}{b^2}=\epsilon$, on aura

$$S=\int\!\!\int abd\varphi d\theta\sin\theta\sqrt{[1-(\delta\sin^2\varphi+\epsilon\cos^2\varphi)\sin^2\theta]}.$$

L'intégrale par rapport à θ est facile à trouver par logarithmes; mais comme la formule qui en résulterait pour la seconde intégration, n'est pas du nombre de celles qu'on sait ramener aux fonctions connues, nous nous contenterons d'intégrer par séries.

289. Soit donc $\delta \sin^2\varphi + \epsilon \cos^2\varphi = p$, on aura, en développant le radical,

$$S = \int\int ab\,d\varphi\,d\theta \sin\theta \left(1 - \frac{1}{2}p\sin^2\theta - \frac{1.1}{2.4}p^2\sin^4\theta - \frac{1.1.3}{2.4.6}p^3\sin^6\theta - \text{etc.}\right).$$

Or en intégrant depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \frac{1}{2}\pi$, on a

$$\int d\theta \sin\theta = 1, \quad \int d\theta \sin^3\theta = \frac{2}{3}, \quad \int d\theta \sin^5\theta = \frac{2.4}{3.5}, \quad \text{etc.}$$

Donc il résulte de la première intégration,

$$S = \int ab\,d\varphi \left(1 - \frac{1}{3}p - \frac{1}{3.5}p^2 - \frac{1}{5.7}p^3 - \frac{1}{7.9}p^4 - \text{etc.}\right).$$

Cette formule doit être intégrée de nouveau depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; soient donc dans ces limites $\int p\,d\varphi = \frac{\pi}{2}.P'$, $\int p^2 d\varphi = \frac{\pi}{2}.P''$, $\int p^3 d\varphi = \frac{\pi}{2}.P'''$, etc.; et l'on aura, après avoir multiplié par 8, l'aire totale de l'ellipsoïde

$$8S' = 4\pi ab \left(1 - \frac{1}{3}P' - \frac{1}{3.5}P'' - \frac{1}{5.7}P''' - \frac{1}{7.9}P^{\text{IV}} - \text{etc.}\right),$$

formule dans laquelle il reste à substituer les valeurs suivantes :

$$P' = \delta . \frac{1}{2} + \epsilon . \frac{1}{2},$$

$$P'' = \delta^2 . \frac{1.3}{2.4} + \delta\epsilon . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} + \epsilon^2 . \frac{1.3}{2.4},$$

$$P''' = \delta^3 . \frac{1.3.5}{2.4.6} + \delta^2\epsilon . \frac{1.3}{2.4} . \frac{1}{2} + \delta\epsilon^2 . \frac{1}{2} . \frac{1.3}{2.4} + \epsilon^3 . \frac{1.3.5}{2.4.6},$$

etc.

La loi de ces expressions est manifeste, et on peut observer que le terme général $P^{(n)}$ est le coefficient de z^n dans le développement de $(1 - \delta z)^{-\frac{1}{2}}(1 - \epsilon z)^{-\frac{1}{2}}$, ou dans celui du produit

$$\left(1 + \frac{1}{2}\delta z + \frac{1.3}{2.4}\delta^2 z^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\delta^3 z^3 + \text{etc.}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\epsilon z + \frac{1.3}{2.4}\epsilon^2 z^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\epsilon^3 z^3 + \text{etc.}\right).$$

Au reste, la suite P', P'', P''', etc. sera nécessairement convergente si δ et ϵ sont tous deux plus petits que l'unité, ce qui aura toujours lieu en prenant pour c la plus petite des trois quantités a, b, c.

290. Le problème de déterminer l'aire totale de l'ellipsoïde est résolu par

la suite qu'on vient de trouver, aussi simplement qu'il peut l'être quand on n'a pour but que d'obtenir une approximation. Mais il faut recourir à d'autres moyens, si on veut avoir un résultat dépendant seulement des fonctions elliptiques ou des quadratures algébriques.

Dans la méthode précédente nous avons partagé l'ellipse qui sert de base à la surface proposée, en zones elliptiques concentriques, déterminées par les projections des sections faites dans l'ellipsoïde, parallèlement à sa base. Toute autre manière de partager la base est également admissible et doit conduire au même résultat après les deux intégrations; mais il en est une surtout qui mérite d'être soumise au calcul, et qui semble promettre des résultats élégans. Je veux parler des projections qui naissent des lignes de plus grande et de plus petite courbure tracées sur la surface de l'ellipsoïde.

Monge, dans ses Feuilles d'Analyse appliquée (édit. de l'an 9, n° 19), a donné la construction de ces courbes, comme il suit.

Ayant supposé $a > b$ et $b > c$, soit pris pour plan de projection le plan des x et y, qui est celui de la section principale dont a et b sont les demi-axes. Soient décrites dans ce plan une ellipse et une hyperbole auxiliaires, qui aient les demi-axes communs A et B ainsi déterminés,

$$A = a\sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}\right)},$$

$$B = b\sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}\right)},$$

le demi-axe A étant dirigé dans le sens du demi-axe a, et B dans le sens de b.

L'équation de l'hyperbole sera $y^2 = \frac{B^2}{A^2}(x^2 - A^2)$, et l'équation de l'ellipse, $y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2)$; elles se toucheront par le sommet où $x = A$, et d'ailleurs on peut observer qu'en vertu des suppositions faites on a $A < a$.

291. Cela posé, soient $x = \alpha$, $y = \beta$, les coordonnées d'un point pris à volonté sur l'hyperbole, ensorte qu'on ait $\beta^2 = \frac{B^2}{A^2}(\alpha^2 - A^2)$; si, avec les demi-axes α et β, pris dans les mêmes directions que a et b, on décrit une ellipse, cette ellipse et toutes les ellipses décrites de la même manière suivant les diverses valeurs de α et β, avec la seule condition qu'on ait $\alpha < a$, seront les projections sur le plan des x et y, de toutes les lignes de courbure d'une même espèce, tracées sur la surface de l'ellipsoïde.

Les projections des lignes de courbure de l'autre espèce, qui seront des

hyperboles, se détermineront semblablement en prenant pour demi-axes de chaque hyperbole, les coordonnées α', β' d'un même point de l'ellipse auxiliaire, lesquelles doivent satisfaire à l'équation $\beta'^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - \alpha'^2)$.

Les projections des lignes de courbure de la première espèce seront donc les ellipses tracées d'après l'équation

$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - x^2) = \frac{B^2}{A^2}(\alpha^2 - x^2)\left(1 - \frac{A^2}{\alpha^2}\right),$$

en donnant à α toutes les valeurs depuis $\alpha = A$ jusqu'à $\alpha = a$.

Et les projections des lignes de courbure de la seconde espèce seront toutes les hyperboles décrites d'après l'équation

$$y^2 = \frac{\beta'^2}{\alpha'^2}(x^2 - \alpha'^2) = \frac{B^2}{A^2}(x^2 - \alpha'^2)\left(\frac{A^2}{\alpha'^2} - 1\right),$$

en donnant à α' toutes les valeurs depuis $\alpha' = 0$ jusqu'à $\alpha' = A$.

Considérons plus particulièrement les ellipses qui sont les projections des lignes de courbure de la première espèce.

Lorsqu'on fait $\alpha = A$, on a $\beta = 0$, $y = 0$, de sorte que l'ellipse est infiniment étroite, et se réduit à son grand axe. A mesure que le demi-axe α augmente, l'autre demi-axe β augmente aussi; et enfin lorsqu'on fait $\alpha = a$, l'ellipse de projection se confond avec la base de l'ellipsoïde, ce qui est le dernier terme des projections.

292. Cela posé, cherchons l'aire de l'ellipsoïde qui répond à l'élément de la base $dxdy$, compris entre deux ellipses de projection infiniment proches. L'une de ces ellipses ayant pour équation $y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - x^2)$, on pourra faire $x = \alpha \sin\psi$, ce qui donnera $y = \beta \cos\psi$. Différenciant x en supposant α constante, on aura $dx = \alpha d\psi \cos\psi$; si on passe ensuite de cette ellipse à l'ellipse infiniment voisine, il faudra différencier l'équation

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(\alpha^2 - x^2)\left(1 - \frac{A^2}{\alpha^2}\right),$$

en faisant varier α seul, ce qui donnera $ydy = \frac{B^2}{A^2}\alpha d\alpha\left(1 - \frac{A^2 x^2}{\alpha^4}\right)$, donc l'élément de la projection

$$dxdy = \frac{B^2}{A^2} \cdot \frac{d\alpha d\psi}{\beta}(\alpha^2 - A^2 \sin^2\psi).$$

Lorsqu'on fait varier ψ en supposant α constant, le point de projection ne varie que sur une même ellipse de projection; de même lorsqu'on fait

varier α en supposant ψ constant, le point de projection ne varie que sur une hyperbole de projection ; car en éliminant α et β des équations $\alpha = \frac{x}{\sin\psi}$, $\beta = \frac{y}{\cos\psi}$, $\beta^2 = \frac{B^2}{A^2}(\alpha^2 - A^2)$, on a $y^2 = \frac{B^2\cos^2\psi}{A^2\sin^2\psi}(x^2 - A^2\sin^2\psi)$, ce qui est l'équation d'une hyperbole de projection, dont les demi-axes sont $\alpha' = A\sin\psi$, $\beta' = B\cos\psi$.

De là on voit que l'élément de projection, dont nous venons de donner la valeur, représente le quadrilatère compris entre deux ellipses et deux hyperboles de projection infiniment voisines.

Si on substitue maintenant les valeurs de x, y, et $dxdy$ dans l'expression générale de S, on aura

$$S = \iint \frac{B}{A}\cdot\frac{\alpha^2 - A^2\sin^2\psi}{\sqrt{(\alpha^2 - A^2)}}\,d\alpha\,d\psi\sqrt{\left[\frac{1 - \delta\frac{\alpha^2\sin^2\psi}{a^2} - \epsilon\frac{\beta^2\cos^2\psi}{b^2}}{1 - \frac{\alpha^2\sin^2\psi}{a^2} - \frac{\beta^2\cos^2\psi}{b^2}}\right]}.$$

Cette expression paraît au premier coup d'œil beaucoup plus compliquée que celle à laquelle nous avons été conduits par la première méthode ; mais en l'examinant de plus près, on trouve qu'elle est susceptible d'une réduction fort remarquable.

En effet, si on substitue la valeur $\beta^2 = \frac{B^2}{A^2}(\alpha^2 - A^2)$, on reconnaîtra que la quantité sous le radical se décompose en deux facteurs distincts, l'un qui ne dépend que de α, l'autre qui ne dépend que de ψ, de sorte qu'on a

$$S = \iint \frac{B}{A}\cdot\frac{\alpha^2 - A^2\sin^2\psi}{\sqrt{(\alpha^2 - A^2)}}\,d\alpha\,d\psi\sqrt{\left[\frac{\sin^2\psi + \frac{\alpha^2}{b^2}\cos^2\psi}{\sin^2\psi + \frac{B^2\alpha^2}{A^2b^2}\cos^2\psi}\cdot\frac{1 - \delta\frac{\alpha^2}{a^2}}{1 - \frac{\alpha^2}{a^2}}\right]}.$$

Si on observe maintenant que pour l'objet proposé il faut prendre l'intégrale par rapport à ψ, depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = \frac{1}{2}\pi$, et l'intégrale par rapport à α, depuis $\alpha = A$ jusqu'à $\alpha = a$; on verra que ces deux intégrales sont entièrement indépendantes l'une de l'autre, et qu'elles peuvent être cherchées isolément, ce qui permettra de réduire l'aire entière de l'ellipsoïde à des quadratures algébriques, et même, comme on le prouvera ensuite, aux seules fonctions elliptiques.

293. Soient donc

$$M = \int d\psi\sqrt{\left(\frac{\sin^2\psi + \frac{a^2}{b^2}\cos^2\psi}{\sin^2\psi + \frac{B^2a^2}{A^2b^2}\cos^2\psi}\right)},$$

$$N = \int d\psi \sin^2\psi \sqrt{\left(\frac{\sin^2\psi + \frac{a^2}{b^2}\cos^2\psi}{\sin^2\psi + \frac{B^2a^2}{A^2b^2}\cos^2\psi}\right)},$$

ces intégrales devant être prises depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = \frac{1}{2}\pi$.

Soient encore

$$P = \int \frac{\alpha^2 d\alpha}{\sqrt{(\alpha^2 - A^2)}} \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 - \alpha^2}\right)},$$

$$Q = \int \frac{d\alpha}{\sqrt{(\alpha^2 - A^2)}} \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 - \alpha^2}\right)},$$

ces intégrales devant être prises depuis $\alpha = A$ jusqu'à $\alpha = a$.

La surface cherchée sera

$$S = \frac{B}{A} PM - ABQN.$$

Ainsi tout se réduit à trouver les quatre intégrales P, Q, M, N, dans les limites désignées.

Pour simplifier les formules M et N, soit $\tang \psi = \frac{a}{b} \tang \omega$, ensuite $n = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$ et $c'^2 = 1 - \frac{A^2}{B^2} = \frac{b^2}{b^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$, il résultera de ces substitutions

$$M = \frac{aA}{bB} \int \frac{d\omega}{(1 + n\sin^2\omega)\sqrt{(1 - c'^2\sin^2\omega)}} = \frac{aA}{bB} \Pi(n, c', \omega),$$

$$N = \frac{a^3A}{b^3B} \int \frac{d\omega \sin^2\omega}{(1 + n\sin^2\omega)^2 \sqrt{(1 - c'^2\sin^2\omega)}}$$

Mais par les réductions connues, on a

$$\int \frac{d\omega \sin^2\omega}{(1 + n\sin^2\omega)^2 \Delta(c', \omega)} = -\frac{n\sin\omega\cos\omega\,\Delta(c', \omega)}{2(n+1)(n+c'^2)(1 + n\sin^2\theta)} + \frac{F(c', \theta)}{2n(n+1)}$$
$$- \frac{E(c', \theta)}{2(n+1)(n+c'^2)} + \frac{n^2 + c'^2}{2n(n+1)(n+c'^2)} \Pi(n, c', \theta).$$

Donc en étendant les intégrales jusqu'à $\theta = \frac{1}{2}\pi$, on aura pour les valeurs complètes de M et N,

$$M = \frac{aA}{bA} \Pi^1(n, c'),$$

$$N = \frac{aA}{2bBn}\left[F^1(c') - \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) E^1(c') + \left(\frac{a^2 - b^2}{b^2}\right) \Pi^1(n, c')\right].$$

294. A l'égard des intégrales P, Q, comme α est toujours compris entre A et a, si l'on fait $A = a \sin\mu$, on pourra prendre

$$\alpha^2 = \frac{a^2 \sin^2\mu}{1 - \cos^2\mu \sin^2\zeta},$$

et la substitution donnera

$$P = ab \sin^2\mu \int \frac{d\zeta \sqrt{(1 - b'^2 \sin^2\zeta)}}{(1 - \cos^2\mu \sin^2\zeta)^2},$$

$$Q = \frac{b}{a} \int \frac{d\zeta \sqrt{(1 - b'^2 \sin^2\zeta)}}{1 - \cos^2\mu \sin^2\zeta}.$$

On a fait dans ces formules $b'^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} = \frac{A^2}{B^2}$, de sorte qu'on a..... $b'^2 + c'^2 = 1$, et qu'ainsi les modules b' et c' sont complémens l'un de l'autre.

Soit le paramètre $n = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \cot^2\lambda$, on aura $b = a \sin\lambda$, et $b'^2 = \frac{a^2}{b^2} \cos^2\mu = \frac{\cos^2\mu}{\sin^2\lambda}$, ou $\cos^2\mu = b'^2 \sin^2\lambda$; l'intégrale Q se rapporte donc aux fonctions elliptiques de la troisième espèce, dont le paramètre $n' = -\cos^2\mu = -b'^2 \sin^2\lambda$, et on trouvera

$$Q = \frac{1}{\sin\lambda} F(b', \zeta) - \frac{\cos^2\lambda}{\sin\lambda} \Pi(n', b', \zeta).$$

Pour avoir la valeur de P, il faudra d'abord employer cette formule de réduction

$$\int \frac{d\zeta \sqrt{(1 - b'^2 \sin^2\zeta)}}{(1 + n' \sin^2\zeta)^2} = \frac{n' \sin\zeta \cos\zeta \,\Delta(b', \zeta)}{2(1 + n')(1 + n' \sin^2\zeta)} - \frac{(b'^2 + n')}{2n'(1 + n')} F(b', \zeta)$$
$$+ \frac{E(b', \zeta)}{2(1 + n')} + \frac{n'^2 + 2n' + b'^2}{2n'(1 + n')} \Pi(n', b', \zeta).$$

Faisant ensuite $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, on aura les intégrales complètes

$$P = \frac{a^2}{2 \sin\lambda} [\cos^2\lambda F^1(b') + \sin^2\lambda E^1(b') - (1 - 2 \sin^2\lambda + b'^2 \sin^4\lambda) \Pi^1(n', b')],$$

$$Q = \frac{1}{\sin\lambda} F^1(b') - \frac{\cos^2\lambda}{\sin\lambda} \Pi^1(n', b').$$

295. Maintenant si dans l'expression de l'aire S on substitue les valeurs trouvées de M, N, P, Q, il en résultera

$$S = \frac{a^2}{2} \Pi^1(n, c') [\cot^2\lambda F^1(b') + E^1(b') + (\sin^2\mu - \cot^2\lambda) \Pi^1(n', b')]$$
$$- \frac{a^2}{2} [F^1(b') - \cos^2\lambda \Pi^1(n', b')] \left[\frac{\sin^2\mu}{\cos^2\lambda} F^1(c') - E^1(c') + \frac{\cot^2\lambda - \sin^2\mu}{\cos^2\lambda} \Pi^1(n', c')\right].$$

Par un premier développement qui fait disparaître les termes où les deux fonctions Π^1 sont multipliées, on obtient

$$S = \frac{a^2}{2}\Pi^1(n, c')\left[\left(\frac{\sin^2\mu}{\cos\lambda} - 1\right)F^1(b') + E^1(b')\right]$$
$$- \frac{a^2}{2}\left[\frac{\sin^2\mu}{\cos^2\lambda}F^1(c') - E^1(c')\right][F^1(b') - \cos^2\lambda\Pi^1(n', b')].$$

Mais par les valeurs connues des fonctions Π^1, on a

$$\Pi^1(n,c') = \sin^2\lambda F^1(c') + \frac{\sin\lambda\cos\lambda}{\Delta(b',\lambda)}\left[\tfrac{1}{2}\pi + F^1(c)F(b',\lambda) - F^1(c)E(b',\lambda) - E^1(c)F(b',\lambda)\right],$$

$$F^1(b) - \cos^2\lambda\Pi^1(n', b') = \sin^2\lambda F^1(b') + \frac{\sin\lambda\cos\lambda}{\Delta(b',\lambda)}[F^1(b')E(b',\lambda) - E^1(b')F(b',\lambda)].$$

Substituant et faisant les réductions auxquelles donne lieu la formule connue $\frac{\pi}{2} = F^1(c')E^1(b') + F^1(b')E^1(c') - F^1(b')F^1(c')$, on trouvera

$$S = \frac{\pi a^2}{4}\cdot\frac{\sin\lambda\cos\lambda}{\Delta(b',\lambda)}\left[\left(\frac{\sin^2\mu}{\cos^2\lambda} - 1\right)[F^1(b') - F(b',\lambda)]\right.$$
$$\left. + E^1(b') - E(b',\lambda) + \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\Delta(b',\lambda)\right].$$

J'observe qu'on peut encore simplifier ce résultat en prenant un nouvel angle ν tel que $F(b',\lambda) + F(b',\nu) = F^1(b')$; il faut pour cela qu'on ait $c'\tang\lambda\tang\nu = 1$, ce qui donne $\cos\nu = \frac{c}{a}$; on aura en même temps $E(b',\lambda) + E(b',\nu) = E^1(b') + \frac{\sin\nu\cos\nu}{\Delta(b',\nu)}$. Donc enfin l'aire entière de l'ellipsoïde aura pour expression

$$8S = 2\pi a^2\cdot\frac{\sin\nu\cos\nu}{\Delta(b',\nu)}\left[\frac{\cos^2\nu}{\sin^2\nu}F(b',\nu) + E(b',\nu) + \frac{\cos\nu}{\sin\nu}\Delta(b',\nu)\right].$$

D'ailleurs comme on a $b'^2 = \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} = \frac{b^2 - c^2}{b^2\sin^2\nu}$, il en résulte $\Delta(b',\nu) = \frac{c}{b}$, de sorte que la valeur de 8S se réduit à cette forme très simple,

$$8S = 2\pi c^2 + \frac{2\pi ab}{\sin\nu}\left[\frac{c^2}{a^2}F(b',\nu) + \frac{a^2 - c^2}{a^2}E(b',\nu)\right],$$

formule dont on pourra faire l'application immédiate, en se rappelant seulement qu'on a $\cos\nu = \frac{c}{a}$ et $b'^2 = \frac{b^2 - c^2}{b^2\sin^2\nu}$.

Il est facile de vérifier cette formule dans les deux cas où l'ellipsoïde devient un solide de révolution; car si l'on a $a = b$, la formule donne pour l'aire du sphéroïde aplati,

$$8S = 2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{\sin\nu}\log\left(\frac{1 + \sin\nu}{1 - \sin\nu}\right);$$

et si l'on a $b = c$, la formule donne pour l'aire du sphéroïde allongé

$$8S = \frac{2\pi ab}{\sin\nu}(\nu + \sin\nu\cos\nu),$$

ce qui s'accorde avec les résultats connus.

Nous sommes donc parvenus à exprimer par des fonctions elliptiques très simples, l'aire entière de l'ellipsoïde, et on peut dans une infinité de cas l'exprimer par un seul arc d'ellipse, ce qui a lieu lorsque $a^2 = c^2 + b^2$.

296. Il résulte de cette solution que la série trouvée par la première méthode,

$$4\pi ab\left(1 - \frac{1}{3}P' - \frac{1}{3.5}P'' - \frac{1}{5.7}P''' - \text{etc.}\right),$$

est susceptible d'être sommée à l'aide des fonctions elliptiques; et c'est ce qu'on peut vérifier directement de la manière suivante.

Considérons la fonction $\Gamma(y)$ ou simplement Γ, dont la valeur développée serait

$$\Gamma = y - \frac{1}{3}P'y^3 - \frac{1}{3.5}P''y^5 - \frac{1}{5.7}P'''y^7 - \text{etc.};$$

on aura par des différenciations successives,

$$\frac{d\Gamma}{dy} = 1 - P'y^2 - \frac{1}{3}P''y^4 - \frac{1}{5}P'''y^6 - \text{etc.},$$

$$\frac{1}{y^2}\cdot\frac{d\Gamma}{dy} - \frac{1}{y}\cdot\frac{dd\Gamma}{dy^2} = \frac{1}{y^2} + P' + P''y^2 + P'''y^4 + \text{etc.}$$

Mais si on remonte à l'origine des quantités P', P'', P''', etc., on trouvera que la suite $\frac{\pi}{2}(1 + P'y^2 + P''y^4 + P'''y^6 + \text{etc.})$ n'est autre chose que l'intégrale prise, depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, de la différentielle

$$d\varphi\,(1 + py^2 + p^2y^4 + p^3y^6 + \text{etc.}) = \frac{d\varphi}{1 - py^2} = \frac{d\varphi}{1 - (\delta\sin^2\varphi + \varepsilon\cos^2\varphi)\,y^2}.$$

Cette intégrale a pour valeur

$$\frac{\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{[(1 - \delta y^2)\,(1 - \varepsilon y^2)]}}.$$

Donc si on fait pour abréger, $R = \sqrt{[1 - (\delta + \varepsilon)y^2 + \delta\varepsilon y^4]}$, on aura

$$\frac{1}{y^2}\cdot\frac{d\Gamma}{dy} - \frac{1}{y}\cdot\frac{dd\Gamma}{dy^2} = \frac{1}{y^2R};$$

d'où résulte en multipliant par dy et intégrant

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{d\Gamma}{dy} = \int -\frac{dy}{y^2R} = \frac{R}{y} - \delta\varepsilon\int\frac{y^2dy}{R}.$$

Multipliant par $y dy$ et intégrant de nouveau, on aura

$$\Gamma = \int R dy - \delta\varepsilon . \frac{y^2}{2} \int \frac{y^2 dy}{R} + \frac{\delta\varepsilon}{2} \int \frac{y^4 dy}{R},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\Gamma = \frac{\delta}{2}(1 - y^2) \int \frac{y^2 dy}{R} + \frac{1}{2} y R + \int \frac{dy}{2R}(1 - \delta\varepsilon y^2).$$

Soit maintenant $y\sqrt{\delta} = \sin\psi$ et $k^2 = \frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{a^2}{b^2} . \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}$, on aura $\frac{dy}{R} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} . \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2\psi)}}$, et

$$\int \frac{dy}{R}(1 - \delta\varepsilon y^2) = \frac{1 - \delta}{2\sqrt{\delta}} F(k, \psi) + \frac{\sqrt{\delta}}{2} E(k, \psi).$$

Il reste à faire dans ces expressions $y = 1$, ce qui donnera $\sin\psi = \sqrt{\delta}$, $\cos\psi = \sqrt{(1 - \delta)} = \frac{c}{a}$, $R = \sqrt{(1 - \delta)} . \sqrt{1 - \varepsilon} = \frac{c^2}{ab}$; donc la valeur cherchée

$$\Gamma = \frac{1}{2} . \frac{c^2}{ab} + \frac{\cos^2\psi}{2\sin\psi} F(k, \psi) + \frac{\sin^2\psi}{2\sin\psi} E(k, \psi);$$

d'où résulte enfin l'aire de l'ellipsoïde

$$8S = 2\pi c^2 + \frac{2\pi ab}{\sin\psi} [\cos^2\psi F(k, \psi) + \sin^2\psi E(k, \psi)];$$

et on voit que cette formule s'accorde entièrement avec celle que nous avons trouvée par la seconde méthode, puisque les quantités k et ψ ne diffèrent pas de celles qui ont été désignées ci-dessus par b' et ν.

297. Nous remarquerons enfin qu'on peut déterminer généralement l'aire d'un quadrilatère quelconque compris entre deux lignes de courbure d'une espèce, et deux lignes de courbure de l'autre espèce. Il suffit pour cela de substituer dans la formule

$$S = \frac{B}{A} PM - ABQN,$$

les valeurs des intégrales M, N, P, Q, prises entre les limites données. Il faudra donc prendre les deux intégrales M, N entre les deux valeurs de x qui répondent aux côtés du quadrilatère dont les projections sont des hyperboles, et les deux intégrales P et Q entre les deux valeurs de x qui correspondent aux côtés du quadrilatère dont les projections sont des ellipses. Ainsi tous les quadrilatères dont il s'agit peuvent être déterminés par des fonctions elliptiques, et les résultats deviendront plus simples si on les

applique à la zone entière comprise entre deux lignes de courbure d'une même espèce.

La figure 14 pourra servir à faire mieux entendre les constructions que cette section suppose.

AKB est l'ellipse principale dont les demi-axes sont $CA = a$, $CB = b$.

L'ellipse et l'hyperbole auxiliaires sont représentées par ONG et OMI; elles ont pour axes communs $CO = A$, $CG = B$.

Ayant pris sur l'hyperbole auxiliaire OMI un point quelconque M dont les coordonnées sont $Ca = \alpha$, $aM = \beta$, on décrit avec les demi-axes $Ca = \alpha$, $Cb = \beta$, l'ellipse amb qui sera la projection d'une des lignes de courbure de la première espèce.

L'ellipse $a'm'b'$ représente la projection d'une autre ligne de courbure de la même espèce.

Ayant pris sur l'ellipse auxiliaire ONG un point quelconque N dont les coordonnées sont $Ce = \alpha'$, $eN = \beta'$, on décrit avec les demi-axes $Ce = \alpha'$, $Cf = \beta'$, une hyperbole emm' qui sera la projection d'une des lignes de courbure de la seconde espèce.

L'hyperbole $e'nn'$ représente la projection d'une autre ligne de courbure de la seconde espèce.

Nous avons fait voir qu'on peut déterminer en général par les fonctions elliptiques, l'aire de tout quadrilatère formé sur la surface de l'ellipsoïde, qui a pour projection $mnm'n'$.

SECTION III.

De la ligne la plus courte sur la surface du sphéroïde.

298. Considérons un sphéroïde produit par la révolution de l'ellipse PAE autour de son petit axe CP, et supposons que la courbe AMI tracée sur la surface de ce solide, jouit de la propriété d'être la plus courte entre deux de ses points pris à volonté; il s'agit de déterminer la nature de cette courbe. Fig. 12.

Soit PAE le méridien fixe qui passe par l'origine A de la courbe, PMN le méridien mobile qui passe par un point quelconque M de cette courbe, MT la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe; si l'on suppose $CE = a$, $CP = b$, $CT = t$, $TM = u$, l'arc $AM = s$, et l'angle APM que font entre eux les deux méridiens PA, PM, $= \psi$; on trouvera par les mé-

thodes connues que la ligne la plus courte tracée sur la surface d'un solide de révolution doit satisfaire à l'équation $u^2 d\psi = C ds$, C étant une constante; il ne reste donc qu'à combiner cette équation avec celle du méridien elliptique.

Appelant à l'ordinaire φ l'amplitude du point M, nous aurons $t = b \cos\varphi$, $u = a \sin\varphi$, $dt^2 + du^2 = d\varphi^2 (a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi)$ et $ds^2 = u^2 d\psi^2 + d\varphi^2 (a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi)$. Substituant cette valeur et celle de u, dans l'équation $u^2 d\psi = C ds$, on en tire

$$d\psi = \frac{C d\varphi \sqrt{(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi)}}{a \sin\varphi \sqrt{(a^2 \sin^2\varphi - C^2)}}.$$

Soit $C^2 = a^2 \sin^2\theta$, on aura $\sqrt{(a^2 \sin^2\varphi - C^2)} = a \sqrt{(\sin^2\varphi - \sin^2\theta)}$, d'où l'on voit que θ est la limite au-dessous de laquelle φ ne peut pas descendre; soit donc $\cos\varphi = \cos\theta \cos\omega$, on aura, en faisant $c^2 = a^2 - b^2$,

$$a d\psi = \frac{\sin\theta \, d\omega}{1 - \cos^2\theta \cos^2\omega} \sqrt{(b^2 + c^2 \cos^2\theta \cos^2\omega)}.$$

Soit enfin $k^2 = \sin^2\lambda = \frac{c^2 \cos^2\theta}{b^2 + c^2 \cos^2\theta}$, ou $\operatorname{tang}\lambda = \frac{c \cos\theta}{b}$, $n = \cot^2\theta$, on aura

$$d\psi = \frac{b}{a \sin\theta \cos\lambda} \cdot \frac{d\omega \sqrt{(1 - k^2 \sin^2\omega)}}{1 + n \sin^2\omega},$$

et
$$ds = \frac{u^2 d\psi}{C} = \frac{b}{\cos\lambda} \cdot d\omega \sqrt{(1 - k^2 \sin^2\omega)}.$$

Supposons que l'origine A est le point de la courbe le plus près du pôle P, on aura en ce point l'amplitude $\varphi = \theta$, et $\omega = 0$; et puisque la distance PA est un *minimum*, il est visible qu'au point A la courbe sera perpendiculaire au méridien.

Cela posé, l'arc AM $= s$ compté du point A, s'assimile entièrement à un arc d'ellipse, et on a exactement $s = \frac{b}{\cos\lambda} E(k, \omega)$; ainsi en prenant le demi-grand axe CD $= \frac{b}{\cos\lambda}$, lequel sera plus petit que CE et plus grand que CP, et décrivant l'ellipse PmD sur les demi-axes CP, CD, si on prend sur cette ellipse un point m dont l'amplitude soit ω, ou qui ait pour coordonnées C$r = b \cos\omega$, $rm = \frac{b}{\cos\lambda} \sin\omega$, l'arc P$m$ de l'ellipse sera égal à l'arc AM de la ligne la plus courte, l'extrémité M de celui-ci étant déterminée par l'abscisse CT $= b \cos\theta \cos\omega =$ C$r \times \cos\theta$, de sorte qu'il y a un rap-

port constant entre les abscisses CT, Cr, des points terminés par les arcs égaux AM, Pm.

Au point I où la courbe rencontre l'équateur, on aura l'arc AI = PmD $= \frac{b}{\cos\lambda} E'k$, et par l'équation $u^2 d\psi = Cds$, on déterminera l'angle I sous lequel l'intersection des deux courbes a lieu; en général $\frac{ud\psi}{ds}$ est le sinus de l'angle M que fait la courbe avec le méridien; ainsi au point I on aura $\cos I = \frac{ud\psi}{ds} = \frac{C}{u} = \frac{a\sin\theta}{a\sin\varphi} = \sin\theta$; c'est-à-dire que l'angle I est le complément de l'amplitude du point A.

299. Venons maintenant à l'autre équation dont l'intégrale est, suivant les notations ordinaires :

$$\psi = \frac{b}{a\sin\theta\cos\lambda}\left[\left(1+\frac{k^2}{n}\right)\Pi(n,k,\omega) - \frac{k^2}{n}F(k,\omega)\right].$$

Par cette formule dont les deux termes peuvent être calculés avec tel degré d'exactitude qu'on voudra, on déterminera pour chaque valeur de l'amplitude ω, la valeur correspondante de l'angle ψ qui est la longitude du méridien PM.

Pour avoir la position du point I où la courbe rencontre l'équateur, il faudra faire $\omega = \frac{1}{2}\pi$, ce qui donnera pour la longitude du point I,

$$\psi' = \frac{b}{a\sin\theta\cos\lambda}\left[\left(1+\frac{k^2}{n}\right)\Pi'(n,k) - \frac{k^2}{n}F'k\right].$$

Cette valeur est en général plus petite que $\frac{1}{2}\pi$; car il est évident qu'on a $\psi < \frac{b}{a\sin\theta\cos\lambda}\int\frac{d\omega}{1+n\sin^2\varphi}$, ou $\psi < \frac{b}{a\cos\lambda}\cdot\text{arc tang}\frac{\tang\varphi}{\sin\theta}$; donc en faisant $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on aura $\psi' < \frac{b}{a\cos\lambda}\cdot\frac{\pi}{2}$, quantité toujours plus petite que $\frac{1}{2}\pi$, puisqu'on a déjà trouvé $\frac{b}{\cos\lambda} < a$, ce qui résulte de l'équation.... $\frac{b^2}{\cos^2\lambda} = b^2 + c^2\cos^2\theta = a^2 - c^2\sin^2\theta$.

Les fonctions F et Π, considérées avant et après l'amplitude 90°, croissent également pour des différences égales d'amplitude; car on a en général $F(\frac{1}{2}\pi) - F(\frac{1}{2}\pi - \zeta) = F(\frac{1}{2}\pi + \zeta) - F(\frac{1}{2}\pi)$, et il en est de même de la fonction Π. De là on voit que passé le point I, la courbe se prolongera dans l'autre hémisphéroïde, de manière que les deux parties séparées par l'équateur seront égales et semblables. Donc la courbe parviendra de l'autre côté de l'équateur, au parallèle qui en est éloigné autant

que le parallèle qui passe par le point A; et en atteignant ce parallèle elle deviendra perpendiculaire au méridien, comme elle l'était à l'origine A. Ainsi la continuation indéfinie de cette courbe offrira une infinité de spires égales et semblables, comprises entre deux parallèles également éloignés de l'équateur. Ces spires ne seraient cependant pas en nombre infini, si l'angle ECI que nous avons désigné par ψ', avait un rapport rationnel avec la circonférence; car alors au bout d'un certain nombre de révolutions la courbe rentrerait sur elle-même. Mais un pareil cas est purement hypothétique, puisque en général la fonction ψ' dépend de plusieurs transcendantes qu'il n'est pas possible d'exprimer exactement par des arcs de cercle.

300. Il est remarquable que la formule qui donne la valeur de ψ est absolument de la même forme que celle qui donne la valeur de l'angle résultant du développement sur un plan d'une portion de la surface du cône oblique à base circulaire. Ce dernier angle est facile à trouver jusqu'à un certain degré d'approximation, par de simples constructions géométriques, déduites des pyramides inscrites et circonscrites. D'ailleurs comme le cône oblique n'a de courbure que dans un sens, cette surface est censée plus simple que celle du sphéroïde qui est partout à double courbure; ainsi on doit regarder le problème de déterminer la ligne la plus courte sur la surface du sphéroïde, comme étant réduit à une moindre difficulté, par la construction suivante, qu'on tire aisément de nos formules.

Faites un triangle isocèle pfp' tel que sa base pp' représentant l'axe $2b$, le côté pf ou $p'f$ soit égal au rayon a de l'équateur, tirez pq de manière que l'angle $p'pq = \lambda$. Sur pq comme diamètre, décrivez un cercle pnq dont le plan soit perpendiculaire au plan du triangle pfq. Le cône qui a ce cercle pour base et pour sommet le point f, sera celui dont la surface étant développée sur un plan, servira à décrire la ligne la plus courte sur la surface du sphéroïde donné. Pour cela soit QM un parallèle qui passe par tous les points des méridiens dont l'amplitude est φ; on connaît déjà θ par l'amplitude du point A sur le premier méridien PAE; d'ailleurs l'angle θ qui sert à former le paramètre $n = \cot^2\theta$, se retrouve tant par l'équation $b \tang \lambda = c \cos\theta$, que par la fig. 13, où l'on a $\frac{fq}{fp} = \tang^2 \frac{1}{2}\theta = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$. Fig. 13 et 11.

Il reste à déduire de l'amplitude donnée φ, l'amplitude ω des fonctions elliptiques, ce qui se fera par l'équation $\cos\omega = \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}$, ou par une construction équivalente; ensuite de l'amplitude ω, on déduira l'angle qcn formé dans le plan de la base du cône par le rayon qui termine le secteur dont

on a besoin; soit cet angle $qcn = \zeta$, on aura $\tang \frac{1}{2}\zeta = \tang \frac{1}{2}\theta \tang \frac{1}{2}\omega$, ou $\tang \frac{1}{2}\zeta = \tang \frac{1}{2}\theta \,.\, \sqrt{\left[\tang \frac{\varphi+\theta}{2} \tang \frac{\varphi-\theta}{2}\right]}$. L'angle qcn étant ainsi déterminé, il ne s'agira plus que de développer dans un plan le secteur courbe qfn, et l'angle du sommet f sera égal à l'angle cherché ψ, c'est-à-dire sera la longitude du point M de la courbe dont l'amplitude donnée est φ. Cette amplitude au reste qui s'accorde avec la co-latitude au pôle et à l'équateur, n'est pas la même chose que la co-latitude. Soit L la latitude au point M dont l'amplitude est φ, on aura $\tang L = \frac{a}{b} \cot \varphi$. Ainsi on déduit aisément L de φ et réciproquement.

La ligne la plus courte tracée sur la surface du globe terrestre, s'appelle *ligne géodésique*. Nous avons donné les formules relatives au calcul de cette ligne, et en général au calcul des triangles sphéroïdiques dans les Mémoires de l'Institut, pour l'année 1806.

APPLICATION A LA MÉCANIQUE.

On a déjà vu dans le Chapitre VIII un usage fort remarquable de la plus simple des fonctions elliptiques, pour exprimer le temps employé à parcourir un arc quelconque dans le mouvement du pendule simple, soit que ce pendule ne fasse que des oscillations de part et d'autre de la verticale, soit qu'en vertu de la vitesse acquise, il puisse tourner sans cesse dans le même sens autour du point de suspension. Nous nous proposons maintenant de traiter avec l'étendue convenable quelques-uns des problèmes de Mécanique auxquels les méthodes précédentes s'appliquent avec le plus de succès; et d'abord nous avons choisi, comme devant être placés en première ligne, le mouvement de rotation d'un corps solide qui n'est sollicité par aucune force accélératrice, et le mouvement d'un corps attiré vers deux centres fixes. Ces deux problèmes seront l'objet de la première et de la seconde section.

Pour parvenir aux résultats déjà connus, nous avons suivi assez exactement la méthode donnée par D'Alembert dans le tome IV de ses opuscules, et les méthodes données par Euler dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, ann. 1760, et dans le tome XI des *Novi Com. Petrop.* Par ces méthodes, comme par celles de tous les autres géomètres qui ont traité les mêmes questions, on parvient à réduire la solution aux quadratures. C'était un grand pas dans la carrière de la science, et un beau titre de gloire pour ceux qui, les premiers, ont su obtenir ces réductions; mais le développement ultérieur de la solution, l'énumération et la division des différens cas, la réduction des formules au dernier terme de simplicité dont elles sont susceptibles; enfin la possibilité de déterminer, avec tout le degré d'exactitude qu'on peut désirer, la position du corps et toutes les circonstances du mouvement au bout d'un temps quelconque, sont autant de choses que la simple réduction aux quadratures ne donne point, ou ne donne que d'une manière imparfaite; attendu que les formules, qui s'adaptent assez facilement à la première révolution, n'offrent plus rien de déterminé, lorsqu'il s'agit d'embrasser, dans un même calcul, un temps quelconque et un nombre indéfini de révolutions. Nous espérons qu'à cet égard les développemens que nous avons donnés ne laisseront rien à désirer, et qu'ils mettront dans tout leur jour les avantages nombreux qu'on peut retirer, en pareil cas, de l'usage des fonctions elliptiques.

On remarquera sans doute que la seconde section, qui traite du mouvement d'un corps attiré vers deux centres fixes, est fort étendue. Cependant nous n'avons considéré, outre les cas généraux, que quelques-uns des cas particuliers que le problème renferme, lorsque la courbe décrite est située dans un même plan, et nous n'avons indiqué que très sommairement les points principaux de la solution, lorsque la courbe décrite est à double courbure; d'ailleurs nous avons toujours supposé que la courbe ne s'étend pas à l'infini, afin de ne considérer que des mouvemens permanens. On voit par là que cette matière aurait été susceptible d'une beaucoup plus grande extension; mais dans le cadre étroit où nous l'avons renfermée, nous osons croire que les géomètres trouveront quelques résultats dignes de leur attention, peut-être même des vues nouvelles pour traiter le fameux problème des trois corps, dans d'autres hypothèses que celles qui servent de base aux méthodes ordinaires d'approximation. La seconde section est terminée par la détermination du mouvement rectiligne d'un corps attiré vers deux centres fixes; problème qui offre encore une assez belle application de la théorie des fonctions elliptiques.

Dans la troisième section nous exposerons la théorie de l'attraction des ellipsoïdes homogènes, considérablement simplifiée par la méthode de M. Ivory. On y remarquera que l'expression des forces donnée en un nombre fini de termes par les fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce, s'applique généralement à toutes les distances du point attiré, et à toutes les hypothèses sur les trois dimensions de l'ellipsoïde.

Enfin, dans la quatrième section qui traite de l'orbite décrite en vertu d'une force centrale donnée, nous ferons connaître quelques cas généraux qui peuvent être résolus exactement par les fonctions elliptiques, et nous indiquerons la méthode qu'il convient d'appliquer aux autres cas.

SECTION PREMIÈRE.

Du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.

Pl. II, Fig. 1. 301. Soit A le centre de gravité, ou plus généralement le point autour duquel le corps peut tourner librement dans tous les sens. Soient AB,

AC, AD trois axes perpendiculaires entre eux, dont la position soit invariable dans l'espace.

Imaginons une surface sphérique décrite du centre A, laquelle soit rencontrée aux points B, C, D par ces trois axes; c'est à cette surface, considérée comme immobile dans l'espace, que nous rapporterons tous les mouvemens du corps; et, pour fixer les idées, nous donnerons le nom de *pôle* au point D, d'*équateur* au cercle BC, et de *méridien* à un grand cercle quelconque DX passant par le point D.

Supposons qu'au bout du temps t les trois axes principaux du corps soient représentés sur la sphère par les trois points L, M, N, formant le triangle LMN, dont les trois côtés et les trois angles sont de 90°. Il est évident que la position du corps sera déterminée à chaque instant, si l'on connaît celle des trois points L, M, N. Ainsi tout se réduit à déterminer, au bout du temps t, les arcs BX, LX, et l'angle DLM, en supposant toutefois, que les axes AL et AM sont pris l'un et l'autre d'une manière déterminée parmi les trois axes principaux du corps; de sorte que le choix de ces axes étant une fois fait d'après l'état initial du mouvement, les lettres L et M continuent d'être affectées aux mêmes axes.

302. Soit AP le rayon sur lequel est situé le centre d'une molécule quelconque du corps dM. Soient x, y, z les coordonnées rectangles de cette molécule, parallèles aux trois axes AB, AC, AD, et soit sa distance au centre $= r = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$; si l'on mène les trois arcs BP, CP, DP, on aura $x = r \cos BP$, $y = r \cos CP$, $z = r \cos DP$.

De même si s, u, v sont les trois coordonnées de la même molécule, parallèles aux trois axes principaux AL, AM, AN, on aura $s = r \cos LP$, $u = r \cos MP$, $v = r \cos NP$.

Soit maintenant $BX = \varphi$, $LX = \theta$, $PL = p$ et l'angle $PLD = \Omega - \omega$, Ω étant la valeur de PLD lorsque $t = 0$, et ω désignant la quantité dont cet angle est diminué dans le temps t, par le mouvement de rotation du corps autour de l'axe AL, mouvement qui est supposé avoir lieu dans le sens BC.

D'après ces élémens, il faut calculer les valeurs des coordonnées x, y, z; pour cela, il faut considérer d'abord le triangle sphérique DLP, dans lequel on a les deux côtés $DL = 90° - \theta$, $LP = p$, et l'angle compris $PLD = \Omega - \omega$; on en déduira

$$\cos DP = \sin\theta \cos p + \cos\theta \sin p \cos(\Omega - \omega),$$
$$\sin DP \sin LDP = \sin p \sin(\Omega - \omega),$$
$$\sin DP \cos LDP = \cos\theta \cos p - \sin\theta \sin p \cos(\Omega - \omega).$$

Par le moyen de cos DP, on connaîtra $z = r \cos \mathrm{DP}$. Pour avoir x, il faut connaître BP; or le triangle DBP donne

$$\cos \mathrm{BP} = \sin \mathrm{DP} \cos (\phi + \mathrm{LDP}):$$

de même par le triangle PDC, on aura

$$\cos \mathrm{CP} = \sin \mathrm{DP} \sin (\phi + \mathrm{LDP}).$$

Soit donc $r \cos p = s$ et $r \sin p = s'$, on aura les valeurs suivantes des coordonnées x, y, z :

$$\begin{aligned} x &= s \cos \varphi \cos \theta - s' \cos \varphi \sin \theta \cos (\Omega - \omega) - s' \sin \varphi \sin (\Omega - \omega), \\ y &= s \sin \varphi \cos \theta - s' \sin \varphi \sin \theta \cos (\Omega - \omega) + s' \cos \varphi \sin (\Omega - \omega), \\ z &= s \sin \theta + s' \cos \theta \cos (\Omega - \omega). \end{aligned}$$

303. Dans l'instant dt, qu'on suppose constant, la molécule $d\mathrm{M}$ acquiert les vitesses $\frac{ddx}{dt}$, $\frac{ddy}{dt}$, $\frac{ddz}{dt}$, suivant les axes AB, AC, AD. Or, d'après les principes connus, les molécules animées de ces différentes vitesses dirigées en sens contraires, doivent faire équilibre aux forces accélératrices. Donc si l'on appelle X, Y, Z les momens des forces accélératrices pour faire tourner le système autour des axes AB, AC, AD dans les sens CD, DB, BC, on aura les équations différentielles du mouvement comme il suit :

$$\begin{aligned} \int (y\,ddz - z\,ddy)\, d\mathrm{M} &= \mathrm{X} dt^2, \\ \int (z\,ddx - x\,ddz)\, d\mathrm{M} &= \mathrm{Y} dt^2, \\ \int (x\,ddy - y\,ddx)\, d\mathrm{M} &= \mathrm{Z} dt^2. \end{aligned}$$

Par la nature de ces équations, on voit que les différentielles ddx, ddy, ddz supposent s, s', Ω constantes, et qu'au contraire les signes d'intégration supposent ces quantités seules variables.

304. Il s'agit maintenant de substituer, dans ces équations, les valeurs de x, y, z, données n° 303; mais les propriétés connues des axes principaux serviront à abréger beaucoup le calcul.

D'abord la figure et la constitution du corps étant données, nous supposerons connues les intégrales suivantes :

$$\int s^2 d\mathrm{M} = \mathrm{A}, \quad \int u^2 d\mathrm{M} = \mathrm{B}, \quad \int v^2 d\mathrm{M} = \mathrm{C},$$

au moyen desquelles les momens d'inertie du corps, considérés successivement par rapport aux axes AL, AM, AN, seront B+C, A+C, A+B.

Soit α la valeur de l'angle DLM au commencement du mouvement; comme on a en même temps $\mathrm{DLP} = \Omega$, on aura l'angle $\mathrm{PLM} = \Omega + \alpha$; d'où résulte $\cos \mathrm{PM} = \sin p \cos (\Omega + \alpha)$ et $\cos \mathrm{PN} = \sin p \sin (\Omega + \alpha)$.

Mais on a $r\cos PM = u$ et $r\cos PN = \cos v$; donc

$$u = s'\cos\Omega\cos\alpha - s'\sin\Omega\sin\alpha,$$
$$v = s'\sin\Omega\cos\alpha + s'\cos\Omega\sin\alpha.$$

Ces équations donnent réciproquement

$$s'\cos\Omega = u\cos\alpha + v\sin\alpha,$$
$$s'\sin\Omega = v\cos\alpha - u\sin\alpha;$$

et puisqu'on a, par la propriété des axes principaux, $\int sud\mathrm{M} = 0$, $\int svd\mathrm{M} = 0$, $\int uvd\mathrm{M} = 0$, il en résulte les intégrales

$$\int ss'\cos\Omega d\mathrm{M} = 0,\quad \int ss'\sin\Omega d\mathrm{M} = 0,$$
$$\int s's'\sin\Omega\cos\Omega d\mathrm{M} = (\mathrm{C}-\mathrm{B})\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\int s's'\cos^2\Omega d\mathrm{M} = \mathrm{B}\cos^2\alpha + \mathrm{C}\sin^2\alpha,$$
$$\int s's'\sin^2\Omega d\mathrm{M} = \mathrm{B}\sin^2\alpha + \mathrm{C}\cos^2\alpha.$$

305. Si l'on exécute maintenant les substitutions indiquées, et qu'on fasse pour abréger,

$$\mathrm{P} = \left[\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2} - \mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}\cos(2\omega+2\alpha)\right]d\varphi\sin\theta\cos\theta$$
$$+\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}d\theta\sin\theta\sin(2\omega+2\alpha) + (\mathrm{B}+\mathrm{C})d\omega\cos\theta,$$
$$\mathrm{Q} = \left[\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2} + \mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}\cos(2\omega+2\alpha)\right]d\theta - \left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}\right)d\varphi\cos\theta\sin(2\omega+2\alpha),$$

les équations du mouvement deviendront

$$d(\mathrm{P}\cos\varphi + \mathrm{Q}\sin\varphi) = \mathrm{X}dt^2,$$
$$d(\mathrm{P}\sin\varphi - \mathrm{Q}\cos\varphi) = \mathrm{Y}dt^2,$$
$$d\left[(\mathrm{B}+\mathrm{C})\left(d\varphi + \frac{d\omega}{\sin\theta}\right) - \mathrm{P}\cot\theta\right] = \mathrm{Z}dt^2.$$

306. Ces équations se simplifient dans différentes hypothèses. Par exemple, si on a $\mathrm{B}=\mathrm{C}$, les valeurs de P et Q deviennent

$$\mathrm{P} = (\mathrm{B}-\mathrm{A})d\varphi\sin\theta\cos\theta + 2\mathrm{B}d\omega\cos\theta,$$
$$\mathrm{Q} = (\mathrm{B}+\mathrm{A})d\theta,$$

et l'une des trois équations du mouvement peut être remplacée par la suivante :

$$2\mathrm{B}d(d\varphi\sin\theta + d\omega) = (\mathrm{X}\cos\varphi\cos\theta + \mathrm{Y}\sin\varphi\cos\theta + \mathrm{Z}\sin\theta)dt^2.$$

Le cas de $\mathrm{B}=\mathrm{C}$ a lieu lorsque les deux axes principaux AM, AN sont semblables entre eux, de sorte que les momens d'inertie, par rapport à ces deux

axes, sont égaux. Tous les solides de révolution homogènes et une infinité d'autres corps sont dans ce cas.

307. L'angle α disparaît du calcul dans le cas de $B = C$, parce que tous les axes perpendiculaires à AL peuvent être considérés alors comme des axes principaux. En général, on peut faire $\alpha = 0$ dans tous les cas, en prenant la directrice AD dans le plan où se trouvent les deux axes principaux AL, AM au commencement du mouvement. Mais comme la supposition de $\alpha = 0$ ne simplifie pas le calcul et ne fait disparaître aucun terme, il vaut mieux laisser α tel qu'il est, et se réserver la liberté de déterminer la directrice AD, de manière à faciliter les intégrations. On ne tardera pas à en voir un exemple.

Application de ces formules au cas où les forces accélératrices sont nulles.

308. Dans le cas où les forces accélératrices X, Y, Z sont nulles, les équations du n° 305 s'intègrent d'elles-mêmes, et on a les intégrales

$$P\cos\varphi + Q\sin\varphi = A'dt,$$
$$P\sin\varphi - Q\cos\varphi = B'dt,$$
$$(B+C)\left(d\varphi + \frac{d\omega}{\sin\theta}\right) - P\cot\theta = C'dt.$$

Or, on peut toujours prendre la directrice AD telle que les constantes A' et B' soient nulles; alors on aura $P = 0$, $Q = 0$ et $d\varphi + \frac{d\omega}{\sin\theta} = K dt$, K étant une nouvelle constante; de sorte que les équations du mouvement seront

$$[n' - \cos(2\omega + 2\alpha)]\, d\varphi \sin\theta\cos\theta - d\theta \sin\theta \sin(2\omega + 2\alpha) + (n + n')\, d\omega \cos\theta = 0,$$
$$[n - \cos(2\omega + 2\alpha)]\, d\theta + d\varphi \cos\theta \sin(2\omega + 2\alpha) = 0,$$
$$d\varphi + \frac{d\omega}{\sin\theta} = K dt,$$

où l'on a fait, pour abréger, $n = \frac{C+B+2A}{C-B}$, $n' = \frac{C+B-2A}{C-B}$.

309. Avant d'aller plus loin, il faut faire voir comment, d'après l'état initial du mouvement, on peut déterminer la directrice AD, de manière que les constantes A' et B' soient nulles, ainsi que le supposent ces dernières équations.

Au commencement du mouvement, où l'on a $t = 0$, $\omega = 0$, $\varphi = 0$, soit
Fig 2. AI l'axe de rotation primitif autour duquel le corps tourne avec la vitesse angulaire W dans le sens LI, et soit la distance $LI = a$. On peut sup-

poser $\varepsilon < 90°$, parce que si ε était plus grand que 90°, on prendrait, au lieu de L, l'autre extrémité du même axe AL.

Soit en même temps M l'extrémité de l'axe principal AM, dont le moment est $A+C$; nous supposerons que l'angle ILM est adjacent à l'angle DLl, déterminé par la direction du mouvement; c'est-à-dire que ces deux angles sont formés de différens côtés de l'arc LI; d'ailleurs l'angle ILM, qui est un angle donné et que nous supposerons $=L$, peut être plus petit ou plus grand que 90°.

L'arc LM étant donné de position par l'angle L, l'arc LN, où se trouve situé le troisième axe principal AN dont le moment est $A+B$, sera également déterminé en prenant, du même côté que Ll par rapport à ML, l'angle MLN $=90°$.

310. Cela posé, soit γ la valeur initiale de θ, on aura DL $=\frac{1}{2}\pi-\gamma$. D'ailleurs on a supposé, au commencement du mouvement, l'angle... DLM $=\alpha$; ainsi, pour connaître la position du point D, il s'agit de déterminer les quantités α et γ par la condition que les constantes A' et B' soient nulles, ou qu'on ait au commencement du mouvement $P=0$, $Q=0$.

Ll étant l'arc décrit dans le premier instant par le point L, on a Ll $=Wdt\sin\varepsilon$; du point l menant lm perpendiculaire sur DL, on aura Lm $=Wdt\sin\varepsilon\sin(L-\alpha)$ et $ml=Wdt\sin\varepsilon\cos(L-\alpha)$. Pendant que le point L parcourt l'arc Ll par son mouvement de rotation autour de I, le point D, en tant qu'il désigne l'extrémité d'un axe AD fixe dans le corps, parcourt l'arc Dd $=Wdt\sin$ DI perpendiculaire à DI; d'où il suit que le corps tourne autour de l'axe mobile d'une quantité DL$d=\frac{Wdt\sin DI\cos IDL}{\sin DL}$; c'est la valeur initiale de $d\omega$. D'ailleurs Lm est la valeur initiale de $-d\theta$, et l'angle LDl ou $\frac{lm}{\sin Dl}$ est celle de $d\varphi$; donc on a, au commencement du mouvement,

$$\frac{d\theta}{dt}=W\sin\varepsilon\sin(L-\alpha),$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{W\sin\varepsilon}{\cos\gamma}\cos(L-\alpha),$$

$$\frac{d\omega}{dt}=W\left(\frac{\cos\gamma\cos\varepsilon-\sin\gamma\sin\varepsilon\cos(L-\alpha)}{\cos\gamma}\right).$$

Substituant ces valeurs dans les équations $P=0$, $Q=0$, et faisant en même temps $\omega=0$, $\theta=\gamma$, on aura

$$0 = (n' - \cos 2\alpha) \sin\gamma \sin\varepsilon \cos(L - \alpha) + \sin\gamma \sin\varepsilon \sin 2\alpha \sin(L - \alpha)$$
$$+ (n + n') \cos\gamma \cos\varepsilon - (n + n') \sin\gamma \sin\varepsilon \cos(L - \alpha),$$
$$0 = (n - \cos 2\alpha) \sin\varepsilon \sin(L - \alpha) - \sin\varepsilon \sin 2\alpha \cos(L - \alpha).$$

La seconde se réduit à $n \sin(L - \alpha) = \sin(L + \alpha)$; d'où l'on tire

$$\tang \alpha = \frac{n - 1}{n + 1} \tang L = \frac{A + B}{A + C} \tang L;$$

et substituant cette valeur dans l'autre, il en résulte

$$\cot\gamma = \frac{C + A}{C + B} \cdot \frac{\cos L}{\cos\alpha} \tang\varepsilon = \frac{A + B}{C + B} \cdot \frac{\sin L}{\sin\alpha} \tang\varepsilon.$$

On voit que la détermination du point D par la tangente de l'arc DL, et celle de l'angle MLD, ne laissent aucune ambiguité, et qu'ainsi on est assuré de satisfaire, d'une manière générale, à la condition que les constantes A′ et B′ soient nulles, ce qui simplifiera beaucoup la solution du problème.

Les données qui ont lieu au commencement du mouvement font connaître en même temps la constante K, dont la valeur est

$$K = \frac{W \cos\varepsilon}{\sin\gamma}.$$

311. Nous remarquerons qu'on peut déterminer la position du point D relativement aux axes principaux AL, AM, AN, par des formules plus élégantes, et qui feront découvrir une belle propriété de la directrice AD.

Ayant fait $IL = \varepsilon$, on fera semblablement $IM = \varepsilon'$, $IN = \varepsilon''$; soit de plus $DL = p = \frac{1}{2}\pi - \gamma$, $DM = p'$, $DN = p''$. Dans le triangle LIM, où le côté LM est de 90°, on a $\cos ILM = \frac{\cos IM}{\sin IL}$; donc $\cos L = \frac{\cos\varepsilon'}{\sin\varepsilon}$; de même dans le triangle ILN, on aura $\sin L = \frac{\cos\varepsilon''}{\sin\varepsilon}$. Les triangles DLM, DLN, qui ont un côté de 90°, donneront semblablement $\cos\alpha = \frac{\cos p'}{\sin p}$ et $\sin\alpha = \frac{\cos p''}{\sin p}$; donc

$$\tang\alpha = \frac{\cos p''}{\cos p'} \text{ et } \tang L = \frac{\cos\varepsilon''}{\cos\varepsilon'}.$$

Mais on a trouvé $\frac{\tang\alpha}{\tang L} = \frac{A + B}{A + C}$; donc

$$\frac{\cos p''}{\cos p'} = \frac{(A + B)\cos\varepsilon''}{(A + C)\cos\varepsilon'}.$$

Il est remarquable que la quantité $(A + C)\cos\varepsilon'$ représente le moment d'inertie de l'axe AM multiplié par le cosinus de la distance IM, de même que

$(A+B)\cos\varepsilon''$ représente un semblable produit pour l'axe AN. D'après l'équation précédente, on peut présumer qu'il existe un semblable rapport entre $\cos p'$ et $\cos p$. En effet, si dans l'équation $\cot\gamma = \frac{A+C}{B+C}\cdot\frac{\cos L}{\cos\alpha}\tang\varepsilon$, on substitue les valeurs $\cot\gamma = \frac{\sin p}{\cos p}$, $\frac{\cos L}{\cos\alpha} = \frac{\cos\varepsilon'}{\cos p'}\cdot\frac{\sin p}{\sin\varepsilon}$, on aura, en réduisant,

$$\frac{\cos p'}{\cos p} = \frac{(A+C)}{(B+C)}\frac{\cos\varepsilon'}{\cos\varepsilon},$$

ce qui est la propriété mentionnée.

Puisque les quantités $\cos p$, $\cos p'$, $\cos p''$ sont proportionnelles respectivement aux quantités $(B+C)\cos\varepsilon$, $(A+C)\cos\varepsilon'$, $(A+B)\cos\varepsilon''$; puisqu'on a d'ailleurs $\cos^2 p + \cos^2 p' + \cos^2 p'' = 1$, il s'ensuit que si l'on fait, pour abréger,

$$D = \sqrt{[(B+C)^2\cos^2\varepsilon + (A+C)^2\cos^2\varepsilon' + (A+B)^2\cos^2\varepsilon'']},$$

on aura

$$\cos p = \frac{(B+C)\cos\varepsilon}{D},\ \cos p' = \frac{(A+C)\cos\varepsilon'}{D},\ \cos p'' = \frac{(A+B)\cos\varepsilon''}{D}.$$

Ces trois cosinus déterminent la position du point D, et on voit que ce point sera le même, quel que soit celui des axes principaux qu'on prend pour AL, et auquel on rapporte le mouvement du corps; car l'échange qu'on peut faire entre deux des trois axes principaux, ou entre deux des trois lettres A, B, C, ne change en rien les trois distances p, p', p'', qui sont toujours les mêmes pour le même axe.

Ce théorème très remarquable prouve qu'il y a toujours un point fixe D dans l'espace, tel qu'en rapportant à la directrice AD les mouvemens de rotation d'un corps de figure donnée, les constantes A′ et B′ sont nulles; il prouve de plus que ce point est le même, quel que soit celui des trois axes principaux auquel on rapporte les variables φ, ω, θ.

312. L'intégrale $\int\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}dM$, prise dans toute l'étendue du corps, représente la somme des forces vives du système; si l'on substitue les valeurs de dx, dy, dz, et qu'ensuite on effectue l'intégration pour toutes les molécules du corps, cette quantité aura pour valeur

$$\left[\frac{2A+B+C}{2}+\frac{B-C}{2}\cos(2\omega+2\alpha)\right]\frac{d\theta^2}{dt^2}+(B+C)\left(\frac{d\omega}{dt}+\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\right)^2$$
$$+\left[\frac{2A+B+C}{2}+\frac{C-B}{2}\cos(2\omega+2\alpha)\right]\frac{d\varphi^2\cos^2\theta}{dt^2}$$
$$+(C-B)\frac{d\theta d\varphi}{dt^2}\cos\theta\sin(2\omega+2\alpha);$$

et d'après les équations du n° 308, elle se réduit à

$$(B+C)K^2\left[1+\frac{B^2\cos^2\alpha+C^2\sin^2\alpha-A^2}{(A+B)(A+C)}\cos^2\gamma\right].$$

Donc la somme des forces vives est constante, lorsque les forces accélératrices sont nulles.

Cette quantité peut se présenter sous une forme beaucoup plus simple. En effet, si l'on substitue les valeurs $\cos^2\alpha\cos^2\gamma=\cos^2 p'$, $\cos^2\gamma\sin^2\alpha=\cos^2 p''$, $\cos^2\gamma=\sin^2 p$, $K=\frac{W\cos\varepsilon}{\cos p}$, et qu'ensuite on substitue également les valeurs de $\cos p$, $\cos p'$, $\cos p''$, en $\cos\varepsilon$, $\cos\varepsilon'$, $\cos\varepsilon''$, on trouvera que la somme des forces vives se réduit à cette expression très simple :

$$(B+C)\,W^2\cos^2\varepsilon+(A+C)\,W^2\cos^2\varepsilon'+(A+B)\,W^2\cos^2\varepsilon''.$$

On obtiendrait directement ce résultat en considérant que la vitesse W autour de l'axe AI se décompose en trois vitesses, $W\cos\varepsilon$, $W\cos\varepsilon'$, $W\cos\varepsilon''$, autour des axes AL, AM, AN.

Solution du cas particulier où l'on a B = C.

313. Alors l'axe AL, par rapport auquel on considère le mouvement, n'est point semblable aux deux autres, qui sont semblables entre eux, et les équations générales deviennent

$$(B-A)\,d\varphi\sin\theta\cos\theta+2B\,d\omega\cos\theta=0,$$
$$(B+A)\,d\theta=0,$$
$$d\varphi+\frac{d\omega}{\sin\theta}=K\,dt.$$

On en tire $\theta=\text{const.}=\gamma$, $\frac{d\varphi}{dt}=\frac{2B}{A+B}K$, et $\frac{d\omega}{dt}=\frac{A-B}{A+B}K\sin\gamma$. D'ailleurs on a, dans le même cas, $\alpha=L$ et $\cot\gamma=\frac{A+B}{2B}\tang\varepsilon$; c'est-à-dire qu'il faut prendre le point D sur l'arc LI à la distance $LD=90^\circ-\gamma$, déterminée par l'équation précédente.

Fig. 5 et 6. Donc le mouvement du corps, après avoir été imprimé autour de l'axe AI dans le sens BC, se continue ainsi. L'axe principal AL reste toujours également incliné à la directrice AD, et tourne uniformément autour de cette directrice avec une vitesse $\frac{d\varphi}{dt}=\frac{W\sin IL}{\sin DL}$ dans le sens BC; pendant ce mouvement, les autres parties du corps tournent autour de l'axe mobile AL

avec une vitesse $\frac{d\omega}{dt} = \frac{W \sin DI}{\sin DL}$, dans le sens BC, si on a $A > B$, ou dans le sens CB, si $A < B$.

Développement des formules générales.

314. Revenons aux équations générales de l'art. 308. Si l'on élimine $d\varphi$ des deux premières, on aura

$$\left[\frac{C^2 + B^2 - 2A^2}{C^2 - B^2} - \cos(2\omega + 2\alpha)\right] d\theta \sin\theta - d\omega \cos\theta \sin(2\omega + 2\alpha) = 0;$$

équation qui, étant multipliée par $\cos\theta$, a pour intégrale,

$$\cos^2\theta \left[\frac{C^2 + B^2 - 2A^2}{C^2 - B^2} - \cos(2\omega + 2\alpha)\right] = \text{const.}$$

Lorsque $t = 0$, on a $\omega = 0$ et $\theta = \gamma$; donc si l'on fait, pour abréger, $m = \frac{C^2 + B^2 - 2A^2}{C^2 - B^2}$, on aura

$$(1) \qquad \cos^2\theta = \frac{(m - \cos 2\alpha)\cos^2\gamma}{m - \cos(2\omega + 2\alpha)}.$$

Cette équation établit d'une manière générale la correspondance entre l'angle θ, qui détermine la position de l'axe principal AL sur le méridien mobile DL, et l'angle ω, qui détermine la position du corps par rapport à l'axe AL. Il faut observer d'ailleurs que l'angle ω exprime la quantité dont l'angle DLM s'est accru pendant le temps t; de sorte qu'on a en général DLM $= \omega + \alpha$. Pour savoir quel est le signe de ω dans les premiers instans du mouvement, il faut reprendre la première valeur de $\frac{d\omega}{dt}$ donnée dans l'article 310, laquelle peut être mise sous cette forme

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{W \cos\iota\,(C^2 - B^2)}{2(A+B)(A+C)}(\cos 2\alpha - m).$$

Ainsi les premières valeurs de ω auront le même signe que $(C^2 - B^2)(\cos 2\alpha - m)$.

Les deux autres équations du mouvement sont en général

$$(2) \qquad K dt = \frac{n - m}{\cos(2\omega + 2\alpha) - m} \cdot \frac{d\omega}{\sin\theta},$$

$$(3) \qquad d\varphi = K dt - \frac{d\omega}{\sin\theta},$$

où l'on a $K = \frac{W \cos\iota}{\sin\gamma}$ et $n - m = \frac{2(A+B)(A+C)}{C^2 - B^2}$.

315. Il s'agit maintenant d'intégrer, par les moyens ordinaires, les deux dernières formules auxquelles nous sommes parvenus ; l'équation finie (1) servira en général à exprimer les deux variables ω et θ par le moyen d'une troisième ψ, qui croît continuellement avec le temps ; l'équation (2) donnera la relation entre t et ψ ; et enfin l'équation (3) fera connaître la valeur de φ en fonction de ψ, ce qui complétera la solution du problème.

Dans cette recherche, il faut surtout faire attention à la quantité constante $m = \frac{C^2 + B^2 - 2A^2}{C^2 - B^2}$; car selon que cette quantité sera plus grande ou plus petite que l'unité, le corps aura différens mouvemens par rapport à son axe principal AL.

316. Nous avons déjà dit que les momens d'inertie par rapport aux axes principaux AL, AM, AN, sont respectivement $B + C$, $A + C$, $A + B$. Ces momens jouissent, comme on sait, de la propriété de *maximum* ou de *minimum*, relativement à tous les axes qui passent par le point A; et comme il n'y en a que deux qui puissent jouir de cette propriété d'une manière absolue, le troisième, qui n'est ni *maximum* ni *minimum*, sera relatif à un axe qu'on peut appeler l'*axe principal moyen*. Maintenant il est aisé de voir que la quantité $\frac{C^2 + B^2 - 2A^2}{C^2 - B^2}$, abstraction faite de son signe, ne peut être plus petite que l'unité, que lorsque AL sera l'axe moyen. Alors A sera moyen entre B et C, et le moment $B + C$ sera moyen entre les momens $A + C$ et $A + B$.

Dans tout autre cas, la quantité $\frac{C^2 + B^2 - 2A^2}{C^2 - B^2}$, positive ou négative, sera plus grande que l'unité, et l'axe AI sera l'un des axes extrêmes, savoir, l'axe du plus grand moment, si A est la plus petite des quantités A, B, C, et l'axe du plus petit moment, si A est la plus grande. Au-reste, on voit que le problème sera résolu complétement, en considérant le seul cas où m est plus petit que l'unité, puisque AL étant un axe principal choisi à volonté, rien n'empêche de supposer que AL est l'axe moyen. Cependant, pour ne rien laisser à désirer sur cette matière, et pour appliquer les résultats des formules au mouvement des planètes qui ne paraissent pas tourner autour de leur axe moyen, nous considérerons aussi le cas où m est plus grand que l'unité.

Première solution, AL étant l'axe moyen.

317. AL étant l'axe moyen, il faut, comme nous l'avons déjà dit, que A soit moyen entre B et C, et qu'ainsi la quantité m, abstraction faite de son

signe, soit plus petite que l'unité. Nous supposerons de plus, ce qui ne diminue en rien la généralité de la solution, que AM est l'axe du plus grand moment, c'est-à-dire qu'on a $C > B$; ainsi l'ordre de grandeur entre les quantités A, B, C, données par la figure et la constitution du corps, sera $C > A > B$.

Puisque m est < 1, l'équation entre ω et θ, savoir,

$$\cos^2\theta = \frac{(\cos 2\alpha - m)\cos^2\gamma}{\cos(2\omega + 2\alpha) - m},$$

fait voir que ω ne peut s'étendre depuis 0° jusqu'à 180°; car si cela était, il y aurait une valeur de ω qui rendrait le dénominateur $\cos(2\omega + 2\alpha) - m$ nul, et $\cos\theta$ infini. Donc le corps ne peut faire que des oscillations plus ou moins grandes autour de son axe moyen. En même temps la valeur de θ sera comprise entre certaines limites, de sorte que l'axe AL ne pourra s'éloigner que jusqu'à un certain point de la directrice AD, et son mouvement, par rapport à cette directrice, sera une sorte de balancement ou de nutation dont il faut déterminer la quantité. Pour cela, nous distinguerons deux cas, selon que $\cos 2\alpha - m$ est positif ou négatif.

Premier cas : $\cos 2\alpha - m = p^2$.

318. Dans ce cas, on voit d'abord que $\cos(2\omega + 2\alpha) - m$ doit toujours être positive; car cette quantité, qui est positive lorsque $\omega = 0$, ne peut devenir négative sans passer par zéro, et alors $\cos^2\theta$ serait infini.

On a vu (n° 309) que l'angle α peut être plus petit ou plus grand que 90°, selon la position initiale de l'axe AM. Supposons d'abord $\alpha < 90°$, et soit pris un angle $\mu < 90°$, tel qu'on ait

$$\cos 2\mu = m\sin^2\gamma + \cos 2\alpha\cos^2\gamma,$$

cette valeur donne

$$\cos 2\alpha - \cos 2\mu = (\cos 2\alpha - m)\sin^2\gamma = p^2\sin^2\gamma:$$

ainsi on aura $\mu > \alpha$. Cela posé, l'équation (r) donne

$$\sin^2\theta = \frac{\cos(2\omega + 2\alpha) - \cos 2\mu}{\cos(2\omega + 2\alpha) - m} = \frac{2\sin(\omega + \alpha + \mu)\sin(\mu - \alpha - \omega)}{\cos(2\omega + 2\alpha) - m};$$

d'où l'on voit que ω positif a pour limite $+(\mu - \alpha)$, et que ω négatif a pour limite $-(\mu + \alpha)$. Donc l'étendue totale d'une oscillation est mesurée par l'arc $2\mu < 180°$.

319. Il convient, pour la facilité du calcul, de faire commencer le temps

au milieu d'une oscillation, ce qui revient à faire $\alpha = 0$ dans nos formules. Soit alors $\theta = \mathcal{C}$, et on aura les équations

$$\cos^2\theta = \frac{(1-m)\cos^2\mathcal{C}}{\cos 2\omega - m}, \quad \sin^2\mu = \frac{1-m}{2}\sin^2\mathcal{C}.$$

Le cas de $\alpha = 0$ suppose $L = 0$; d'ailleurs on a $A > B$; ainsi l'état ini-
Fig. 3. tial du mouvement est représenté par la figure 3, où l'on a $L^0I^0 = \varepsilon$, $\tang DL^0 = \cot\mathcal{C} = \frac{C+A}{C+B}\tang\varepsilon$, ce qui donne $DL^0 > L^0I^0$; dans ce même cas, la première valeur de $\frac{d\omega}{dt}$ (art. 314) étant positive, les premières valeurs de ω sont positives.

Nous savons d'ailleurs que les limites de ω sont $+\mu$ et $-\mu$; c'est pourquoi nous ferons

$$\tang\omega = \tang\mu\sin\psi,$$

ψ étant un angle qui est nul lorsque $t = 0$, et qui croît indéfiniment avec le temps, comme le calcul le prouvera.

De l'équation précédente on déduit une valeur de $\cos 2\omega$, qui étant substituée dans celle de $\sin^2\theta$, donne

$$\sin^2\theta = \frac{\sin^2\mathcal{C}\cos^2\mu\cos^2\psi}{\cos^2\mu - (\sin^2\mathcal{C} - \sin^2\mu)\sin^2\psi}.$$

Soit donc $c^2 = \frac{\sin^2\mathcal{C} - \sin^2\mu}{\cos^2\mu} = \frac{1+m}{1-m}\tang^2\mu$, on aura $1 - c^2 = \frac{\cos^2\mathcal{C}}{\cos^2\mu}$; ainsi c est < 1, et on aura

$$\sin\theta = \frac{\sin\mathcal{C}\cos\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}.$$

On donne le signe $+$ au second membre, parce qu'en faisant $\psi = 0$, on doit avoir $\theta = \mathcal{C}$.

320. Cela posé, la correspondance entre les quantités ω, θ et ψ, pendant les quatre premières demi-oscillations, sera telle qu'il suit :

$\psi = 0°$,	$90°$,	$180°$,	$270°$,	$360°$,
$\omega = 0$,	μ,	0,	$-\mu$,	0,
$\theta = \mathcal{C}$,	0,	$-\mathcal{C}$,	0,	$\mathcal{C}$.

Dans la première demi-oscillation, le point L parvient de L^0 en B ou L^1; en même temps l'arc LM parvient de la position initiale L^0M^0 à la position L^1M^1, qui fait avec le méridien l'angle $DBM^1 = \mu$. Dans la seconde demi-oscillation, le point L continue son mouvement de nutation de L^1 en L^2, où l'on a $\theta = -\mathcal{C}$; en même temps l'arc LM revient de la position L^1M^1,

dans laquelle il est le plus éloigné du méridien, à la position L^2M^2, dirigée dans le sens du méridien. Dans la troisième demi-oscillation, le point L revient de L^2 à L^3 ou B; en même temps l'arc LM s'écarte du méridien dans le sens opposé, et parvient de la position L^2M^2 à la position L^3M^3, qui fait avec le méridien l'angle $DMB^3 = \mu$. Enfin, dans la quatrième demi-oscillation, le point L revient de L^3 ou B à L^0, et l'arc LM revient de la position L^3M^3 à la position L^0M^0. De sorte qu'au bout de deux oscillations, les choses sont rétablies dans le même état qu'au commencement du mouvement.

Ces mouvemens d'oscillation et de nutation, mesurés par les variables ω et θ, sont d'ailleurs indépendans du mouvement du méridien lui-même autour du point D, lequel est mesuré par l'angle ϕ.

321. Ces résultats supposent $\alpha < 90°$. Si l'on a $\alpha > 90°$, soit $\alpha = 180° - \alpha'$, on aura $\alpha' < 90°$. Par cette substitution, l'équation (1) sera la même que si l'on changeait simplement le signe de ω, et qu'on mît α' à la place de α. La valeur de μ étant déterminée semblablement, on aura $\mu > \alpha'$; et les limites de ω deviendront $-(\mu + \alpha')$, $+(\mu - \alpha')$; de sorte que l'étendue d'une oscillation sera toujours mesurée par l'arc 2μ; et si l'on fixe l'époque du mouvement au milieu d'une oscillation, cela revient à faire, dans la formule primitive, $\alpha' = 0$ ou $\alpha = 180°$, ce qui conduira toujours aux mêmes résultats que nous avons trouvés. En effet, on voit immédiatement que la valeur $\alpha = 180°$ amène l'axe AM sur le méridien DL, comme le fait la valeur $\alpha = 0$, avec cette différence, qu'au lieu du point M, on doit prendre l'autre extrémité du même axe principal, dont le moment a été supposé A+C.

Second cas : $m - \cos 2\alpha = p^2$.

322. Alors l'équation (1) prendra l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$\cos^2\theta = \frac{(m - \cos 2\alpha)\cos^2\gamma}{m - \cos(2\omega + 2\alpha)},$$

$$\sin^2\theta = \frac{m\sin^2\gamma + \cos 2\alpha\cos^2\gamma - \cos(2\omega + 2\alpha)}{m - \cos(2\omega + 2\alpha)},$$

où l'on voit que $m - \cos(2\omega + 2\alpha)$ doit toujours être positif.

Supposons d'abord $\alpha < 90°$, et soit μ un angle $< 90°$, tel qu'on ait

$$\cos 2\mu = -m\sin^2\gamma - \cos 2\alpha\cos^2\gamma,$$

on aura $\cos(180° - 2\mu) - \cos 2\alpha = (m - \cos 2\alpha)\sin^2\gamma = p^2\sin^2\gamma$; donc

$\mu > 90° - \alpha$. Cela posé, pour que $\sin^2\theta$ soit positif, il faut que $\cos(180° - 2\mu) - \cos(2\omega + 2\alpha)$ ou $2\sin(90° - \mu + \omega + \alpha)\sin(\omega + \alpha + \mu - 90°)$ soit positif. Donc ω positif a pour limite $+(90° + \mu - \alpha)$, et ω négatif a pour limite $-(\alpha + \mu - 90°)$; d'où il suit que l'étendue d'une oscillation est encore l'arc $2\mu < 180°$.

323. Si l'on prend pour époque du mouvement le milieu d'une oscillation, ce qui revient à faire dans nos formules, $\alpha = 90°$, et qu'en même temps on fasse $\theta = \zeta$, les formules deviendront

$$\cos^2\theta = \frac{(1+m)\cos^2\zeta}{m + \cos 2\omega}, \quad \sin^2\mu = \frac{1+m}{2}\sin^2\zeta.$$

Fig. 4. Le cas de $\alpha = 90°$ suppose $L = 90°$; ainsi l'état initial du mouvement est représenté par la figure 4, où l'on a $L°I° = \epsilon$, $\tang DL° = \cot\zeta = \frac{A+B}{C+B}\tang\epsilon$; et comme on a $A > C$, il s'ensuit que $DL° < I°L°$. Dans ce cas, la première valeur de $\frac{d\omega}{dt}$ ayant le même signe que $\cos 2\alpha - m$, est négative; donc les premières valeurs de ω sont aussi négatives.

Puisque les limites de ω sont encore $-\mu$ et $+\mu$, et que les premières valeurs de ω sont négatives, nous supposerons

$$\tang\omega = -\tang\mu\sin\psi,$$

et il en résultera

$$\sin\theta = \frac{\sin\zeta\cos\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}},$$

en prenant, comme dans le premier cas, $c^2 = \frac{\sin^2\zeta - \sin^2\mu}{\cos^2\mu} = \frac{1-m}{1+m}\tang^2\mu$.

324. Voici, d'après ces formules, la correspondance qui a lieu entre les trois variables ω, θ, ψ pendant les quatre premières demi-oscillations, au bout desquelles l'axe AL et la situation du corps, à l'égard de cet axe, sont rétablis comme ils étaient au commencement du mouvement :

$\psi = 0°$,	$90°$,	$180°$,	$270°$,	$360°$,
$\omega = 0$,	$-\mu$,	0,	μ,	0,
$\theta = \zeta$,	0,	$-\zeta$,	0,	ζ.

Au premier instant, l'arc LM est dans la situation $L°M°$, qui fait un angle droit avec le méridien DL; c'est donc alors l'axe AN qui se trouve situé dans le méridien. Du reste, on explique, par la figure 4, la correspondance des mouvemens d'oscillation et de nutation, comme on l'a fait par la fig. 3 dans le premier cas.

Si l'on avait $\alpha > 90°$, on ferait $\alpha = 180° - \alpha'$, et on parviendrait absolument aux mêmes conclusions.

325. Il résulte de l'analyse précédente, que le mouvement d'un corps, considéré relativement à son axe moyen, présente deux cas dont voici les caractères distinctifs.

Premier cas. Dans chaque oscillation il y a un instant où l'axe moyen AL, l'axe du plus grand moment AM, et l'axe de rotation instantané AI sont dans un même plan avec la directrice AD. Cet instant est le milieu d'une oscillation, époque où l'axe moyen est dans sa plus petite ou sa plus grande distance à l'égard de la directrice AD. Les formules données pour ce cas (art. 319), supposent que le temps commence à une de ces époques où le point L est le plus près de D. Fig. 3.

La distance IL étant connue au premier instant, et désignée par ε, on trouve la distance $DL = 90° - \mathcal{C}$, qui donne la position de la directrice AD par la formule

$$\text{tang}\, DL = \cot \mathcal{C} = \frac{A+C}{B+C} \text{tang}\, \varepsilon;$$

ainsi on a toujours, dans ce cas, $DL > IL$.

Connaissant $\mathcal{C}$, qui détermine la nutation de l'axe moyen, on a la quantité μ, qui détermine l'étendue des oscillations par la formule $\sin^2 \mu = \frac{1-m}{2} \sin^2 \mathcal{C}$. Cette quantité μ est toujours plus petite que $\mathcal{C}$, et à plus forte raison plus petite que 90°; et puisque $\frac{1-m}{2} = \frac{A^2 - B^2}{C^2 - B^2}$, il s'ensuit qu'on a aussi $\sin \mu < \sqrt{\left(\frac{A^2 - B^2}{C^2 - B^2}\right)}$. Dans ce premier cas, le troisième axe principal AN, qui a le plus petit moment $A + B$, ne peut jamais se trouver sur le méridien DL; car la plus petite valeur de l'angle DLN est $90° - \mu$, dans un sens ou dans l'autre.

Second cas. Si l'on change B en C, et réciproquement, tout ce qu'on a dit du premier cas s'applique au second. C'est donc alors l'axe du plus petit moment AN, qui, au milieu de chaque oscillation, se trouve dans un même méridien avec l'axe moyen AL et l'axe de rotation instantané AI. L'axe du plus grand moment AM est toujours à une distance du méridien DL, qui ne peut être moindre que $90° - \mu$. Fig. 4.

Dans le second cas, la distance DL se détermine par l'équation

$$\text{tang}\, DL = \cot \mathcal{C} = \frac{A+B}{B+C} \text{tang}\, \varepsilon;$$

ainsi on a toujours $DL < IL$.

Au reste, ces deux cas se traitent analytiquement de la même manière, puisque la permutation des lettres B et C change m en $-m$, et qu'ainsi les formules trouvées pour le premier cas, s'appliquent également au second, comme on le verra ci-après.

Il ne reste plus à examiner que le cas où l'on aurait $m - \cos 2\alpha = 0$.

Troisième cas : $\cos 2\alpha - m = 0$.

326. Alors l'équation (1) donne $\omega = 0$; ainsi le corps n'a aucun mouvement autour de son axe moyen AL. Pour déterminer les deux autres variables θ et φ, il faut recourir aux équations (2) et (3) du n° 308, lesquelles donnent

$$\frac{d\theta}{\cos\theta} = -\frac{\sin 2\alpha}{n - \cos 2\alpha}\, d\varphi,$$

$$d\varphi = \mathrm{K}dt.$$

Il en résulte d'abord $\varphi = \mathrm{K}t$, ce qui prouve que le mouvement de l'axe moyen AL autour de la directrice AD est uniforme.

Ensuite si l'on fait $\frac{\mathrm{K}\sin 2\alpha}{n - \cos 2\alpha} = i$, on aura $\frac{d\theta}{\cos\theta} = -i\,dt$; ce qui donne, en intégrant,

$$l \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta) = l \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\gamma) - it,$$

ou

$$\operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta) = e^{-it} \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\gamma).$$

En faisant $t = \infty$, on aura $\theta = 90^\circ$ ou $\theta = -90^\circ$, selon que i sera négatif ou positif; c'est-à-dire selon que α sera plus grand ou plus petit que 90°. Alors l'axe moyen sera réuni avec la directrice AD, dans un sens ou dans l'autre, et le mouvement de rotation autour de ces axes réunis, continuera de se faire uniformément avec la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt} = \mathrm{K}$.

Et quoique cette réunion des deux axes n'ait lieu rigoureusement qu'après un temps infini, cependant la rapidité avec laquelle croît ou décroît l'exponentielle e^{it}, permet de regarder ces axes comme sensiblement réunis après un temps assez court.

327. Voilà donc un nouveau cas très remarquable où l'on peut déterminer exactement et d'une manière très simple le mouvement d'un corps de figure quelconque : c'est lorsque la valeur initiale de l'angle ILM, que nous avons appelée L, est telle qu'on a $\cos 2\alpha = m = \frac{\mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 - 2\mathrm{A}^2}{\mathrm{C}^2 - \mathrm{B}^2}$. Cette valeur, com-

binée avec l'équation $\tang \alpha = \frac{A+B}{A+C} \tang L$, donne $\cos 2L = \frac{BC - A^2}{A(C-B)}$, ou $\tang^2 L = \frac{A-B}{A+B}, \frac{C+A}{C-A}$. Ainsi, pourvu que l'axe de rotation primitif A soit placé sur l'arc LI, déterminé par la valeur précédente de tang L, le cas dont il s'agit aura lieu : l'arc LI pourrait d'ailleurs être situé de l'autre côté de l'arc LM, ce qui donnerait toujours le même cas susceptible d'une solution très simple.

328. Ayant développé l'équation (1), qui contient la loi générale des oscillations du corps autour de l'axe moyen, et de la nutation de cet axe, nous allons procéder à l'intégration des équations (2) et (3), qui feront connaître les variables ω, θ et φ au bout d'un temps quelconque t. Il suffira, pour cet objet, de considérer les formules de l'art. 319, puisqu'elles renferment celles du second cas.

Reprenons donc les formules

$$\tang \omega = \tang \mu \sin \psi, \quad \sin^2 \mu = \frac{1-m}{2} \sin^2 \zeta,$$

$$\sin \theta = \frac{\sin \zeta \cos \psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}}, \quad c^2 = \frac{1+m}{1-m} \tang^2 \mu = 1 - \frac{\cos^2 \zeta}{\cos^2 \mu},$$

d'où l'on déduit

$$\cos 2\omega - m = \frac{(1-m)(1-c^2 \sin^2 \psi)}{1 + \tang^2 \mu \sin^2 \psi}, \quad \frac{d\omega}{\sin \theta} = \frac{\tang \mu}{\sin \zeta} \cdot \frac{d\psi \sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}}{1 + \tang^2 \mu \sin^2 \psi}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (2), où il faut faire $\alpha = 0$, on aura

$$K dt = \frac{n-m}{1-m} \cdot \frac{\tang \mu}{\sin \zeta} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}};$$

d'ailleurs $K = \frac{W \cos \iota}{\sin \zeta}$ et $\frac{n-m}{1-m} = \frac{A+C}{A+B}$; donc si on fait

$$i = \frac{W \cos \iota}{\tang \mu} \cdot \frac{A-B}{A+C},$$

on aura

$$i dt = \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}},$$

et en intégrant

$$it = F(c, \psi).$$

Ainsi étant donnée une valeur quelconque de l'angle ψ, on pourra trouver la valeur correspondante du temps t, et réciproquement.

329. Soit τ le temps d'une demi-oscillation, qui est aussi celui d'une demi-nutation, on aura $i\tau = F'c$, et par conséquent ce temps pourra être

déterminé avec toute la précision qu'on voudra, par le moyen de la fonction complète $F'c$.

Lorsque le corps différera peu de la figure sphérique, la quantité i sera très petite et τ très grand; de sorte que les mouvemens d'oscillation et de nutation seront très lents.

Soit ψ' la valeur de ψ qui répond à un temps quelconque $t' < \tau$; si l'on fait en général $t = 2k\tau \pm t'$, k étant un entier quelconque, on aura

$$\psi = 2k \cdot \tfrac{1}{2}\pi \pm \psi'$$

La constante τ étant une fois calculée avec toute la précision nécessaire, par la théorie des fonctions elliptiques, on déterminera exactement l'angle ψ pour toute valeur de t multiple de τ. On pourra même déterminer algébriquement cet angle pour une infinité d'autres valeurs de t, commensurables avec τ; car on sait que l'équation $\frac{t}{\tau} F'c = F(c, \psi)$ est résoluble algébriquement, toutes les fois que $\frac{t}{\tau}$ est rationnelle.

330. Dans tous les cas, on pourra, par l'équation $it = F(c, \psi)$, déterminer aussi exactement qu'on voudra l'angle ψ au bout d'un temps quelconque t; l'angle ψ étant connu, on connaîtra la distance $90° - \theta$ de l'axe AL à la directrice AD, et l'angle ω ou DLM qui fixe la situation du corps par rapport à l'axe AL, au moyen des formules

$$\operatorname{tang}\omega = \operatorname{tang}\mu \sin\psi, \quad \sin\theta = \frac{\sin\sigma\cos\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}},$$

où il faudra se rappeler que ω est toujours compris entre les limites μ et $-\mu$, de même que θ entre les limites $+\sigma$ et $-\sigma$.

331. Il ne reste plus qu'à déterminer l'angle φ, qui fera connaître, au bout d'un temps quelconque t, la position du méridien DL. Or si, après avoir fait $\alpha = 0$, on substitue dans l'équation (3) les valeurs

$$\frac{d\omega}{(\cos 2\omega - m)\sin\theta} = \frac{\operatorname{tang}\mu}{(1-m)\sin\sigma} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}},$$

$$n - \cos 2\omega = n + 1 - \frac{2}{1 + \operatorname{tang}^2\mu\sin^2\psi},$$

on aura

$$d\varphi = \frac{2\operatorname{tang}\mu}{(1-m)\sin\sigma}\left(\frac{n+1}{2} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}} - \frac{d\psi}{(1+\operatorname{tang}^2\mu\sin^2\psi)\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}\right)$$

d'où l'on tire, en intégrant et observant que $\frac{2\operatorname{tang}\mu}{(1-m)\sin\sigma} = \frac{\sin\sigma}{\sin\mu\cos\mu}$,

$$\varphi = \frac{\sin\sigma}{\sin\mu\cos\mu}\left[\frac{n+1}{2}F(\psi) - \Pi(\operatorname{tang}^2\mu, \psi)\right]$$

Dans cette formule, $\Pi(\tang^2\mu, \psi)$ désigne la fonction elliptique de troisième espèce, dont $\tang^2\mu$ est le paramètre, c étant d'ailleurs le module commun aux deux fonctions F et Π.

332. La valeur de φ correspondante au temps d'une demi-oscillation, se trouvera en faisant $\psi = 90^\circ$; si l'on désigne cette valeur par Φ, on aura

$$\Phi = \frac{\sin \mathcal{C}}{\sin\mu \cos\mu}\left[\frac{n+1}{2} F' - \Pi'(\tang^2\mu)\right].$$

La fonction complète $\Pi'(\tang^2\mu)$ pourra s'exprimer par des fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce, au moyen de la formule du n° 107; mais pour cet objet, il sera bon de donner une autre forme à cette formule.

333. En suivant les dénominations de l'article cité, soit λ un angle tel que $\tang\lambda = \frac{\cot\theta}{c}$, ce qui donne $\sin\lambda = \frac{\cos\theta}{\Delta(b,\theta)}$ et $\cos\lambda = \frac{c\sin\theta}{\Delta(b,\theta)}$, on aura, par les propriétés connues,

$$F(b,\theta) + F(b,\lambda) = F'b,$$
$$E(b,\theta) + E(b,\lambda) = E'b + b^2 \sin\theta \sin\lambda.$$

Au moyen de ces équations, on éliminera $F(b,\theta)$ et $E(b,\theta)$ de la valeur de $\Pi'(n,c)$; puis réduisant d'après l'équation des fonctions complémentaires, on aura la formule

$$\frac{\Delta(b,\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\Pi'(n,c) = F'c\left[\frac{c^2\tang\theta}{\Delta(b,\theta)} + E(b,\lambda) - F(b,\lambda)\right] + E'cF(b,\lambda),$$

dans laquelle $n = \cot^2\theta$.

334. Pour appliquer cette formule au cas proposé, il faudra faire... $\theta = \frac{1}{2}\pi - \mu$, $b = \frac{\cos\mathcal{C}}{\cos\mu}$, ce qui donnera $\tang\lambda = \frac{\tang\mu}{c} = \sqrt{\left(\frac{1-m}{1+m}\right)} = \sqrt{\left(\frac{A^2-B^2}{C^2-A^2}\right)}$, et on aura

$$\frac{\sin\mathcal{C}}{\sin\mu\cos\mu}\Pi'(\tang^2\mu) = F'c(\sin\mathcal{C}\cot\mu - b^2\cos\mu\sin\lambda)$$
$$- F'c[F(b,\lambda) - E(b,\lambda)] + E'cF(b,\lambda).$$

J'observe maintenant que la quantité $\sin\mathcal{C}\cot\mu - b^2\cos\mu\sin\lambda$ se réduit d'abord à $\frac{\cos\mu}{\sin\lambda}(1 - b^2\sin^2\lambda) = \frac{\cos\mu}{\sin\lambda}(\cos^2\lambda + c^2\sin^2\lambda)$; et parce que $c^2 = \tang^2\mu\cot^2\lambda$, elle se réduit ultérieurement à $\frac{\cos^2\lambda}{\sin\lambda\cos\mu}$ ..... $= \frac{C^2-A^2}{A^2-B^2}\cdot\frac{\tang\mu}{\sin\mathcal{C}}$; donc enfin on aura

$$\Phi = \left[\frac{(A+C).(A+B)}{C^2-B^2}\cdot\frac{\sin\zeta}{\sin\mu\cos\mu} - E(b,\lambda)\right]F'c + F(b,\lambda)(F''c - E'c).$$

Par cette formule, on peut déterminer aussi exactement qu'on voudra l'angle Φ que décrit l'axe moyen autour de la directrice AD, pendant la durée τ d'une demi-oscillation.

335. Cela posé, pour avoir la valeur de φ au bout d'un temps quelconque t, on fera, comme ci-dessus, $t = 2k\tau \pm t'$. On cherchera, par ce qui a été déjà dit, l'angle ψ', qui répond au temps $t' < \tau$; puis calculant par la formule générale la valeur de φ qui correspond à l'angle ψ', et appelant cette valeur φ', on aura généralement

$$\varphi = 2K\Phi \pm \varphi'.$$

Ainsi, au moyen de la seule constante Φ une fois calculée avec toute la précision nécessaire, on connaîtra exactement φ pour toute valeur de t multiple de τ : on pourra encore déterminer φ algébriquement, et par le moyen des arcs de cercle, si t est commensurable avec τ; dans tout autre cas, on déterminera φ par les formules d'approximation connues dans la théorie des fonctions elliptiques.

Développement du cas particulier où l'on a $m = -1$.

336. Quoique ce cas suppose $C = A$, et retombe ainsi, à la notation près, dans celui qui a été traité n° 313, cependant le nouveau point de vue sous lequel nous envisageons ici le mouvement, et les intégrales exactes que nous obtiendrons, ne peuvent que répandre un nouveau jour sur cette matière.

Soit donc $m = -1$ ou $C = A$, on aura $\mu = \zeta$, $\cot\zeta = \frac{2A}{A+B}\tang\varepsilon$, $c = 0$, $i = \frac{A-B}{A+B}W\sin\varepsilon$, et les variables ω, θ, φ seront données par les équations

$$it = \psi, \qquad \tang\zeta = \frac{\tang\psi}{\cos\mu},$$
$$\varphi = \frac{n+1}{2\cos\mu}\psi - \zeta,$$
$$\tang\omega = \tang\mu\sin\psi,$$
$$\sin\theta = \sin\mu\cos\psi, \quad \cos\theta\cos\omega = \cos\mu.$$

Voici, d'après ces équations, comment on déterminera la position du corps au bout du temps t.

On connaît d'abord l'arc ψ par la valeur $\psi = it$, et l'arc ζ par l'équa-

tion $\tang \zeta = \frac{\tang \psi}{\cos \mu}$, où il faut observer que $\zeta - \psi$ est toujours moindre que 90°. Par ces deux arcs on a la valeur de φ, qui détermine la position du méridien DL. On a ensuite les angles θ et ω par les équations $\sin \theta = \sin \mu \cos \psi$, $\tang \omega = \tang \mu \sin \psi$; la première fait connaître la distance $DL = 90° - \theta$, et la seconde donne, avec le signe convenable, l'angle DLM qui détermine la position de l'axe AM, et par conséquent celle de tout le corps par rapport à l'axe AL.

337. Cette solution doit revenir au même que celle qu'on déduirait du n° 313; mais comme elles paraissent très différentes au premier coup d'œil, il sera bon d'en démontrer l'identité.

Soit $BL^{\circ}I^{\circ}DM^{\circ}$ le méridien primitif où se trouvaient, lorsque $t = 0$, les axes AL, AM, et l'axe de rotation AI aux points marqués L°, M°, et I°. Fig. 5. Supposons qu'au bout du temps t, les axes AL, AM forment, avec la directrice AD, le triangle sphérique DLM; la position des points L et M sera déterminée par ce qui précède, au moyen des élémens $BX = \varphi$, $XL = \theta$, $DLM = \omega$, $LM = 90°$.

Dans le triangle DLM, où le côté LM est de 90°, on a $\cos DM = \cos DLM \sin DL = \cos \omega \cos \theta = \cos \mu$; donc $DM = \mu$. Donc l'axe principal AM (celui qui n'est point semblable aux deux autres) est toujours également incliné à la directrice AD.

Le même triangle donne $\sin MDL = \frac{\sin MLD}{\sin DM} = \frac{\sin \varphi}{\sin \mu}$; mais les formules $\tang \omega = \sin \psi \tang \mu$, $\tang \psi = \cos \mu \tang \zeta$ donnent $\sin \zeta = \frac{\sin \omega}{\sin \mu}$; donc l'angle ζ est égal à l'angle MDL, ou à son supplément MDx. Or, lorsque $t = 0$, le point M étant en M°, c'est le supplément MDx qui devient zéro; donc on a en général $\zeta = MDx$.

Il suit de là que l'angle MDM°, parcouru par l'axe AM autour du pôle D dans le temps t, $= \varphi + \zeta$; de sorte qu'on aura

$$MDM^{\circ} = \varphi + \zeta = \frac{2A}{A-B} \cdot \frac{\psi}{\cos \mu} = \frac{2A}{A+B} \cdot \frac{Wt \sin \epsilon}{\cos \mu}.$$

Donc l'axe AM se meut uniformément autour du point D avec la vitesse angulaire $\frac{2A}{A+B} \cdot \frac{W \sin \epsilon}{\cos \mu}$; et parce que $\frac{2A}{A+B} = \cot \theta \cot \epsilon = \cot \mu \cot \epsilon$, cette vitesse peut aussi s'exprimer par $\frac{W \cos \epsilon}{\sin \mu}$.

Enfin, le même triangle DML donne encore $\sin DML = \sin DL \sin MDL =$

$\cos\theta \sin\zeta = \frac{\cos\mu}{\cos\omega} \cdot \frac{\sin\omega}{\sin\mu} = \frac{\tang\omega}{\tang\mu} = \sin\psi$; et puisque l'angle DML est zéro en même temps que ψ, on a $DML = \psi$. Donc le corps tourne uniformément autour de l'axe mobile AM, dans le sens CB, avec une vitesse angulaire $\frac{\psi}{t} = \frac{A-B}{A+B} W \sin\varepsilon$.

Ces mouvemens sont précisément ceux que nous avons indiqués n° 313, pourvu qu'on échange entre elles les lettres A et B, afin que la supposition actuelle $C = A$ revienne à celle du n° 313, $C = B$.

Application des formules au second cas du problème, art. 325.

338. Nous avons discuté fort au long le premier cas, qui est celui où l'axe du plus grand moment AM se trouve au milieu de chaque oscillation, dans le même plan avec l'axe moyen AL et la directrice AD. Venons maintenant au second cas, où l'axe du plus petit moment AN est celui qui se trouve périodiquement dans le même méridien que l'axe moyen AL, tandis que l'axe du plus grand moment reste toujours éloigné de ce méridien à une distance qui n'est jamais moindre que $90° - \mu$.

Il suffit, pour la solution de ce second cas, d'échanger entre elles les lettres B et C; et comme on suppose constamment $m = \frac{B^2 + C^2 - 2A^2}{C^2 - B^2}$, afin de conserver l'ordre de grandeur $C > A > B$, il faudra en même temps changer le signe de m. Par l'effet de cette permutation, la constante i deviendrait négative; ainsi il convient de changer le signe de ψ, ce qui change en même temps le signe de ω, comme l'exige la nature de la question (art. 323). Cela posé, voici les formules par lesquelles on déterminera la situation du corps et les vitesses de ses différens mouvemens au bout d'un temps quelconque.

339. Connaissant σ par l'équation $\cot\sigma = \frac{A+B}{B+C} \tang\varepsilon$, on trouvera l'angle $\mu < 90°$ par la formule $\sin^2\mu = \frac{1+m}{2} \sin^2\sigma = \frac{C^2 - A^2}{C^2 - B^2} \sin^2\sigma$. Faisant ensuite

$$i = \frac{W \cos\varepsilon}{\tang\mu} \cdot \frac{C-A}{A+B},$$

on aura l'équation

$$it = F(c, \psi),$$

qui servira à déterminer t par ψ, ou réciproquement ψ par t. Soit τ le temps d'une demi-oscillation, on aura $\tau = \frac{1}{i} F'c$.

Connaissant τ avec toute l'exactitude nécessaire, on pourra supposer qu'un temps quelconque t, aussi grand qu'on voudra, soit représenté par la formule

$$t = 2k\tau \pm t',$$

k étant un entier, et t' un temps $< \tau$. Soit ψ' la valeur de ψ qui répond au temps t', en sorte qu'on ait $it' = F(c, \psi')$ on aura en général,

$$\psi = 2k.\tfrac{1}{2}\pi \pm \psi'.$$

ψ étant connu, on déterminera la distance $90° - \theta$ de l'axe moyen AL à la directrice, et l'angle ω que fait l'arc LN avec le méridien DL, par les formules suivantes :

$$\sin\theta = \frac{\sin\mathcal{C}\cos\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}, \quad \operatorname{tang}\omega = -\operatorname{tang}\mu\sin\psi,$$

où l'on a $c^2 = \frac{1-m}{1+m}\operatorname{tang}^2\mu$. Ces formules détermineront toujours θ et ω sans ambiguité, parce qu'on sait que θ est compris entre les limites $+\mathcal{C}$ et $-\mathcal{C}$, de même que ω entre les limites $+\mu$ et $-\mu$; d'ailleurs il faut se rappeler que ω négatif suppose, comme dans la figure 2, l'angle DLN formé du même côté de DL que celui où se porte l'axe AL par son mouvement autour du point D, et que ω positif suppose l'angle DLN formé de l'autre côté de DL.

340. Il ne reste plus qu'à déterminer la position du méridien DL, ce qui se fera par l'arc $BX = \varphi$, dont la valeur est

$$\varphi = \frac{\sin\mathcal{C}}{\sin\mu\cos\mu}\left[\frac{n-1}{2}F(c, \psi) + \Pi(\operatorname{tang}^2\mu, c, \psi)\right],$$

en supposant toujours $n = \frac{B+C+2A}{C-B}$, et $\frac{n-1}{2} = \frac{B+A}{C-B}$.

Si l'on appelle Φ la valeur de φ correspondante à $\psi = 90°$, ou au temps d'une demi-oscillation, on aura

$$\Phi = \frac{\sin\mathcal{C}}{\sin\mu\cos\mu}\left[\frac{n-1}{2}F'c - \Pi'(\operatorname{tang}^2\mu, c)\right];$$

et en prenant un angle auxiliaire λ d'après l'équation $\operatorname{tang}\lambda = \sqrt{\left(\frac{1+m}{1-m}\right)}$, on aura

$$\Phi = \left[\frac{(A+C)(A+B)}{C^2 - B^2}\cdot\frac{\sin\mathcal{C}}{\sin\mu\cos\mu} + E(b, \lambda)\right]F'c$$
$$- F(b, \lambda).(F'c - E'c).$$

Soit, comme ci-dessus, $t = 2k\tau \pm t'$, on aura $\varphi = 2k\Phi \pm \varphi'$, φ' étant la valeur de φ qui correspond au temps t', ou à l'angle ψ' déjà déterminé.

Formules particulières pour le cas où l'axe de rotation primitif est très près de l'axe du plus grand moment AM.

341. Alors il faudra supposer $\epsilon = \frac{1}{2}\pi - \delta$, δ étant une quantité très petite, dont on pourra négliger les puissances supérieures au second ordre. Appliquant donc les formules du premier cas, on aura d'abord les valeurs suivantes :

$$\mathcal{C} = \frac{B+C}{A+C}\delta, \quad \mu = \mathcal{C}\sqrt{\left(\frac{1-m}{2}\right)} = \mathcal{C}\sqrt{\left(\frac{A^2-B^2}{C^2-B^2}\right)}, \quad c^2 = \frac{1+m}{1-m}\mu^2;$$

d'où il suit que la nutation de l'axe AL, et les oscillations du corps autour de cet axe, seront très petites de l'ordre δ.

On aura ensuite

$$i = \frac{A-B}{A+C}\cdot\frac{W\sin\delta}{\tang\mu} = W\sqrt{\left(\frac{A-B}{A+B}\cdot\frac{C-B}{C+B}\right)}\cdot\left(1 - \frac{C(C+A)}{(C+B)(A+B)}\mu^2\right),$$

et l'équation $it = F(c, \psi) = \psi(1 + \frac{1}{4}c^2) - \frac{1}{8}c^2\sin 2\psi$ donnera réciproquement

$$\psi = (1 - \tfrac{1}{4}c^2)\,it + \tfrac{1}{8}c^2\sin 2it.$$

On en tire le temps d'une demi-oscillation

$$\tau = \frac{\frac{1}{2}\pi}{i}(1 + \tfrac{1}{4}c^2);$$

et ce temps étant une fois calculé jusqu'à la précision des quantités du second ordre, on aura en général

$$\psi = \tfrac{1}{2}\pi\cdot\frac{t}{\tau} + \frac{c^2}{8}\sin\frac{\pi t}{\tau}.$$

L'angle ψ étant connu pour un temps quelconque, on aura les valeurs de ω et θ, savoir :

$$\omega = \mu\sin\psi \quad \text{et} \quad \theta = \mathcal{C}\cos\psi.$$

342. Enfin la valeur de φ, au bout du temps t, sera donnée par la formule

$$\varphi = Wt(1 - \tfrac{1}{2}\delta^2 + \tfrac{1}{2}\mathcal{C}^2) + \tfrac{1}{2}\mathcal{C}\mu(\psi - \tfrac{1}{2}\sin 2\psi),$$

où l'on pourra substituer la valeur $\psi = it$.

Soit Φ l'angle décrit par l'axe AL autour de la directrice, pendant le temps τ d'une demi-oscillation, on aura

$$\Phi = W\tau(1 - \tfrac{1}{2}\delta^2 + \tfrac{1}{2}\mathcal{C}^2) + \tfrac{1}{2}\mathcal{C}\mu.i\tau,$$

ou, en substituant la valeur $\mu i = \frac{A-B}{A+C}\delta W$,

$$\Phi = W\tau\left(1 - \tfrac{1}{2}\delta^2 + \tfrac{1}{2}\mathcal{C}\delta\right) = W\tau\left(1 - \tfrac{1}{2}\delta^2 \cdot \frac{A-B}{A+C}\right).$$

Ainsi l'axe AL tourne autour de la directrice AD avec une vitesse très peu différente de la vitesse angulaire initiale W. Cela s'explique en observant que l'axe de rotation primitif AI est très rapproché de la directrice AD, puisque la distance $DI = \delta - \mathcal{C} = \frac{A-B}{A+C}\delta$; quantité qui sera très petite, même par rapport à δ, si l'on suppose le corps peu éloigné de la figure sphérique, ou $A - B$ très petit par rapport à $A + C$.

Au reste, on voit que dans le même cas, le temps d'une oscillation représenté par 2τ est très grand, puisqu'en négligeant les quantités de l'ordre δ^2, on a

$$2\tau = \frac{\pi}{W}\sqrt{\left(\frac{A+B}{A-B} \cdot \frac{C+B}{C-B}\right)}.$$

Ayant déterminé la constante Φ avec toute la précision nécessaire, on pourra mettre la valeur générale de φ sous cette forme,

$$\varphi = \frac{t}{\tau}\Phi - \tfrac{1}{4}\mathcal{C}\mu \sin\frac{2\pi t}{\tau}.$$

Ainsi l'on voit qu'il ne s'en faut que d'une très petite quantité $\frac{1}{4}\mathcal{C}\mu \sin\frac{2\pi t}{\tau}$, que le mouvement de l'axe AL autour de la directrice ne soit uniforme. Lorsque t sera un multiple de τ, on aura exactement $\varphi = \frac{t}{\tau}\Phi$.

Cas où le mouvement est le plus compliqué.

343. La valeur de c^2 étant exprimée directement par l'angle donné ϵ, on a

$$\frac{1}{c^2} = 1 + \frac{C-B}{C+B} \cdot \frac{C+A}{C-A} \tang^2 \epsilon.$$

De là on voit que c est d'autant plus près de l'unité, que l'axe de rotation initial est plus près de l'axe moyen, cas où la distance ϵ est très petite sans être nulle. Comme on a d'ailleurs $C > A > B$, il en résulte $(C - B)(C + A) > (C + B)(C - A)$; ainsi, dans aucun autre cas, on ne peut avoir c très peu différent de l'unité. Dans ce cas donc la nutation de l'axe moyen est de près de 180°, et les oscillations autour de cet axe sont les plus grandes qu'il est possible. Ainsi le mouvement du corps sera d'autant plus irrégulier, que l'axe de rotation initial sera plus près de l'axe moyen.

Il n'en est pas de même lorsque l'axe de rotation initial est fort près de

l'un des deux autres axes principaux. On a déjà vu, dans les art. 341 et 342, et on démontrera plus en détail dans la suite, qu'alors le mouvement du corps est presque uniforme, et que l'axe de rotation ne varie que très peu.

Il y a cependant un cas (n° 327) où l'axe moyen s'approche continuellement de la directrice, et se confond sensiblement avec elle au bout d'un temps assez court; de sorte qu'après la réunion de ces deux axes, le mouvement devient uniforme. Ce cas seul excepté, et celui où l'axe de rotation initial serait précisément l'axe moyen, un corps ne peut tourner d'une manière sensiblement uniforme autour de son axe moyen. Si donc un corps paraît avoir un mouvement presque uniforme autour d'un axe sensiblement fixe, cet axe ne peut être son axe moyen. Les planètes, les comètes, et en général tous les corps sujets à quelque variation, ne tourneront jamais uniformément autour de leur axe moyen.

Seconde solution, AL *étant l'axe du plus grand moment.*

344. Quoique le problème soit résolu dans toute sa généralité, par les formules précédentes, qui supposent $m < 1$, il ne sera cependant pas inutile d'examiner aussi le cas de $m > 1$: les formules qu'on trouvera dans ce cas seront plus immédiatement applicables au mouvement de rotation des planètes. Mais pour ne pas entrer dans des détails superflus, nous supposerons qu'on a $C > B > A$; alors l'axe AL aura le plus grand moment d'inertie $B + C$; l'axe AM, dont le moment d'inertie est $A + C$, sera l'axe moyen, et l'axe AN aura le plus petit moment $A + B$. Dans cette supposition, la quantité $m = \frac{C^2 + B^2 - 2A^2}{C^2 - B^2}$ sera toujours positive et plus grande que l'unité. Cela posé, l'équation (1) donne

$$\sin^2\theta = \frac{m \sin^2\gamma + \cos 2\alpha \cos^2\gamma - \cos(2\omega + 2\alpha)}{m - \cos(2\omega + 2\alpha)},$$

et elle offre trois cas à distinguer.

Premier cas : $m \sin^2\gamma + \cos 2\alpha \cos^2\gamma < 1$.

345. Comme le dénominateur $m - \cos(2\omega + 2\alpha)$ est toujours positif, il faut que le numérateur soit positif aussi, ce qui exige que ω ne s'étende pas de 0° à 180°. Donc, dans ce cas, le corps ne peut faire que des oscillations autour de son axe principal AL.

Pour en déterminer l'étendue, on prendra un angle $\mu < 90°$, tel qu'on

ait

$$\cos 2\mu = -m \sin^2\gamma - \cos 2\alpha \cos^2\gamma;$$

cette valeur donne $\cos(180^\circ - 2\mu) - \cos 2\alpha = (m-1)\sin^2\gamma$, quantité positive; donc $\mu > 90^\circ - \alpha$. Maintenant pour que $\sin^2\theta$ soit positif, il faut que $\cos 2\mu + \cos(2\omega + 2\alpha)$ ou $2\cos(\omega + \alpha + \mu)\cos(\omega + \alpha - \mu)$ soit négatif; donc ω positif a pour limite $+(90^\circ - \alpha + \mu)$, et ω négatif a pour limite $-(\alpha + \mu - 90^\circ)$; l'étendue de chaque oscillation est donc l'arc $2\mu < 180^\circ$.

On peut prendre pour époque du mouvement, le milieu d'une oscillation, ce qui revient à faire $\alpha = 90^\circ$. Soit alors $\theta = \epsilon$ ou $\gamma = \epsilon$, et on aura les équations

$$\cos^2\theta = \frac{(m+1)\cos^2\epsilon}{m + \cos 2\omega}, \quad \sin^2\mu = \frac{1+m}{2}\sin^2\epsilon.$$

Ce cas suppose, comme on voit, $\sin\epsilon < \sqrt{\left(\frac{2}{1+m}\right)} < \sqrt{\left(\frac{C^2 - B^2}{C^2 - A^2}\right)}$; et puisqu'au commencement du mouvement on a $\alpha = 90^\circ = L$, $\cot\epsilon = \frac{A+B}{C+B}\tang\varepsilon$, il faut qu'on ait aussi $\tang\varepsilon > \sqrt{\left(\frac{B-A}{B+A}\cdot\frac{C+B}{C-B}\right)}$: c'est le symptôme qui distingue ce premier cas des deux autres.

De l'équation précédente on déduit

$$\sin^2\theta = \frac{\sin^2\mu - \sin^2\omega}{\frac{1}{2}(m+1) - \sin^2\omega},$$

et réciproquement,

$$\sin^2\omega = \frac{m+1}{2}\cdot\frac{\sin^2\epsilon - \sin^2\theta}{\cos^2\theta}.$$

Soit $\sin\theta = \sin\epsilon\cos\psi$, et $c^2 = \frac{m-1}{2}\tang^2\epsilon = 1 - \frac{\cos^2\mu}{\cos^2\epsilon}$, on aura

$$\sin\omega = -\frac{\sin\mu\sin\psi}{\sqrt{(1 - \sin^2\epsilon\cos^2\psi)}}, \quad \cos\omega = \frac{\cos\epsilon\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}{\sqrt{(1 - \sin^2\epsilon\cos^2\psi)}}.$$

On a mis le signe $-$ à $\sin\omega$, parce qu'en faisant $t = 0$ et $\omega = 0$, la première valeur de $\frac{d\omega}{dt}$ (n° 314) est négative.

D'après ces formules, la correspondance entre ω, θ et ψ dans les quatre premières demi-oscillations, est telle qu'on le voit ici :

$\psi = 0^\circ$,	90°,	180°,	270°,	360°,
$\theta = \epsilon$,	0,	$-\epsilon$,	0,	ϵ,
$\omega = 0$,	$-\mu$,	0,	$+\mu$,	0.

346. Maintenant, si dans l'équation (2) du n° 314, on fait $\alpha = 90^\circ$, et

qu'on substitue la valeur de $\frac{d\omega}{\sin\theta}$ tirée des formules précédentes, on aura

$$Kdt = \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{\sin\mu}{\sin\mathcal{C}\cos\mathcal{C}} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}.$$

D'ailleurs on a $K = \frac{W\cos\varepsilon}{\sin\mathcal{C}}$, $\cot\mathcal{C} = \frac{A+B}{B+C}\tang\varepsilon$, et $\frac{n-m}{m+1} = \frac{A+B}{C-A}$; donc si l'on fait

$$i = \frac{W\cos\varepsilon\cos\mathcal{C}}{\sin\mu} \cdot \frac{C-A}{A+B} = W\sin\varepsilon\sqrt{\left(\frac{C-A}{C+A} \cdot \frac{C-B}{C+B}\right)},$$

on aura

$$idt = \frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}},$$

et en intégrant,

$$it = F(c, \psi).$$

Soit τ le temps d'une demi-oscillation ou celui d'une demi-nutation, on aura $\tau = \frac{1}{i}F'c$; en général, si l'on fait $t = 2k\tau \pm t'$, k étant un entier, et $t' < \tau$, on aura

$$\psi = 2k \cdot \tfrac{1}{2}\pi \pm \psi',$$

ψ' étant déterminé par l'équation $it' = F(c, \psi')$.

Si $\frac{t'}{\tau}$ n'excède pas $\frac{1}{4}$, on aura d'une manière suffisamment approchée,

$$cit' = \log\tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}c\psi'),$$

ce qui servira à déterminer fort simplement ψ' par le moyen de t', et réciproquement.

On pourra donc connaître, par ces formules, aussi exactement qu'on voudra, l'angle ψ qui répond à un temps t quelconque, et on voit que cet angle augmente proportionnellement au temps, toutes les fois que t est un multiple de τ.

L'angle ψ étant connu, on connaîtra, par les formules précédentes, les quantités ω et θ qui déterminent la position de l'axe principal AL par rapport à la directrice AD, et celle du corps par rapport à son axe principal.

347. Il ne reste donc plus qu'à trouver la valeur de φ, qui fixe la position du méridien DL dans l'espace. On a pour cet effet l'équation (3), savoir,

$$d\varphi = Kdt - \frac{d\omega}{\sin\theta},$$

qui devient

$$d\varphi = \frac{\sin\mu}{\sin\mathcal{C}\cos\mathcal{C}}\left(\frac{A+B}{C-A} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}} + \frac{d\psi}{(1+\tang^2\mathcal{C}\sin^2\psi)\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}\right),$$

et dont l'intégrale est

$$\varphi = \frac{\sin\mu}{\sin\beta\cos\beta}\left[\frac{A+B}{C-A}F(c, \psi) + \Pi(\tang^2\beta, c, \psi)\right].$$

Soit Φ la valeur de φ lorsque $\psi = 90^\circ$, on aura

$$\Phi = \frac{\sin\mu}{\sin\beta\cos\beta}\left[\frac{A+B}{C-A}F'c + \Pi'(\tang^2\beta, c)\right].$$

Pour avoir la valeur de $\Pi'(\tang^2\beta, c)$, on observera que $c^2 = \frac{m-1}{2}\tang^2\beta$; ainsi en procédant comme dans l'art. 333, et faisant

$$\tang\lambda = \frac{1}{c}\tang\beta = \sqrt{\left(\frac{2}{m-1}\right)} = \sqrt{\left(\frac{C^2-B^2}{B^2-A^2}\right)},$$

on aura

$$\frac{\sin\mu}{\sin\beta\cos\beta}\Pi'(\tang^2\beta, c) = \left[\frac{c^2\cos\beta}{\sin\beta\sin\mu} + E(b, \lambda)\right]F'c$$
$$- F(b, \lambda).(F'c - E'c).$$

On connaîtra donc aussi exactement qu'on voudra la valeur de Φ. Faisant ensuite $t = 2k\pi \pm t'$, ou $\psi = 2k.\frac{1}{2}\pi \pm \psi'$, on aura

$$\varphi = 2k\Phi \pm \varphi',$$

φ' étant la valeur de φ correspondante à ψ'.

Second cas : $m\sin^2\gamma + \cos 2\alpha\cos^2\gamma > 1$.

348. Dans ce cas on voit par l'équation (1), que ω n'a plus de limites, et que le corps doit tourner sans cesse dans le même sens autour de son axe principal AL. Si l'on prend pour époque du mouvement l'instant d'une révolution où l'on a $\alpha = 90^\circ$ et $\theta = \beta$, l'équation (1) donnera

$$\cos^2\theta = \frac{(m+1)\cos^2\beta}{m + \cos 2\omega}.$$

Ainsi on ne peut avoir $\theta = 0$; c'est-à-dire que l'axe AL qui fait, au commencement du mouvement, un angle aigu $90^\circ - \beta$ avec la directrice AD, ne pourra jamais faire un angle droit avec cette directrice. Soit β' la plus petite valeur de θ, cette valeur aura lieu lorsque $\cos 2\omega = -1$; ainsi on aura

$$\cos^2\beta' = \frac{m+1}{m-1}\cos^2\beta.$$

349. Ayant fait $\alpha = 90^\circ$, les formules de l'état initial du mouvement donnent $\cot\beta = \frac{A+B}{B+C}\tang\varepsilon$, et par conséquent $DL^2 < I^2L^2$; cet état est repré-

Fig. 4. senté par la fig. 4, où l'on voit qu'à cause de $\alpha = 90°$, il faut qu'on ait aussi $L = 90°$, et qu'ainsi l'axe AN du plus petit moment se trouve en N° sur le premier méridien DL°. On voit en même temps, par la formule du n° 314, que la première valeur de $\frac{d\omega}{dt}$ est négative, et qu'ainsi ω est toujours négatif; c'est-à-dire que pendant que l'axe AL tourne autour du point D dans le sens BC, le corps tourne sans cesse autour de l'axe AL dans le sens opposé CB.

D'après cette observation, soit $\tang \omega = -h \tang \psi$, h étant une constante que nous déterminerons de manière à simplifier les formules; en faisant cette substitution on aura

$$\cos^2\theta = \frac{(m+1)\cos^2\varepsilon\,(\cos^2\psi + h^2\sin^2\psi)}{(m+1)\cos^2\psi + (m-1)\,h^2\sin^2\psi}.$$

Soit $h^2 = \frac{m+1}{m-1}$, ou $h = \frac{\cos\varepsilon'}{\cos\varepsilon}$, on aura

$$\cos^2\theta = \cos^2\varepsilon\cos^2\psi + \cos^2\varepsilon'\sin^2\psi;$$

et si l'on fait $c^2 = (h^2 - 1)\cot^2\varepsilon = \frac{2}{m-1}\cot^2\varepsilon = 1 - \frac{\sin^2\varepsilon'}{\sin^2\varepsilon}$, on aura aussi

$$\sin^2\theta = \sin^2\varepsilon\,(1 - c^2\sin^2\psi).$$

Ces équations déterminent les valeurs de ω et de θ en fonctions de ψ; sur quoi il faut observer que θ est toujours compris entre les limites ε et ε', mais que ω négatif croît continuellement avec ψ, en sorte que la différence $\psi + \omega$, déterminée par l'équation $\tang(\psi + \omega) = -\frac{(h-1)\sin 2\psi}{h+1-(h-1)\cos 2\psi}$, est toujours plus petite que 90°.

350. Il faut maintenant substituer dans l'équation (2) la valeur de ω tirée de l'équation $\tang \omega = -h \tang \psi$, et celle de $\sin\theta$ en fonction de ψ, ce qui donnera

$$K dt = \frac{(n-m)\,h}{(m+1)\sin\varepsilon} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}.$$

Or on a $K = \frac{W\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}$, et $\frac{n-m}{m+1} = \frac{A+B}{C-A}$; soit donc

$$i = W\cos\varepsilon \cdot \frac{C-A}{A+B}\sqrt{\left(\frac{m-1}{m+1}\right)} = W\cos\varepsilon\sqrt{\left(\frac{C-A}{C+A}\cdot\frac{B-A}{B+A}\right)},$$

et on aura en intégrant,

$$it = F(c, \psi).$$

Si l'on fait $\psi = 90°$, t sera le temps d'une nutation dans laquelle θ passe

de la valeur $\mathcal{C}$ à la valeur $\mathcal{C}'$, ou réciproquement; soit τ ce temps, on aura

$$\tau = \frac{1}{i} F^1 c.$$

Lorsqu'il y aura peu de différence entre les quantités C, B, A, ce qui a lieu lorsque le corps est composé de couches peu éloignées de la figure sphérique, la quantité i sera très petite, et le temps d'une nutation sera fort grand; c'est-à-dire que le mouvement de nutation sera très lent.

Si $\frac{t}{\tau}$ est un nombre entier, on aura exactement $\psi = \frac{1}{2}\pi . \frac{t}{\tau}$, et par conséquent, $\omega = -\psi = -\frac{1}{2}\pi . \frac{t}{\tau}$. On voit par conséquent que le mouvement particulier du corps autour de son axe AL, dans le cas dont nous venons de parler, sera très lent, puisqu'il ne décrit 90° que dans le temps τ, qui est celui d'une nutation; mais ce mouvement s'exécute toujours dans le même sens, c'est-à-dire en sens contraire au mouvement de l'axe AL autour du point D.

351. Il ne nous reste plus qu'à déterminer ce dernier mouvement mesuré par l'angle φ; or on a

$$d\varphi = K dt - \frac{d\omega}{\sin\theta}, \quad \frac{d\omega}{\sin\theta} = -\frac{h d\psi (1 - c^2 \sin^2\psi)^{-\frac{1}{2}}}{(\cos^2\psi + h^2 \sin^2\psi)\sin\mathcal{C}};$$

donc

$$d\varphi = \frac{A+B}{C-A} \cdot \frac{h}{\sin\mathcal{C}} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}} + \frac{h}{\sin\mathcal{C}} \cdot \frac{d\psi (1 - c^2 \sin^2\psi)^{-\frac{1}{2}}}{1 + (h^2 - 1)\sin^2\psi},$$

et en intégrant,

$$\varphi = \frac{\cos\mathcal{C}'}{\sin\mathcal{C}\cos\mathcal{C}} \left[\frac{A+B}{C-A} F(c, \psi) + \Pi(c^2 \tang^2 \mathcal{C}, c, \psi)\right].$$

Soit Φ la valeur de φ lorsque $\psi = 90°$, on aura

$$\Phi = \frac{\cos\mathcal{C}'}{\sin\mathcal{C}\cos\mathcal{C}} \left[\frac{A+B}{C-A} F^1 c + \Pi^1 (c^2 \tang^2 \mathcal{C}, c)\right].$$

Mais par la formule du n° 333, on trouve

$$\frac{\cos\mathcal{C}'}{\sin\mathcal{C}\cos\mathcal{C}} \Pi^1 (c^2 \tang^2 \mathcal{C}, c) = \left[\frac{\cos\mathcal{C}'\cos\mathcal{C}}{\sin\mathcal{C}} + E(b, \mathcal{C})\right] F^1 c$$
$$- F(b, \mathcal{C}) . (F^1 c - E^1 c).$$

D'ailleurs la quantité $\frac{\cos\mathcal{C}'}{\sin\mathcal{C}\cos\mathcal{C}} \cdot \frac{A+B}{C-A} + \frac{\cos\mathcal{C}'\cos\mathcal{C}}{\sin\mathcal{C}}$ se réduit à . . . . . $\cos\mathcal{C}' \cot(\mathcal{C} + \varepsilon - \frac{1}{2}\pi)$; donc

$$\Phi = [\cos\mathcal{C}' \cot(\mathcal{C} + \varepsilon - \tfrac{1}{2}\pi) + E(b, \mathcal{C})] F^1 c - F(b, \mathcal{C}) . (F^1 c - E^1 c).$$

352. Si $\frac{t}{\tau}$ est un entier, on aura $\varphi = \frac{t}{\tau}\Phi$; on a en même temps.....

$\psi = \frac{1}{2}\pi . \frac{t}{\tau}$; ainsi la situation du corps sera déterminée exactement au bout d'un temps quelconque t, multiple du temps τ d'une nutation; on pourra déterminer exactement cette même situation lorsque $\frac{t}{\tau}$ sera rationnelle, par les propriétés connues des fonctions elliptiques.

En général, soit $t = 2k\tau \pm t'$, k étant un entier, et $t' < t$, on aura $\psi = 2k . \frac{1}{2}\pi \pm \psi'$, et $\varphi = 2k.\Phi \pm \varphi'$, ψ' étant la même fonction de t' que ψ est de t, et φ' la même fonction de ψ' que φ est de ψ.

Au reste, si $\frac{t}{\tau}$ est une fraction plus petite que $\frac{1}{4}$, on aura, avec une exactitude suffisante,

$$cit' = l \tang (45^\circ + \tfrac{1}{2}\rho\psi');$$

ψ' étant connu, on en déduira

$$\varphi' = \frac{Wt' \cos\epsilon}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\left[\tfrac{1}{2}h \cot^2\theta\,\psi' - (1 - \tfrac{1}{2}\cot^2\theta)\,\omega'\right].$$

$$\tang \omega' = -h \tang \psi',$$

$$\sin^2\theta' = \sin^2\theta \cos^2\psi' + \sin^2\theta' \sin^2\psi',$$

ce qui détermine la position du corps au bout du temps t.

Du cas où l'axe de rotation initial est très près de l'axe du plus grand moment AL.

353. Alors l'arc ϵ est très petit; et si on rejette les puissances de ϵ supérieures à la seconde, les quantités θ et θ', qui déterminent l'étendue de la nutation de l'axe AL, seront ainsi exprimées :

$$\theta = \tfrac{1}{2}\pi - \left(\frac{A + B}{B + C}\right)\epsilon,$$

$$\theta' = \tfrac{1}{2}\pi - \left(\frac{A + B}{B + C}\right)h\epsilon;$$

de là on tire

$$\theta - \theta' = \frac{A + B}{B + C}(h - 1)\,\epsilon = \frac{C - B}{B - A} \cdot \frac{\epsilon}{h + 1}.$$

Si la différence C — B est beaucoup plus petite que B — A, ainsi que cela doit avoir lieu dans le sphéroïde terrestre, h sera très peu différent de l'unité, et on aura $\theta - \theta' = \frac{C - B}{B - A} \cdot \frac{\epsilon}{2}$; de sorte que l'arc de nutation $\theta - \theta'$

sera beaucoup plus petit que ε. Dans la même hypothèse, on aura

$$c^2 = 1 - \frac{\sin^2 \mathcal{C}'}{\sin^2 \mathcal{C}} = \frac{C-B}{C+B} \cdot \frac{B+A}{B-A} \varepsilon^2,$$

$$i = W\left(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\right) \sqrt{\left(\frac{C-A}{C+A} \cdot \frac{B-A}{B+A}\right)},$$

$$it = F(c, \psi) = \left(1 + \frac{c^2}{4}\right)\psi - \tfrac{1}{8} c^2 \sin 2\psi,$$

$$\psi = it\left(1 - \frac{c^2}{4}\right) + \frac{c^2}{8} \sin 2it.$$

354. Désignons toujours par τ le temps d'une nutation, ou celui pendant lequel le corps fait un quart de révolution autour de son axe AL, on aura

$$\tau = \frac{\frac{1}{2}\pi}{W}\left(1 + \tfrac{1}{4} c^2 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\right) \sqrt{\left(\frac{C+A}{C-A} \cdot \frac{B+A}{B-A}\right)},$$

et l'expression de ψ pour un temps quelconque t deviendra

$$\psi = \tfrac{1}{2}\pi \cdot \frac{t}{\tau} + \tfrac{1}{8} c^2 \sin \frac{\pi t}{\tau};$$

ψ étant connu, on aura θ par l'équation $\sin^2\theta = \sin^2 \mathcal{C} \cos^2 \psi + \sin^2 \mathcal{C}' \sin^2 \psi$; et comme on peut négliger le carré de $\mathcal{C} - \mathcal{C}'$, on aura avec une exactitude suffisante,

$$\theta = \mathcal{C} - (\mathcal{C} - \mathcal{C}') \sin^2 \psi.$$

Quant à l'angle ω, il est donné exactement par l'équation $\tang \omega = -h \tang \psi$, ou d'une manière approchée par la valeur

$$\omega = -\psi - \tfrac{1}{2}\left(\frac{C^2 - B^2}{B^2 - A^2}\right) \sin 2\psi,$$

si toutefois C — B est très petit par rapport à B — A.

355. Il ne reste plus qu'à déterminer φ. Pour cela nous remarquerons que la formule du n° 351 peut se réduire à

$$d\varphi = K dt + \frac{h}{\sin \mathcal{C}} \cdot \frac{d\psi\left(1 + \frac{1}{2} c^2 \sin^2 \psi\right)}{1 + (h^2 - 1)\sin^2 \psi}.$$

Or, l'équation $\tang \omega = -h \tang \psi$ donne $d\omega = -\dfrac{h d\psi}{1 + (h^2 - 1)\sin^2 \psi}$, et par conséquent, $(h^2 - 1) \int d\omega \sin^2 \psi = -h\psi - \omega$; donc

$$\int \frac{h}{\sin \mathcal{C}} \cdot \frac{d\psi\left(1 + \frac{1}{2} c^2 \sin^2 \psi\right)}{1 + (h^2 - 1)\sin^2 \psi} = \int -\frac{d\omega}{\sin \mathcal{C}}\left(1 + \tfrac{1}{2} c^2 \sin^2 \psi\right) = -\frac{\omega}{\sin \mathcal{C}} + \frac{\frac{1}{2} c^2}{h^2 - 1} \cdot \frac{h\psi + \omega}{\sin \mathcal{C}}.$$

Or on a $c^2 = (h^2 - 1)\cot^2 \mathcal{C}$; donc $\dfrac{\frac{1}{2} c^2}{h^2 - 1} \cdot \dfrac{h\psi + \omega}{\sin \mathcal{C}} = \dfrac{\frac{1}{2}\cot^2 \mathcal{C}}{\sin \mathcal{C}}(h\psi + \omega)$; d'ail-

leurs comme $\cos^2\mathcal{C}$ est une quantité très petite du second ordre, cette quantité se réduit à $\frac{1}{2}\cos^2\mathcal{C}(h\psi+\omega)$. On peut semblablement réduire $\frac{\sigma}{\sin\mathcal{C}}$ à $\omega(1+\frac{1}{2}\cos^2\mathcal{C})$; ainsi l'intégrale précédente devient $-\omega(1+\frac{1}{2}\cos^2\mathcal{C})+\frac{1}{2}\cos^2\mathcal{C}(h\psi+\omega)=-\omega+\frac{1}{2}h\psi\cos^2\mathcal{C}=-\omega+\frac{1}{2}h\cos^2\mathcal{C}.it$; donc enfin on a

$$\varphi+\omega=(K+\tfrac{1}{2}hi\cos^2\mathcal{C})\,t.$$

Ainsi l'angle $\varphi+\omega$ croît proportionnellement au temps, sans aucune inégalité sensible; d'ailleurs en substituant les valeurs de K et de i, on a

$$K+\tfrac{1}{2}hi\cos^2\mathcal{C}=W\cos\varepsilon\left(1+\tfrac{1}{2}\cos^2\mathcal{C}.\frac{C+B}{A+B}\right)=W\cos\varepsilon\left(1+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2.\frac{A+B}{B+C}\right);$$

donc enfin,

$$\varphi+\omega=Wt\left(1-\tfrac{1}{2}\varepsilon^2.\frac{C-A}{B+C}\right),$$

ce qui fait voir que l'arc $\varphi+\omega$ est décrit par un mouvement uniforme, dont la vitesse diffère très peu de la vitesse initiale W, puisqu'elle est $W\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2.\frac{C-A}{C+B}\right)$.

Si l'on appelle Φ la valeur de φ lorsque $\psi=90^\circ$, ou pendant le temps d'une nutation, on aura

$$\Phi-\tfrac{1}{2}\pi=W\tau\left(1-\tfrac{1}{2}\varepsilon^2.\frac{C-A}{B+C}\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}\pi\left(1+\tfrac{1}{4}c^2+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2.\frac{B+A}{B+C}\right)\sqrt{\left(\frac{C+A}{C-A}.\frac{B+A}{B-A}\right)}.$$

Fig. 12. 356. Voici comment, dans l'hypothèse précédente, on déterminera, au bout du temps t, la position d'un point quelconque du corps situé au commencement du mouvement sur le rayon AP° déterminé par les deux élémens $DL^\circ P^\circ=\Omega$, $L^\circ P^\circ=P$.

Ayant fait l'arc $BX=\varphi$, on aura d'abord la position du méridien DX; prenant ensuite $LX=\theta=\mathcal{C}-(\mathcal{C}-\mathcal{C}')\sin^2\psi$, on aura la position de l'axe AL; enfin si l'on fait l'angle $DLP=\Omega-\omega$, puis l'arc $LP=P$, on aura le lieu cherché du rayon AP.

Supposons, pour plus de simplicité, que $\frac{t}{\tau}$ soit un entier, on aura $\psi=\frac{1}{2}\pi.\frac{t}{\tau}$, $\omega=-\psi=-\frac{1}{2}\pi.\frac{t}{\tau}$, $\varphi=W't-\omega$, en supposant $W'=W\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2.\frac{C-A}{C+B}\right)$, $i=\frac{W\cos\varepsilon}{h}.\frac{C-A}{A+B}$, $DL=\frac{1}{2}\pi-\mathcal{C}+(\mathcal{C}-\mathcal{C}')\sin^2\psi=\frac{A+B}{B+C}\varepsilon\left(1+\frac{1}{2}.\frac{C^2-B^2}{C^2-A^2}\sin^2\psi\right)$. Connaissant DL, LP et l'angle $DLP=\Omega-\omega$, la résolution du triangle DLP

donnera les formules suivantes pour déterminer l'angle BDP $= x$ et la distance DP $= y$.

Soit $f = \frac{A+B}{B+C}\varepsilon\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{C^2-B^2}{C^2-A^2}\sin^2\psi\right)$; si l'on néglige les quantités de l'ordre ε^2, on aura

$$\begin{aligned} \text{LDP} &= \pi - \Omega - \psi - f\cot \text{P}\sin(\Omega+\psi), \\ x &= \text{W}'t + \pi - \Omega - f\cot\text{P}\sin(\Omega+\psi), \\ y &= \text{P} - f\cos(\Omega+\psi). \end{aligned}$$

On voit que y varie depuis $\text{P} - f$ jusqu'à $\text{P} + f$, et que l'angle BDP ne croît pas tout-à-fait proportionnellement au temps, puisqu'il y a dans son expression une équation ou inégalité $f\cot\text{P}\sin(\Omega+\psi)$, dont l'argument est $\Omega + \psi$. Cette équation, qui ne peut monter qu'à la petite quantité $f\cot\text{P}$, dans un sens ou dans l'autre, et qui d'ailleurs ne peut que varier très peu pendant une révolution autour de l'axe de rotation diurne, sera toujours insensible dans le mouvement de la Terre.

Troisième cas : $m\sin^2\gamma + \cos 2\alpha\cos^2\gamma = 1$.

357. Ce cas où l'on a $\sin^2\alpha = \frac{m-1}{2}\tang^2\gamma$, revient à celui de l'art. 326, et n'exige aucun nouveau développement. En effet, la figure 2 représentant l'état des choses au commencement du mouvement, suppose DLM $= \alpha$, LD $= \frac{1}{2}\pi - \gamma$. Prolongeons l'arc LD à la distance DL$' = \pi -$ DL, et soit DML$' = \alpha'$, DM $= \frac{1}{2}\pi - \gamma'$, afin que les quantités α' et γ' représentent, pour l'axe AM, des quantités analogues à α et γ pour l'axe AL. Dans le triangle sphérique DLM, où le côté LM est de 90°, on aura Fig. 2.

$$-\cos\alpha' = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma'}, \quad \cos\alpha = \frac{\sin\gamma'}{\cos\gamma};$$

donc

$$\cos^2\alpha' = \frac{\sin^2\gamma}{\cos^2\gamma'} = \frac{\sin^2\gamma}{1-\cos^2\gamma\cos^2\alpha} = \frac{\tang^2\gamma}{\tang^2\gamma + \sin^2\alpha} = \frac{2}{m+1},$$

et $\cos 2\alpha' = \frac{3-m}{m+1}$;

substituant la valeur $m = \frac{C^2+B^2-2A^2}{C^2-B^2}$, il viendra

$$\cos 2\alpha' = \frac{C^2+A^2-2B^2}{C^2-A^2};$$

c'est ce que devient l'équation $\cos 2\alpha = \frac{C^2+B^2-2A^2}{C^2-B^2}$, lorsqu'on échange

entre elles les lettres B et A, afin que l'axe AM désigne, dans le cas présent, le même axe que AL dans l'art. 327.

Recherche de l'axe de rotation et de la vitesse angulaire à chaque instant.

358. Quoique le mouvement du corps soit déterminé par ce qui précède, d'une manière complète, cependant comme les trois mouvemens de rotation, continus ou alternatifs, que nous avons considérés, peuvent, pour chaque instant, se réduire à un seul mouvement de rotation autour d'un axe variable, il sera utile de déterminer la position de cet axe et la vitesse angulaire à l'instant donné.

Fig. 7. Supposons qu'au bout du temps t l'axe de rotation rencontre la sphère au point I, et que la vitesse angulaire autour de cet axe, dans le sens BC, soit w. Faisons l'angle LDI $= \lambda$, et la distance DI $= \nu$, on trouvera comme au n° 310,

$$\frac{d\theta}{dt} = -w \sin\lambda \sin\nu,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = w \sin\nu \cdot \frac{\cos\lambda}{\cos\theta},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = w(\cos\nu - \sin\nu \tang\theta \cos\lambda).$$

Substituant ces valeurs dans les équations différentielles du n° 338, on aura les équations suivantes pour déterminer les trois quantités w, λ, ν, relatives à l'axe instantané de rotation :

$$\tang\lambda = \frac{\sin(2\omega + 2\alpha)}{\cos(2\omega + 2\alpha) - m} \cdot \frac{1}{\sin\theta},$$

$$\tang\nu = \frac{(\cos 2\alpha - m)\cos^2\gamma}{n - m - (\cos 2\alpha - m)\cos^2\gamma} \cdot \frac{\tang\theta}{\cos\lambda},$$

$$w = \frac{K}{\cos\nu}\left[1 + \left(\frac{m - \cos 2\alpha}{n - m}\right)\cos^2\gamma\right].$$

359. Par la théorie précédente on connaît, pour un temps donné, les quantités ω et θ; on connaîtra donc, par la première équation, la valeur de λ; par la seconde, celle de ν, et par la troisième, celle de la vitesse angulaire w. Ainsi l'axe de rotation et la vitesse angulaire sont déterminés à chaque instant.

La troisième équation offre ce théorème remarquable, que *la vitesse angulaire est toujours réciproquement proportionnelle au cosinus de la distance de l'axe de rotation à la directrice.* Il s'ensuit que ce cosinus n'est jamais

zéro, et qu'ainsi l'axe de rotation qui, au commencement du mouvement, fait un angle aigu avec la directrice, fera perpétuellement un angle aigu avec elle, et ne s'en écartera plus ou moins que par un mouvement de nutation qu'il est facile de déterminer.

Cette propriété, au reste, confirme ce que nous avons déjà dit, n° 311, sur l'invariabilité de la directrice, quel que soit celui des trois axes principaux dont on se sert pour déterminer le mouvement du corps.

Nous observerons enfin que les valeurs de λ, ν, ω sont indépendantes de φ, et peuvent par conséquent se déterminer par les seules fonctions elliptiques de la première espèce.

360. Si du point I on mène l'arc IQ perpendiculaire au méridien mobile DX, la position du point I pourra être déterminée assez simplement par les coordonnées $DQ = x$, $QI = y$; or on a

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} \nu \cos \lambda,\ \sin y = \sin \nu \sin \lambda,\ \cos y = \frac{\cos \nu}{\cos x},\ \operatorname{tang} y = \sin x \operatorname{tang} \lambda;$$

ainsi les valeurs de x et de y seront données immédiatement par les équations

$$\operatorname{tang} x = f \operatorname{tang} \theta, \qquad f = \frac{(\cos 2\alpha - m) \cos^2 \gamma}{n - m + (m - \cos 2\alpha) \cos^2 \gamma},$$

$$\operatorname{tang} y = \frac{\sin x}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin (2\omega + 2\alpha)}{\cos (2\omega + 2\alpha) - m}.$$

Comme les valeurs de ω et de θ reviennent toujours les mêmes après deux nutations de l'axe AL, il s'ensuit que dans cet intervalle de temps, le point I, extrémité de l'axe de rotation, décrit, relativement au méridien mobile DL, une ovale, ou en général une courbe rentrante, et revient au point d'où il est parti. Nous examinerons plus particulièrement la figure de cette ovale dans les différens cas généraux qui ont été traités jusqu'ici.

361. Lorsque le mouvement de l'axe AL est tel que les valeurs de θ sont alternativement positives et négatives, la nutation de cet axe s'étendant depuis $\theta = \mathcal{C}$ jusqu'à $\theta = -\mathcal{C}$, alors on voit par l'équation $\operatorname{tang} x = f \operatorname{tang} \theta$, où f est un coefficient constant, que la valeur de x sera aussi alternativement positive et négative; de sorte que les limites de x seront $+a'$ et $-a'$. Dans le même cas, on verra que les limites de y sont $+b'$ et $-b'$; d'où il suit que le point I, considéré relativement au méridien mobile DL, décrira une espèce d'ellipse dont D est le centre, et qui aura deux diamètres, l'un $2a'$, dirigé suivant le méridien, l'autre $2b'$, perpendiculaire au méridien.

362. Considérons, par exemple, le premier des deux cas qui peuvent

avoir lieu lorsque AL est l'axe moyen; alors on a (art. 319) $\alpha = 0$, $\gamma = \epsilon$, $\sin^2\mu = \frac{1-m}{2}\sin^2\epsilon$, ce qui donne

$$f = \frac{(1-m)\cos^2\epsilon}{n-m-(1-m)\cos^2\epsilon} = \frac{(A-B)\cos^2\epsilon}{A+C-(A-B)\cos^2\epsilon}.$$

Soit a' la valeur de x qui répond à $\theta = \epsilon$, on aura

$$\tang a' = f\tang\epsilon = \frac{(A-B)\sin\epsilon\cos\epsilon}{A+C-(A-B)\cos^2\epsilon}.$$

Soit b' la valeur de y qui répond à $\theta = 0$, on aura

$$\tang b' = \frac{f\sin 2\mu}{\cos 2\mu - m} = \frac{f\tang^2\epsilon}{\tang\mu} = \frac{\tang a'\tang\epsilon}{\tang\mu};$$

donc $\frac{\tang b'}{\tang a'} = \frac{\tang\epsilon}{\tang\mu}$; or on a $\mu < \epsilon$; donc $a' < b'$.

Fig. 8. Dans ce premier cas, l'axe de rotation AI, considéré toujours par rapport au méridien DL, comme si celui-ci était fixe, décrit, dans le sens I^0 I^1 ou BC, un quart de son orbite, pendant le temps τ d'une demi-oscillation, ou pendant que l'axe AL passe de L^0 à L^1 ou B. Il continue son mouvement dans le même sens pendant les trois demi-oscillations suivantes; de sorte qu'après le temps 4τ, qui est celui de deux oscillations ou de deux nutations, l'axe a parcouru son orbite entière, et se retrouve au point I^0, d'où il était parti.

Pendant ce mouvement, la vitesse angulaire, qui est toujours comme $\frac{1}{\cos\,}$, ne varie qu'entre les limites W et $\frac{W\cos a'}{\cos b'}$; la première a lieu aux points du méridien I^0, I^2; la seconde aux points I^1, I^3, qui en sont les plus éloignés; d'ailleurs puisqu'on a $a' < b'$, on voit que la vitesse hors du méridien est toujours plus grande que la vitesse dans le méridien.

365. Dans le second cas du mouvement de l'axe moyen (art. 323), on a $\alpha = 90^\circ$, $\gamma = \epsilon$, $\sin^2\mu = \frac{1+m}{2}\sin^2\epsilon$, ce qui donne

$$\tang x = f\tang\theta,\quad f = -\frac{(C-A)\cos^2\epsilon}{A+B+(C-A)\cos^2\epsilon},$$

$$\tang y = \frac{\sin x}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin 2\omega}{m+\cos 2\omega} = -\frac{\sin x}{\sin\theta}\cdot\frac{C^2-B^2}{C^2-A^2}\cdot\frac{\tang\mu\sin\psi}{1-c^2\sin^2\psi}.$$

Dans ce cas, comme dans le précédent, on suppose $C > A > B$; ainsi f est négative, et par conséquent la première valeur de x, lorsque $t = 0$, est aussi négative : faisant alors $x = -a'$, on a $\tang a' = -f\tang\epsilon = \ldots$

$\frac{(C-A)\sin\mathcal{C}\cos\mathcal{C}}{A+B+(C-A)\cos^2\mathcal{C}}$. En effet, nous savions déjà, par l'état initial du mouvement, que le point D doit se trouver entre I° et L°. Ayant fait d'ailleurs Fig. 9.
L° I° $=\epsilon$, DL° $=\frac{1}{2}\pi-\mathcal{C}$, et ayant trouvé $\cot\mathcal{C}=\frac{A+B}{B+C}\operatorname{tang}\epsilon$, on a DI° ou $a'=\epsilon-(\frac{1}{2}\pi-\mathcal{C})$, et par conséquent $\operatorname{tang}a'=\frac{\operatorname{tang}\epsilon-\cot\mathcal{C}}{1+\operatorname{tang}\epsilon\cot\mathcal{C}}$; ce qui, en substituant la valeur de tang ϵ en cot $\mathcal{C}$, revient à la valeur précédente.

Les valeurs $x=-a'$, $y=0$ répondent à $t=0$ ou $\psi=0$. Soit maintenant $t=\tau$ ou $\psi=90°$, on aura $\theta=0$ et $x=0$; ensuite si l'on fait $y=b'$, on aura

$$\operatorname{tang}b'=-f.\frac{C^2-B^2}{C^2-A^2}.\frac{\operatorname{tang}\mu}{1-c^2}=-f.\frac{C^2-B^2}{C^2-A^2}.\frac{\operatorname{tang}\mu\cos^2\mu}{\cos^2\mathcal{C}}=-\frac{f\operatorname{tang}^2\mathcal{C}}{\operatorname{tang}\mu},$$

ce qui donne encore $\frac{\operatorname{tang}b'}{\operatorname{tang}a'}=\frac{\operatorname{tang}\mathcal{C}}{\operatorname{tang}\mu}$; et comme on a $\mathcal{C}>\mu$, il s'ensuit $b'>a'$: de sorte que l'ovale décrite par le point I autour du centre D, a, comme dans le premier cas, son grand diamètre perpendiculaire au méridien.

Il résulte de ces formules, que l'axe de rotation passe de I° en I¹, c'est-à-dire décrit le quart de son orbite dans le temps τ d'une demi-oscillation: il continue ainsi dans les trois demi-oscillations suivantes, et son orbite entière est parcourue dans le temps 4τ, qui est celui de deux oscillations ou de deux nutations. Ce mouvement qui a toujours lieu dans le même sens, c'est-à-dire dans le sens CB, se renouvelle de la même manière dans les périodes suivantes, et ainsi à l'infini.

On fera d'ailleurs la même remarque que dans l'article précédent, sur la variation de la vitesse angulaire. Elle est la plus petite $=$ W sur le méridien en I° et I², et la plus grande en I¹ et I³, lorsque le point I est le plus éloigné du méridien, où sa valeur est $W\frac{\cos a'}{\cos b'}$.

Tels sont les mouvemens que l'axe de rotation AI exécute par rapport au méridien où se trouve l'axe moyen AL, dans les deux cas qui peuvent avoir lieu, selon que l'axe AM ou l'axe AN est au commencement du mouvement dans le même méridien que l'axe AL avec l'axe de rotation primitif AI°.

364. Si m est positif et plus grand que l'unité, ce qui a lieu, comme nous l'avons vu, dans l'hypothèse $C>B>A$, où AL est l'axe du plus grand moment, et AM l'axe moyen, il faut distinguer, comme ci-dessus, deux cas qui donnent lieu à des mouvemens très différens.

Premier cas. Si la position initiale de l'axe de rotation est telle que le

corps ne puisse faire que des oscillations autour de l'axe AL, alors on trouvera des résultats analogues aux précédens, mais avec des différences qui méritent d'être remarquées.

Il faudra, dans ce cas, faire $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\gamma = \mathcal{C}$, $\sin^2\mu = \frac{m+1}{2}\sin^2\mathcal{C}$, ce qui donnera

$$\operatorname{tang} x = f \operatorname{tang}\theta, \quad f = -\frac{(C-A)\cos^2\mathcal{C}}{A+B+(C-A)\cos^2\mathcal{C}},$$

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\sin x}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{m+\cos 2\alpha} = f\cdot\frac{\cos x}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{m+\cos 2\alpha}.$$

Mais par les formules du n° 345, on a

$$\frac{\sin 2\alpha}{m+\cos 2\alpha} = -\frac{2\sin\mu}{(m+1)\cos\mathcal{C}}\cdot\sin\psi\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)};$$

donc

$$\operatorname{tang}\gamma = -\frac{2f\sin\mu}{(m+1)\cos\mathcal{C}}\cdot\frac{\cos x}{\cos\theta}\cdot\sin\psi\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}.$$

Au commencement du mouvement où $t=0$ et $\psi=0$, on aura $\gamma=0$; et si l'on fait $x=-a'$, on aura

$$\operatorname{tang} a' = -f\operatorname{tang}\mathcal{C} = \frac{(C-A)\sin\mathcal{C}\cos\mathcal{C}}{A+B+(C-A)\cos^2\mathcal{C}},$$

ce qui s'accorde avec la valeur donnée immédiatement par l'état initial du mouvement $a' = \varepsilon - (\frac{1}{2}\pi - \mathcal{C}_1)$, où l'on a $\cot\mathcal{C} = \frac{A+B}{B+C}\operatorname{tang}\varepsilon$.

Pour avoir la position de l'axe de rotation au bout du temps τ, qui est celui d'une demi-oscillation; on fera $\psi = \frac{1}{2}\pi$, $\theta = 0$, ce qui donnera $x=0$; et si l'on fait $y = b'$, on aura

$$\operatorname{tang} b' = -\frac{f\sin\mu}{(m+1)\cos\mathcal{C}}\cdot\frac{\cos\mu}{\cos\mathcal{C}} = -\frac{f\operatorname{tang}^2\mathcal{C}}{\operatorname{tang}\mu};$$

d'où résulte encore $\frac{\operatorname{tang} b'}{\operatorname{tang} a'} = \frac{\operatorname{tang}\mathcal{C}}{\operatorname{tang}\mu}$; mais comme dans ce cas $\mathcal{C} < \mu$, il s'ensuit qu'on a $b' < a'$.

On voit par là que pendant le temps τ d'une demi-oscillation, l'axe de rotation décrit un quart de son orbite en passant de I° en I'; il continue ce mouvement dans le même sens pendant les trois autres demi-oscillations; de sorte que dans le temps 4τ, qui est celui de deux oscillations ou de deux nutations, l'axe de rotation parcourt son orbite entière, et les choses sont rétablies dans le même état qu'au commencement du mouvement. Fig. 10.

L'ovale décrite par l'axe de rotation a pour centre le point D, comme cela a lieu dans les mouvemens rapportés à l'axe moyen; mais il y a cette

différence dans le cas présent, que l'ovale est alongée dans le sens du méridien, puisqu'on a trouvé $b' < a'$, tandis que dans les deux cas qui sont relatifs à l'axe moyen, on a $b' > a'$.

Dans ce cas donc la plus grande vitesse W aura lieu dans le méridien, lorsque l'axe de rotation répondra aux points I^0 et I^2, et la plus petite $\frac{W \cos a'}{\cos b'}$ aura lieu aux points I^1 et I^3, les plus éloignés du méridien.

365. *Second cas.* Si l'état initial du corps est tel qu'il doive tourner sans cesse autour de l'axe AL, cet axe ne peut plus s'éloigner de 90° de la directrice AD, et sa nutation est limitée depuis $\theta = \mathcal{C}$ jusqu'à $\theta = \mathcal{C}'$, valeurs entre lesquelles on a cette relation :

$$\cos^2 \mathcal{C}' = \frac{m+1}{m-1} \cos^2 \mathcal{C} = \frac{C^2 - A^2}{B^2 - A^2} \cos^2 \mathcal{C};$$

de sorte que, pour que ce second cas ait lieu, il faut qu'on ait..... $\cos \mathcal{C} < \sqrt{\left(\frac{B^2 - A^2}{C^2 - A^2}\right)}$, ou $\sin \mathcal{C} > \sqrt{\left(\frac{C^2 - B^2}{C^2 - A^2}\right)}$. Soit alors $c^2 = \frac{2}{m-1} \cot^2 \mathcal{C}$, ou $c^2 = 1 - \frac{\sin^2 \mathcal{C}'}{\sin^2 \mathcal{C}}$, les équations qui servent à déterminer ω et θ par le moyen de la variable ψ, sont

$$\tang \omega = -h \tang \psi, \qquad h = \frac{\cos \mathcal{C}'}{\cos \mathcal{C}} = \sqrt{\left(\frac{m+1}{m-1}\right)},$$
$$\sin \theta = \sin \mathcal{C} \sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}.$$

Pour avoir maintenant les coordonnées x et y qui déterminent la position de l'axe de rotation à un instant quelconque, on fera, comme dans l'art. 349, $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\gamma = \mathcal{C}$, et les formules du n° 360, combinées avec les précédentes, donneront

$$\tang x = f \tang \theta, \qquad f = -\frac{(C-A)\cos^2 \mathcal{C}}{A + B + (C-A)\cos^2 \mathcal{C}},$$
$$\tang y = \frac{\sin x}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin 2\omega}{m + \cos 2\omega} = -\frac{2h \sin \psi \cos \psi}{m+1} : \frac{\sin x}{\sin \theta}.$$

Comme θ est toujours positive, on voit que x est toujours négative, et qu'ainsi l'ovale décrite par l'axe de rotation est tout entière d'un même côté du pôle D; en quoi ce cas diffère de tous les précédens, où le point D était le centre de l'ovale décrite par l'axe de rotation.

Les limites de θ, savoir, $\theta = \mathcal{C}$ et $\theta = \mathcal{C}'$, ont lieu, la première lorsque $t = 0$ et $\psi = 0$, la seconde lorsque $t = \tau$ et $\psi = \frac{1}{2}\pi$. Soient dans ces deux mêmes points, $x = -a'$ et $x = -a''$, les limites de x; on aura

$$\tang a' = -f \tang \mathcal{C} \quad \text{et} \quad \tang a'' = -f \tang \mathcal{C}';$$

on a $\beta > \beta'$, on aura donc aussi $a' > a''$. Dans ces deux points, $\gamma = 0$; d'ailleurs en faisant $\psi < \frac{1}{2}\pi$, on voit que tang γ est positive. Donc, pendant le temps τ que l'axe AL emploie à parcourir son arc de nutation de L^0 en L^1, l'axe de rotation parcourt la moitié de son ovale $I^0 u I^1$ dans le sens CB.

Fig. 11.

Lorsque l'axe AL reviendra de L^1 à L^0, l'axe de rotation parcourra l'autre moitié de son ovale, et reviendra au point I^0 en même temps que l'axe AL au point L^0, et ainsi à l'infini.

Ainsi, pendant que l'axe de rotation fait une révolution entière dans son orbite, l'axe du plus grand moment AL parcourt deux arcs de nutation qui le ramènent au point d'où il était parti, et le corps fait une demi-révolution autour de l'axe AL.

La vitesse angulaire la plus grande sera W au point I^0, et la plus petite sera $\frac{W \cos a'}{\cos a''}$ au point I^1.

366. Si l'on suppose ε infiniment petit, comme dans l'art. 353, les points I^0 et I^1, qui sont les extrémités du diamètre de l'ovale dans le sens du méridien, seront déterminés par les valeurs

$$a' = \frac{C - A}{B + C}\varepsilon,$$

$$a'' = a' \sqrt{\left(\frac{B^2 - A^2}{C^2 - A^2}\right)}.$$

Si l'on suppose $C - B$ beaucoup plus petit que $C - A$, en sorte qu'on ait $C^2 - B^2 = \delta(C^2 - A^2)$, δ étant très petit, on aura

$$\beta - \beta' = \tfrac{1}{2}\varepsilon . \frac{C - B}{B - A},$$

$$\text{et} \quad a' - a'' = \frac{C - A}{B + C} . \tfrac{1}{2}\delta\varepsilon = \tfrac{1}{2}\varepsilon . \frac{C - B}{C + A};$$

donc $a' - a''$ est encore beaucoup plus petit que l'arc de nutation $\beta - \beta'$, puisqu'on a

$$a' - a'' = \frac{B - A}{C + A}(\beta - \beta');$$

$a' - a''$ est l'axe de l'ovale dirigée dans le sens du méridien. Pour avoir l'autre axe perpendiculaire au méridien, il faut chercher la valeur de γ lorsque $\psi = 45°$, et on aura

$$\gamma = \frac{C - B}{C + A} . \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Cette valeur de γ est égale à $a' - a''$. Donc, dans l'ovale décrite par l'axe

de rotation, l'axe perpendiculaire au méridien est double de l'axe dirigé dans le sens du méridien.

La vitesse angulaire est la plus grande au point I°, où elle est égale à la vitesse initiale W; elle est la plus petite au point I¹, où elle est $W\frac{\cos a'}{\cos a''} = W[1 - \frac{1}{2}(a'^2 - a''^2)]$, c'est-à-dire

$$W\left(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cdot \frac{C-B}{C+B} \cdot \frac{C-A}{C+A}\right).$$

Mais la différence de ces deux vitesses est un infiniment petit qu'on peut regarder comme fort au-dessous du second ordre.

Remarque sur le mouvement de l'axe de la Terre.

367. Comme il est infiniment probable que l'axe de rotation primitif de la Terre n'a pas coïncidé exactement avec un axe principal, ou du moins que ces deux axes se sont séparés par quelque variation arrivée à la surface ou dans l'intérieur du globe, il est à présumer que les inégalités qu'on vient de calculer ont lieu effectivement dans le mouvement de rotation de la Terre. Mais comme elles sont extrêmement peu sensibles, et que la quantité ε, beaucoup plus grande que a', ne peut monter tout au plus qu'à quelques secondes, ce n'est que par une longue suite d'observations très délicates qu'on pourra s'assurer de leur existence.

Soit D le point fixe du ciel, très voisin du pôle mobile autour duquel la Terre paraît tourner à peu près dans un jour, la distance de ces deux points étant tellement petite qu'elle ne pourra jamais devenir sensible par l'observation. Soit L l'extrémité de l'axe principal de la Terre, voisin du pôle, de manière que la distance DL, ou $\frac{A+C}{B+C}\varepsilon$ n'est peut-être pas insensible; on peut au moins la regarder comme constante, et négliger la nutation $\mathcal{E} - \mathcal{E}'$. Soit P le zénith d'un lieu de la Terre qui ne soit pas fort près de L; soit la constante $LP = p$, et l'angle variable $DLP = \Omega - \omega$, on aura $DP = p - \frac{A+C}{B+C}\varepsilon\cos(\Omega - \omega)$. D'où il suit que la distance du zénith au pôle variera pour un lieu quelconque, depuis $p - \frac{A+C}{B+C}\varepsilon$ jusqu'à $p + \frac{A+C}{B+C}\varepsilon$. Donc si, par des observations exactes de la hauteur du pôle, dégagées de la réfraction, de l'aberration et des nutations dues aux causes externes, on trouve que cette hauteur n'est pas constante, ce sera une preuve Fig. 12.

qu'il y a un mouvement naturel dans l'axe terrestre; mouvement dont la cause est dans la Terre même, et qui doit être distinguée de la nutation causée par l'action de la Lune et des planètes. C'est peut-être par ce mouvement qu'on pourrait expliquer la petite différence que des observateurs exacts ont trouvée entre l'obliquité de l'écliptique, déduite des solstices d'hiver, et l'obliquité déduite des solstices d'été.

On peut remarquer que depuis la plus grande jusqu'à la plus petite hauteur du pôle pour un lieu quelconque, la Terre fait une demi-révolution autour de son axe principal. Le nombre de jours écoulés dans cet intervalle est donc, d'après nos formules, $\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{B+A}{B-A}\cdot\frac{C+A}{C-A}\right)}$, ou $\frac{1}{2}\cdot\frac{C+A}{C-A}$, si l'on admet, ce qui est fort vraisemblable, que C diffère beaucoup moins de B que de A. D'un autre côté, il paraît, par le phénomène de la précession des équinoxes, que la valeur de $\frac{C}{A}$ est comprise entre $\frac{302}{300}$ et $\frac{322}{320}$; donc le temps dont il s'agit est d'environ 150 ou 160 jours. Ces résultats auraient encore lieu, quand même on aurait exactement $B=C$, ce qui est le cas de l'art. 313.

Remarque générale.

368. Quelles que soient la figure et la constitution intérieure d'un corps solide qui peut librement tourner dans tous les sens autour d'un point fixe, et qui n'est soumis à l'action d'aucune force accélératrice, le mouvement de ce corps peut toujours être assimilé à celui d'un ellipsoïde homogène de même masse, dont les demi-axes principaux a', b', c', dirigés dans le même sens que les axes principaux du corps proposé, ont les mêmes momens d'inertie, et qui aurait reçu la même vitesse initiale, dans le même sens et autour du même axe de rotation.

En effet, les seuls élémens qui, dans la théorie précédente, dépendent de la figure du corps et de la loi que suit la densité de ses différentes molécules, sont les quantités A, B, C, par lesquelles se forment les momens d'inertie du corps relativement aux trois axes principaux. Donc si ces quantités sont égales dans deux corps, et si l'impulsion primitive est la même, ces deux corps auront nécessairement la même position et les mêmes vitesses au bout d'un temps quelconque.

SECTION II.

Du mouvement d'un corps attiré vers deux centres fixes.

369. Nous supposerons d'abord que la vitesse initiale du corps est dirigée toute entière dans un plan qui passe par les deux centres fixes, et qu'ainsi le corps est assujetti à se mouvoir dans ce plan. Cela posé, nous suivrons l'analyse qu'Euler a donnée le premier de ce problème, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, ann. 1760. Nous donnerons ensuite les développemens que fournit la théorie des fonctions elliptiques pour en compléter la solution.

Analyse du problème.

370. Soient F et G les centres vers lesquels sont dirigées les deux forces attractives; soient A et B les intensités de ces forces, mesurées à l'unité de distance; M le lieu du corps au bout du temps t. Ayant abaissé MP perpendiculaire sur l'axe EFG, nous ferons Fig. 13.

$$FG = a,\ GP = x,\ PM = y,\ FM = r,\ GM = s,$$
$$\text{l'angle } EFM = \varphi,\quad \text{l'angle } EGM = \omega,$$

ce qui donnera

$$x - a = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi = s\sin\omega,\ x = s\cos\omega.$$

Au point M le corps est sollicité par la force $\frac{A}{r^2}$ dirigée suivant MF, et par la force $\frac{B}{s^2}$ dirigée suivant MG; donc, en supposant dt constant, les équations différentielles du mouvement seront

$$\frac{ddx}{dt^2} = -\frac{A(x-a)}{r^3} - \frac{Bx}{s^3},$$
$$\frac{ddy}{dt^2} = -\frac{Ay}{r^3} - \frac{By}{s^3}.$$

Multipliant la première par dx, la seconde par dy; ajoutant les produits,

et intégrant, on aura

$$(1)\qquad \frac{dx^2+dy^2}{2dt^2}=\frac{A}{r}+\frac{B}{s}+\frac{C}{a},$$

équation qui, après avoir déterminé la constante C, donnera la vitesse du corps en chaque point de son orbite. Il en résulte que si le corps passe deux fois par le même point, il aura la même vitesse en ce point, mais avec une direction qui pourra être différente ou même opposée. On voit aussi que la vitesse sera la même dans deux points de l'orbite qui seraient semblablement situés au-dessus et au-dessous de l'axe FG.

371. Pour obtenir une seconde intégrale, considérons les aires élémentaires

$$d\alpha=(x-a)\,dy-ydx=r^2d\varphi,$$
$$d\mathcal{C}=xdy-ydx=s^2d\omega,$$

dont les différentielles sont

$$dd\alpha=(x-a)\,ddy-yddx,$$
$$dd\mathcal{C}=xddy-yddx.$$

Si dans ces expressions on met pour ddx et ddy leurs valeurs données par les équations du mouvement, on aura

$$\frac{dd\alpha}{dt^2}=\frac{Bay}{s^3},\quad \frac{dd\mathcal{C}}{dt^2}=-\frac{Aay}{r^3},$$

donc

$$\frac{d\alpha ddC+dCdd\alpha}{dt^2}=\frac{aBydC}{s^3}-\frac{aAyd\alpha}{r^3}.$$

Mais on a $ydC=s^2d\omega\sin\omega$ et $yd\alpha=r^2d\varphi\sin\varphi$; donc

$$\frac{d\alpha ddC+dCdd\alpha}{adt^2}=Bd\omega\sin\omega-Ad\varphi\sin\varphi.$$

Cette équation est intégrable immédiatement, et son intégrale est

$$\frac{d\alpha dC}{adt^2}=A\cos\varphi-B\cos\omega+C',$$

ou, en substituant les valeurs de $d\alpha$ et dC,

$$(2)\qquad \frac{r^2s^2d\varphi d\omega}{adt^2}=A\cos\varphi-B\cos\omega+C'.$$

Au moyen de ces deux intégrales, le problème peut être réduit aux quadratures.

372. En effet, soient p et q deux nouvelles variables, telles qu'on ait $\tang\frac{1}{2}\omega=pq$, $\tang\frac{1}{2}\varphi=\frac{q}{p}$, ce qui donnera

$$\sin\varphi = \frac{2pq}{p^2+q^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2},$$
$$\sin\omega = \frac{2pq}{1+p^2q^2}, \qquad \cos\omega = \frac{1-p^2q^2}{1+p^2q^2};$$

dans le triangle FMG on aura

$$r = \frac{a\sin\omega}{\sin(\varphi-\omega)} = \frac{a(p^2+q^2)}{(1-p^2)(1+q^2)} = \frac{a}{1-p^2} - \frac{a}{1+q^2},$$
$$s = \frac{a\sin\varphi}{\sin(\varphi-\omega)} = \frac{a(1+p^2q^2)}{(1-p^2)(1+q^2)} = \frac{a}{1-p^2} - \frac{aq^2}{1+q^2}.$$

Par ces valeurs on trouve

$$dx^2+dy^2 = dr^2+r^2d\varphi^2 = \frac{(p^2+q^2)(1+p^2q^2)}{(1-p^2)^2(1+q^2)^2}\left(\frac{4a^2dp^2}{(1-p^2)^2}+\frac{4a^2dq^2}{(1+q^2)^2}\right),$$
$$r^2s^2d\varphi d\omega = \frac{4a^4(p^2+q^2)(1+p^2q^2)(p^2dq^2-q^2dp^2)}{(1-p^2)^4(1+q^2)^4};$$

mais par les équations (1) et (2) on a

$$\frac{r^2s^2d\varphi d\omega}{dx^2+dy^2} = \frac{\frac{1}{2}a(A\cos\varphi - B\cos\omega + C')}{\frac{A}{r}+\frac{B}{s}+\frac{C}{a}}.$$

Donc si l'on exprime toutes ces quantités en fonctions de p et q, on aura, entre ces deux dernières variables, l'équation

$$\frac{p^2dq^2-q^2dp^2}{(1+q^2)^2dp^2+(1-p^2)^2dq^2} = \frac{\frac{1}{2}A.\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} - \frac{1}{2}B.\frac{1-p^2q^2}{1+p^2q^2} + \frac{1}{2}C'}{A.\frac{(1-p^2)(1+q^2)}{p^2+q^2} + B.\frac{(1-p^2)(1+q^2)}{1+p^2q^2} + C},$$

qui se réduit à

$$dp^2\left[\left(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}B\right)(1-q^4)+Cq^2+\tfrac{1}{2}C'(1+q^2)^2\right]$$
$$= dq^2\left[\left(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B\right)(1-p^4)+Cp^2-\tfrac{1}{2}C'(1-p^2)^2\right].$$

Soit donc

$$P = \left(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B\right)(1-p^4)+Cp^2-\tfrac{1}{2}C'(1-p^2)^2,$$
$$Q = \left(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}B\right)(1-q^4)+Cq^2+\tfrac{1}{2}C'(1+q^2)^2,$$

et on aura l'équation différentielle séparée

$$(3) \qquad \pm\frac{dp}{\sqrt{P}} = \frac{dq}{\sqrt{Q}},$$

laquelle suffit pour déterminer la courbe décrite. Quant au signe ambigu du premier membre, on verra bientôt comment il se détermine d'après l'état initial du mouvement.

373. Il reste à trouver la valeur de dt. Pour cela soit $M = \frac{Aa}{r}+\frac{Ba}{s}+C$ et $N = \frac{1}{2}A\cos\varphi - \frac{1}{2}B\cos\omega + \frac{1}{2}C'$, afin qu'on ait, comme dans l'article précédent,

$$\frac{p^2dq^2 - q^2dp^2}{(1+q^2)^2dp^2 + (1-p^2)^2dq^2} = \frac{N}{M}.$$

Cette équation, d'où l'on a déduit $Qdp^2 = Pdq^2$, donne

$$P = Mp^2 - N(1-p^2)^2,$$
$$Q = Mq^2 + N(1+q^2)^2,$$
$$p^2Q - q^2P = N(p^2+q^2)(1+p^2q^2).$$

Soit $dp^2 = PdR^2$, on aura $dq^2 = QdR^2$, et par conséquent

$$p^2dq^2 - q^2dp^2 = (p^2Q - q^2P)\,dR^2 = NdR^2(p^2+q^2)(1+p^2q^2).$$

Or on a par l'équation (2),

$$r^2s^2d\varphi d\omega = 2aNdt^2 = \frac{4a^4(p^2dq^2 - q^2dp^2)(p^2+q^2)(1+p^2q^2)}{(1-p^2)^4(1+q^2)^4};$$

donc

$$dt^2 = \frac{2a^3dR^2(p^2+q^2)^2(1+p^2q^2)^2}{(1-p^2)^4(1+q^2)^4},$$

et par conséquent,

$$\frac{dt}{a\sqrt{2a}} = \frac{(p^2+q^2)(1+p^2q^2)}{(1-p^2)^2(1+q^2)^2}dR = \frac{p^2dR}{(1-p^2)^2} + \frac{q^2dR}{(1+q^2)^2}.$$

Mais $dR = \pm\frac{dp}{\sqrt{P}} = \frac{dq}{\sqrt{Q}}$; donc on a enfin

$$(4) \qquad \frac{dt}{a\sqrt{(2a)}} = \pm\frac{p^2}{(1-p^2)^2}\cdot\frac{dp}{\sqrt{P}} + \frac{q^2}{(1+q^2)^2}\cdot\frac{dq}{\sqrt{Q}}.$$

Cette formule, ainsi que la formule (3), est écrite dans la supposition que $\frac{dq}{dt}$ est positif, au moins dans les premiers instans du mouvement; car il faut que ses deux termes soient tous deux positifs, puisqu'ils résultent du produit de dR, qu'on doit regarder comme positif par la somme des deux quarrés $\frac{p^2}{(1-p^2)^2} + \frac{q^2}{(1+q^2)^2}$.

On voit par ce résultat que la valeur de t, qui correspond à des valeurs données de p et q, dépend en général des fonctions elliptiques de la troisième espèce, lesquelles peuvent, dans beaucoup de cas, être réduites aux fonctions de la première et de la seconde espèce. D'ailleurs l'équation (3), qui ne dépend que des fonctions elliptiques de la première espèce, donne la relation entre p et q, nécessaire pour déterminer la courbe décrite.

Fig. 13. 374. Il faut maintenant déterminer les constantes G et G'. Pour cela nous supposerons que le mouvement commence en un point A de l'axe,

situé sur le prolongement de FG du côté de F, et faisant $\frac{FA}{GA} = m^0$, on aura $FA = \frac{am^0}{1-m^0}$, $GA = \frac{a}{1-m^0}$. Cela posé, soit V la vitesse initiale suivant la tangente AH, et soit l'angle EAH $= \mu$; il faudra qu'on ait à la fois $t = 0$, $\varphi = 0$, $\omega = 0$, $r = \frac{am^0}{1-m^0}$, $s = \frac{a}{1-m^0}$, $\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = V^2$, $\frac{rd\varphi}{dt} = \frac{sd\omega}{dt} = V\sin\mu$; de plus, en vertu des valeurs de r et de s, on aura en même temps $p^2 = m^0$ et $q = 0$. Substituant donc toutes ces valeurs dans les équations (1) et (2), on en déduira

$$C = \tfrac{1}{2}aV^2 - \left(\frac{A}{m^0} + B\right)(1 - m^0),$$

$$C' = \frac{am^0V^2\sin^2\mu}{(1-m^0)^2} - A + B,$$

et on remarquera que la supposition faite sur la situation du premier point A satisfait à la condition que $\frac{dq}{dt}$ soit positif.

375. Pour déterminer le signe ambigu des équations (3) et (4), j'observe qu'on a en général (art. 372) $r + s = \frac{a(1+p^2)}{1-p^2}$, d'où il suit que l'équation $p^2 = m^0$ appartient à l'ellipse dont A est le sommet, F et G les deux foyers. Or, dans le temps dt, le corps décrit, suivant la tangente AH, l'espace $Ax = Vdt$, faisant avec l'axe un angle EAH $= \mu$, et on voit que le point x sera situé dans l'ellipse ou hors de l'ellipse, selon que $\cos\mu$ sera négatif ou positif; donc en général $\frac{dp}{dt}$ aura le même signe que $\cos\mu$; c'est-à-dire que dans les équations (3) et (4) on devra prendre $\frac{dp}{\sqrt{P}}$ avec le signe + si $\cos\mu$ est positif, et avec le signe — si $\cos\mu$ est négatif.

Pour savoir quel est le signe qui doit avoir lieu, lorsqu'on a $\cos\mu = 0$ ou $\mu = \frac{1}{2}\pi$, il faut observer qu'alors P aura pour facteur $p^2 - m^0$, de sorte qu'en faisant, pour abréger, $D = \frac{\frac{1}{2}m^0aV^2}{(1-m^0)^2}$, on aura

$$P = (p^2 - m^0)\left[\frac{D-A}{m^0} - (D+B)p^2\right].$$

Soit, dans un temps très petit θ, $p^2 = m^0(1+\zeta)$, ζ étant une quantité très petite de l'ordre θ, on aura $P = \zeta[D(1-m^{02}) - A - Bm^{02}]$. Ainsi, en général, ζ sera du même signe que $D(1-m^{02}) - A - Bm^{02}$; or, $\frac{dp}{dt}$ est aussi du même signe que $p^2 - m^0 = m^0\zeta$; donc lorsqu'on a $\mu = \frac{1}{2}\pi$, on

devra, dans les équations (3) et (4), prendre $\frac{dp}{\sqrt{P}}$ avec le signe $+$, si $D > \frac{A+Bm^{02}}{1-m^{02}}$ ou si $V^2 > \frac{A+Bm^{02}}{m^0 f^0}$, et avec le signe $-$, si $V^2 < \frac{A+Bm^{02}}{m^0 f^0}$: on suppose ici $f^0 = \frac{1}{2} a . \frac{1+m^0}{1-m^0} = AC$, C étant le milieu de FG.

Si l'on a exactement $V^2 = \frac{A+Bm^{02}}{m^0 f^0}$, on voit que la quantité $p^2 - m^0$ devra être zéro, au moins pendant quelques instans; mais il est facile de s'assurer qu'elle sera toujours zéro, et qu'ainsi la courbe décrite par le corps sera l'ellipse $p^2 = m^0$: c'est un cas que nous examinerons ci-après avec le détail nécessaire.

376. Avant d'aller plus loin, il sera bon de faire voir quelles sont les limites de la vitesse initiale, pour que l'orbite s'étende ou ne s'étende pas à l'infini. Lorsque r et s sont infinis, le second membre de l'équation (1) se réduit à $\frac{C}{a}$; ainsi pour que ce cas ait lieu, il faut que C soit positif. Or, quel que soit le point A où commence le mouvement, soit qu'on le prenne sur l'axe EFG ou hors de cet axe, si l'on appelle V la vitesse initiale, h et h' les distances AF, AG du point A aux deux centres F et G, on aura... $\frac{C}{a} = \frac{1}{2} V^2 - \frac{A}{h} - \frac{B}{h'}$; donc en général le corps s'éloignera à l'infini si l'on a $V^2 > \frac{2A}{h} + \frac{2B}{h'}$; au contraire, l'orbite sera renfermée dans un espace fini, si l'on a $V^2 < \frac{2A}{h} + \frac{2B}{h'}$: en cas d'égalité, le corps s'éloignera à l'infini.

Si l'on fait $B = 0$, on aura les conditions connues pour qu'un corps soumis à l'attraction de la force A décrive telle ou telle section conique. En effet, on sait que l'orbite sera une ellipse si $V^2 < \frac{2A}{h}$, une parabole si $V^2 = \frac{2A}{h}$, et une hyperbole si $V^2 > \frac{2A}{h}$.

377. Nous allons maintenant procéder au développement et à l'intégration des formules générales du problème; mais pour ne pas donner trop d'étendue à nos recherches, nous nous bornerons à considérer les cas où l'orbite est renfermée dans un espace fini. Ces cas, dont le symptôme vient d'être déterminé par la limite de la vitesse initiale, sont les seuls qui aient quelque rapport au mouvement des planètes et autres astres qui ont des retours périodiques. Nous supposerons donc en général que la valeur de p^2 ne surpasse pas une certaine limite m plus petite que l'unité; car dès qu'on a $p^2 = 1$, les valeurs des rayons vecteurs r et s deviennent infinies.

Cela posé, le polynome P ne pourra être que de l'une des deux formes

$$P = M(m - p^2)(p^2 - m'),$$
$$P = M(m - p^2)(p^2 + m').$$

Dans le premier système, p^2 sera toujours compris entre les limites m et m', où l'on suppose $m' < m$; dans le second, p^2 pourra avoir toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à m. Il s'agit donc de développer les formules générales dans ces deux systèmes, qui doivent comprendre tous les cas possibles.

Le premier système se développera sans difficulté dans la supposition que nous avons faite sur la situation du point A, où commence le mouvement; mais pour développer le second d'une manière complète, il conviendra de placer le point A entre les deux centres F et G, ce qui donnera une autre forme aux constantes C et C'; sans cette précaution, il pourrait y avoir des cas que les formules ne représenteraient pas, savoir, ceux où l'orbite ne coupe l'axe qu'entre les deux centres F et G.

378. Dans le premier système on aura d'abord à substituer les valeurs des constantes C et C' de l'art. 374, dans l'expression du polynome P, savoir,

$$P = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}C' + (C + C')p^2 - (\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C')p^4;$$

et pour que cette expression soit aussi représentée par $M(m - p^2)(p^2 - m')$, il faudra qu'on ait

$$mm' = \frac{\tfrac{1}{2}aV^2m^0 \sin^2\mu - A(1 - m^0)^2}{\tfrac{1}{2}aV^2m^0 \sin^2\mu + B(1 - m^0)^2},$$

$$m + m' = \frac{\tfrac{1}{2}aV^2(1 - 2m^0\cos^2\mu + m^{0\,2}) - \left(\frac{A}{m^0} - Bm^0\right)(1 - m^0)^2}{\tfrac{1}{2}aV^2m^0 \sin^2\mu + B(1 - m^0)^2},$$

$$M = \frac{\tfrac{1}{2}aV^2m^0 \sin^2\mu}{(1 - m^0)^2} + B = \frac{A + B}{1 - mm'}.$$

Ainsi les quantités m, m' et M, par lesquelles on exprime le polynome P dans le premier système, sont faciles à déduire des données immédiates du problème m^0, V, μ.

379. De même puisqu'on a $Q = \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C' + (C + C')q^2 + (\tfrac{1}{2}C' - \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B)q^4$, on pourra donner au polynome Q la forme correspondante

$$Q = M - B + M(m + m')q^2 + (M - A)q^4,$$

d'où résulte

$$(1 - mm')Q = A + Bmm' + (A + B)(m + m')q^2 + (B + Amm')q^4.$$

Nous allons suspendre un moment la suite de ces calculs, pour nous occuper d'une remarque sur l'emploi des variables p et q, et de la considération de quelques cas particuliers.

Remarque sur l'emploi des variables p *et* q.

380. L'emploi des variables p et q, pour exprimer les rayons vecteurs r et s, et en général pour construire la courbe décrite par le mobile, exige quelques développemens qui pourront d'ailleurs être utiles dans d'autres recherches d'analyse.

Il résulte d'abord des valeurs de r et s, données dans l'art. 372, qu'on a

$$r+s=\frac{a(1+p^2)}{1-p^2},\quad s-r=\frac{a(1-q^2)}{1+q^2}.$$

Donc, 1°. si p est constant, $r+s$ sera constant, et la courbe décrite sera une ellipse dont F et G sont les foyers, et le grand axe $AL=2f=\frac{a(1+p^2)}{1-p^2}$.

Fig. 14. 2°. Si q est constant, $s-r$ sera constant; ce qui fait voir que la courbe décrite sera une hyperbole dont F et G sont les foyers. Mais alors le point A ne peut se trouver sur le prolongement de FG; il devra être situé entre les points F et G; et si l'on fait $\frac{FA}{AG}=m$, on aura, au point A, $q^2=m$, $p^2=0$, et $s-r=\frac{a(1-m)}{1+m}$: c'est la valeur de l'axe transverse $AL=2CA$.

381. Il suit de là que lorsqu'on veut déterminer un point de la trajectoire par des valeurs données de p^2 et q^2, savoir, $p^2=\alpha$, $q^2=\beta$, on peut regarder ce point comme étant l'intersection de l'ellipse où $p^2=\alpha$ avec l'hyperbole où $q^2=\beta$. Mais cette construction laisserait incertain si le point cherché est au-dessus de l'axe ou au-dessous. Pour éviter à cet égard toute ambiguïté, il convient de déterminer chaque point de la courbe par
Fig. 13. des coordonnées rectangles, telles que $GP=x$, $PM=y$, dont les valeurs sont

$$x=\frac{a(1-p^2q^2)}{(1-p^2)(1+q^2)},\quad y=\frac{2apq}{(1-p^2)(1+q^2)}.$$

382. Les points où la courbe rencontre son axe méritent une attention particulière : voici les symptômes par lesquels ils doivent être distingués suivant les différens cas.

Fig. 15. 1°. Si la courbe rencontre l'axe en un point B situé au-delà de G par

rapport à F, on aura en ce point $r-s=a$, et par conséquent $q=\infty$; c'est le symptôme de ce premier cas. On aura en même temps $p^2=\frac{r+s-a}{r+s+a}=\frac{GB}{FB}$; ainsi la valeur connue de p^2 sera égale au rapport $\frac{GB}{FB}$ qui détermine la position du point B. C'est ce qu'on trouverait directement, en considérant un point M infiniment près de B; car dans ce point on aura

$$p^2=\frac{\tang\frac{1}{2}\omega}{\tang\frac{1}{2}\varphi}=\frac{\tang\frac{1}{2}MFB}{\tang\frac{1}{2}MGB}=\frac{\sin MFB}{\sin MGB}=\frac{GM}{FM}=\frac{GB}{FB}.$$

Si l'intersection avait lieu en G, on aurait toujours $q^2=\infty$, mais en même temps $p^2=0$.

2°. Si l'intersection a lieu en un point I situé entre F et G, on aura dans ce point $r+s=a$, et par conséquent $p=0$; c'est le symptôme de ce second cas : on aura en même temps $q^2=\frac{a+r-s}{a+s-r}=\frac{r}{s}=\frac{FI}{GI}$; ainsi la valeur connue de q^2 déterminera la position du point I. Fig. 16.

Si l'intersection avait lieu en G, on aurait, comme ci-dessus, $p=0$, $q=\infty$; si elle a lieu en F, on aura à la fois $p=0$, $q=0$.

3°. Enfin si l'intersection a lieu en un point A situé sur le prolongement de FG, du côté de F, on aura en ce point $s-r=a$, ce qui donne $q=0$ pour le symptôme de ce troisième cas. On aura en même temps $p^2=\frac{r+s-a}{r+s+a}=\frac{r}{s}=\frac{FA}{GA}$: ainsi la valeur connue de p^2 déterminera la position du point A. Fig. 13.

383. On voit par ces détails, que la quantité q, relative à l'hyperbole, peut avoir, suivant les différens cas, toutes les valeurs positives ou négatives, depuis zéro jusqu'à l'infini; mais que la quantité p, relative à l'ellipse, est toujours comprise entre $+1$ et -1. Lorsque $p^2=1$, on a $r+s=\infty$; et par conséquent le point M est infiniment éloigné. Dans ce cas, si l'on appelle θ l'angle que l'asymptote de la courbe fait avec l'axe GF, cet angle, qui est alors la valeur de ω, se déterminera par l'équation $\tang\frac{1}{2}\theta=pq$, ce qui s'accorde d'ailleurs avec la valeur $\frac{\gamma}{\alpha}=\tang\omega=\frac{2pq}{1-p^2q^2}$.

384. Il est important de remarquer que la description de la courbe serait quelquefois incomplète, si l'on n'attribuait à p et à q que des valeurs réelles; car il y a, dans certains cas, des branches qui ne sont représentées qu'en donnant à p et q des valeurs imaginaires. Ces cas se rencontrent dans le problème des deux centres d'attraction; c'est pourquoi il convient de donner d'avance l'explication de cette difficulté.

Fig. 17. Supposons que le point M, qui décrit la courbe, soit parvenu de A en G, où l'on a $q=\infty$ et $p=0$; s'il continue sa marche au-delà de G, les formules ne peuvent plus représenter la portion GM′ située au-dessous de l'axe, du moins en donnant à q et p des valeurs réelles.

Car puisqu'on a $s=\frac{a(1+p^2q^2)}{(1-p^2)(1+q^2)}=\frac{ap^2}{1-p^2}+\frac{a}{(1+q^2)(1-p^2)}$, on conçoit que s diminue de plus en plus à mesure que p devient plus petit et q plus grand. Enfin au point G, où l'on fait à la fois $p=0$ et $q=\infty$, on a $s=0$; mais passé ce point, comme la valeur $p^2=0$ ne peut être suivie d'une valeur $p^2>1$, il n'y a aucunes valeurs réelles de p et q qui rendent s négative, comme il le faudrait pour que les formules représentassent la portion de courbe GM′.

385. En effet, dans le cas où l'arc GM′ et l'arc GM sont situés du même côté de la tangente commune TGT′, les valeurs de ω et de φ varient infiniment peu du point G au point M′, que nous supposons infiniment près de G. On a au point G, $\varphi=\pi$, $\omega=$ FGT, et au point M′, $\varphi=\pi+$ GFM′, $\omega=$ FGT $+$ TGV, GV étant le prolongement de la corde M′G. Il faudrait donc que la valeur de s, qui ne peut plus être dirigée suivant GV, devînt négative pour répondre à sa véritable position GM′, directement opposée à GV. Or, on vient de voir que la valeur analytique de s ne peut devenir négative, tant que p et q sont réelles. Le calcul se refuse donc, dans ce cas, à représenter la branche GM′; car puisque s ne peut pas devenir négative, après avoir fait $\omega=$FGT au point G, il faudrait tout d'un coup augmenter ω de $\pi+$ T′GM′, pour passer du point G au point infiniment proche M′, ce qui ne s'accorde point avec la loi de continuité à laquelle doivent être assujetties les quantités algébriques.

386. Il en serait de même si la courbe avait un point d'inflexion en G, et qu'elle se continuât dans la branche GM″, située de l'autre côté de la tangente GT′. Le passage du point G au point M″ ne peut plus se faire en augmentant par degrés ω, même en admettant que s devînt négatif; car si l'on fait $\omega=$ FGV, FGV différant infiniment peu de FGT, la droite GV, prolongée au-dessous de FG, ne rencontre pas la branche GM″. Ainsi il faut admettre que l'angle ω passera tout d'un coup de la valeur FGT qu'il a au point G, à la valeur FGT $+\pi-$ T′GM″ qu'il a au point M″; supposition qui est encore contraire à la loi de continuité, et qui ne peut subsister en donnant à p et q des valeurs réelles.

387. Voici maintenant la seule manière de passer analytiquement de la branche MG à la branche inférieure GM′.

Soit $FM' = r'$, $GM' = s'$, $HGM' = \omega'$, $HFM' = \varphi'$, $\tang \frac{1}{2}\varphi' = p'q'$, $\tang \frac{1}{2}\omega' = \frac{q'}{p'}$, on trouvera, par les formules du n° 372, en accentuant les lettres, et changeant r en s,

$$r' + s' = \frac{a(1+p'^2)}{1-p'^2}, \quad r' - s' = \frac{a(1-q'^2)}{1+q'^2}.$$

Mais si l'on étend au cas présent les formules qui ont lieu pour la branche MG, il faudra changer r en r' et s en $-s'$, ce qui donnera

$$r' - s' = \frac{a(1+p^2)}{1-p^2}, \quad r' + s' = \frac{a(q^2-1)}{q^2+1}.$$

Ces valeurs ne peuvent avoir lieu, à moins de supposer que p^2 et q^2 deviennent tout-à-coup négatives en passant du point G aux points situés au-dessous de l'axe; et pour qu'il y ait identité entre les deux résultats, il faut supposer

$$p^2 = -q'^2 \quad \text{et} \quad q^2 = -\frac{1}{p'^2}.$$

D'ailleurs les premières valeurs de p' et q', au point G, sont $p' = 0$, $q' = 0$, ce qui s'accorde avec les valeurs de p et q en ce même point, savoir, $p = 0$, $q = \infty$.

388. Pour confirmer cette théorie par un exemple très simple, soit FMG un arc de cercle plus petit que la demi-circonférence, et soit O le centre de ce cercle. Ayant fait $FC = CG = \frac{1}{2}a$, $CO = c$, $FO = k = \sqrt{(c^2 + \frac{1}{4}a^2)}$, $GP = x$, $PM = y$, on aura, suivant les formules générales, Fig. 18.

$$x = \frac{a(1-p^2q^2)}{(1-p^2)(1+q^2)}, \quad y = \frac{2apq}{(1-p^2)(1+q^2)};$$

d'ailleurs, par la nature du cercle, on a $(y+c)^2 + (\frac{1}{2}a - x)^2 = k^2$, ou $y^2 + 2cy + x^2 - ax = 0$. Soit M un point infiniment proche de G, ensorte que x et y soient infiniment petits et positifs; si l'on appelle θ l'angle que fait la tangente en G avec l'axe GC, on aura $\tang \theta = \frac{a}{2c}$, et $\frac{y}{x}$ aura pour limite $\tang \theta$. En effet, soit $x = a\delta$, δ étant infiniment petit, on aura, par l'équation du cercle, $y = \frac{a^2\delta}{2c}\left[1 - \delta\left(1 + \frac{a^2}{4c^2}\right)\right]$: mais ..... $\frac{y}{x} = \frac{2pq}{1-p^2q^2}$; donc

$$\frac{2pq}{1-p^2q^2} = \frac{a}{2c}\left[1 - \delta\left(1 + \frac{a^2}{4c^2}\right)\right] = \tang\theta\left(1 - \frac{\delta}{\cos^2\theta}\right).$$

ce qui donne $pq = \text{tang}\,\frac{1}{2}\theta\left(1 - \frac{\delta}{\cos\theta}\right)$. Pour avoir séparément p et q, il faut combiner cette équation avec l'équation $\delta = \frac{1 - p^2q^2}{(1-p^2)(1+q^2)}$.

Cette dernière, où l'on voit que q^2 doit être de l'ordre $\frac{1}{\delta}$, donne

$$\delta = \frac{1 - p^2q^2}{q^2}\left(1 + \frac{p^2q^2 - 1}{q^2}\right);$$

on en tire $\frac{1 - p^2q^2}{q^2} = \delta(1+\delta)$, et $\frac{1}{q^2} = \frac{\delta(1+\delta)}{1 - p^2q^2}$; substituant la valeur de pq donnée par la première équation, on aura

$$\frac{1}{q^2} = \frac{\delta\cos\theta\cos^2\frac{1}{2}\theta\,(1+\delta)}{\cos^2\theta + 2\delta\sin^2\frac{1}{2}\theta},$$

$$p^2 = \frac{\delta\cos\theta\sin^2\frac{1}{2}\theta\,(1+\delta)}{\cos^2\theta + 2\delta\cos^2\frac{1}{2}\theta}.$$

Ces valeurs de p^2 et $\frac{1}{q^2}$ sont positives tant que δ est positif; elles sont nulles lorsque $\delta = 0$. Mais si on fait δ négatif, elles deviennent négatives, et par conséquent p et q sont imaginaires.

Au reste, ces valeurs s'accordent avec les formules de l'art. 387, lesquelles, en supposant p^2 et $\frac{1}{q^2}$ infiniment petits, donnent

$$r' - s' = a(1 + 2p^2), \quad r' + s' = a\left(1 - \frac{2}{q^2}\right);$$

et comme en changeant le signe de δ, on a $p^2 = -\frac{\delta\sin^2\frac{1}{2}\theta}{\cos\theta}$ ..... $\frac{1}{q^2} = -\frac{\delta\cos^2\frac{1}{2}\theta}{\cos\theta}$, il en résulte

$$r' - s' = a - \frac{2a\delta\sin^2\frac{1}{2}\theta}{\cos\theta} = a - a\delta\left(\frac{k-c}{c}\right),$$

$$r' + s' = a + \frac{2a\delta\cos^2\frac{1}{2}\theta}{\cos\theta} = a + a\delta\left(\frac{k+c}{c}\right).$$

Ce sont en effet les vraies valeurs de $r' + s'$ et $r' - s'$ au point M′, en faisant $GP' = \delta$.

Du cas particulier où l'une des forces est nulle.

Fig. 13. 389. Soit $B = 0$; alors la distance FG devient arbitraire, ainsi que m^0, et il n'y a de déterminé que la distance $AF = \frac{am^0}{1 - m^0}$, que nous nommerons h. Dans ce cas, on sait que la courbe décrite doit être une ellipse, ou

plus généralement une section conique dont F est l'un des foyers. Il faut donc voir comment ce résultat peut être déduit de nos formules, en les considérant dans leur plus grande généralité, et sans s'astreindre à l'hypothèse de l'article 377.

J'observe d'abord que comme la direction de l'axe FG est à volonté, on peut prendre, pour origine du mouvement, un point déterminé A, dans lequel AF sera perpendiculaire à la courbe. Ainsi, sans diminuer la généralité de la solution, on pourra supposer $\mu = \frac{1}{2}\pi$; et en mettant simplement m au lieu de m^2, on aura (art. 374), $C = \frac{1}{2}aV^2 - \frac{A}{m}(1-m)$, ... $C' = \frac{amV^2}{(1-m)^2} - A$, valeurs où il reste deux indéterminées a et m; mais comme on a entre elles la relation $am = h(1-m)$, on peut ne conserver que l'indéterminée m, ce qui donnera $C = (\frac{1}{2}hV^2 - A)\left(\frac{1-m}{m}\right)$, ... $C' = \frac{hV^2}{1-m} - A$. Soit $D = \frac{\frac{1}{2}hV^2}{1-m}$; les valeurs des polynomes P et Q (art. 322) pourront être mises sous cette forme

$$P = \left(\frac{D-A}{m} - Dp^2\right)(p^2 - m),$$

$$Q = \left(D + \frac{D-A}{m}q^2\right)(1 + mq^2),$$

et l'équation de la trajectoire sera, en faisant $D - A = mkD$,

$$\frac{\pm dp}{\sqrt{(p^2-m)}.\sqrt{(k-p^2)}} = \frac{dq}{\sqrt{(1+mq^2)}.\sqrt{(1+kq^2)}}.$$

Dans cette équation on peut rendre le second membre semblable au premier en faisant $mq^2 = \frac{z^2-m}{k-z^2}$, et on aura la transformée

$$\frac{dp}{\sqrt{[(p^2-m)(k-p^2)]}} = \frac{\pm dz}{\sqrt{[(z^2-m)(k-z^2)]}}.$$

390. L'intégrale complète de cette équation, comprenant la constante arbitraire c, est

$$mk(p^2 + z^2 - c) - cp^2z^2 = \mp 2pz\sqrt{[mk(m-c)(k-c)]};$$

et comme on doit avoir simultanément $p^2 = m$, $q = 0$, $z^2 = m$, on trouvera $c = 0$, et l'intégrale deviendra simplement $z = \mp p$, d'où résulte

$$mq^2 = \frac{p^2 - m}{k - p^2}.$$

Soit $r+s=au$, $s-r=av$, on aura $u=\frac{1+p^2}{1-p^2}$, $v=\frac{1-q^2}{1+q^2}$, ce qui donne réciproquement $p^2=\frac{u-1}{u+1}$, $q^2=\frac{1-v}{1+v}$. Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, et faisant, pour abréger, $\alpha=\frac{mk+2m+1}{1-mk}$, ... $\beta=\frac{mk-2m+1}{1-mk}$, on aura $u-v=\alpha-\beta uv$, ou

$$2ar=\alpha a^2-\beta(s^2-r^2).$$

Soient AP$=x$, PM$=y$, on aura $r^2=y^2+(h-x)^2$, $s^2-r^2=a^2+2a(h-x)$; donc $r=\frac{1}{2}a(\alpha-\beta)-\beta(h-x)$. Cette équation, qu'on peut mettre aussi sous la forme

$$y^2=\frac{a^2}{4}(\alpha-\beta)^2-a\beta(\alpha-\beta)(h-x)-(1-\beta^2)(h-x)^2,$$

appartient en général à une section conique, dont A est un sommet et F un foyer; elle appartiendra en particulier à l'ellipse si l'on a $\beta^2<1$, à la parabole si $\beta^2=1$, et à l'hyperbole si $\beta^2>1$.

391. Dans le premier cas, comme le point G peut être pris à volonté, on pourra supposer que G est le second foyer de l'ellipse. Alors on aura $r+s=a+2h=\frac{h}{m}(1+m)$, ce qui donnera $p^2=m$, et par suite $k=m$. Substituant cette valeur dans l'équation $D-A=mkD$, on en tire $D=\frac{A}{1-m^2}$, et par conséquent $V^2=\frac{2A}{h(1+m)}$. C'est le quarré de la vitesse nécessaire pour décrire l'ellipse dont le grand axe est $\frac{h}{m}(1+m)$, et dans laquelle m représente le rapport $\frac{FA}{AG}$.

Si l'on a $m=0$, le grand axe devient infini, et l'ellipse se change en parabole; ainsi la courbe décrite sera une parabole si l'on a $V^2=\frac{2A}{h}$; elle serait une hyperbole si m était négatif, ou si l'on avait $V^2>\frac{2A}{h}$.

392. Pour avoir le temps du mouvement dans le cas de l'orbite elliptique, il faut reprendre l'équation

$$\frac{dt}{a\sqrt{2a}}=\left(\frac{p^2}{(1-p^2)^2}+\frac{q^2}{(1+q^2)^2}\right)\frac{dq}{\sqrt{Q}},$$

et y substituer les valeurs $p^2=m$, $Q=D(1+mq^2)^2$, ce qui donnera

$$\frac{dt\sqrt{D}}{a\sqrt{(2a)}}=\left(\frac{m}{(1-m)^2}+\frac{q^2}{(1+q^2)^2}\right)\frac{dq}{1+mq^2};$$

ou, en faisant le demi-grand axe $\frac{1}{2}a \cdot \frac{1+m}{1-m} = f$,

$$\frac{dt\sqrt{A}}{4f\sqrt{f}} = \frac{1}{1+m} \cdot \frac{(m+q^2)\,dq}{(1+q^2)^2}.$$

Soit $q = \tang \zeta$, et on aura l'intégrale

$$\frac{t\sqrt{A}}{2f\sqrt{f}} = \zeta - \left(\frac{1-m}{1+m}\right) \sin\zeta \cos\zeta;$$

faisant $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, et doublant la valeur de t, on aura le temps d'une révolution, savoir,

$$T = \frac{2\pi f\sqrt{f}}{\sqrt{A}},$$

ce qui s'accorde avec les formules connues du mouvement elliptique.

Du cas particulier où l'on a $m = m'$, dans le premier système, art. 377.

393. Alors la valeur du polynome P se réduit à la forme

$$P = -M(p^2 - m)^2.$$

Or, M est essentiellement positif, puisqu'on a $M = \frac{A+B}{1-m^2}$; de là on voit que l'équation (3) ne peut subsister, à moins qu'on n'ait dans toute l'étendue de la courbe décrite,

$$p^2 - m = 0;$$

cette courbe, dans laquelle $r + s$ est constant, sera donc une ellipse, dont F et G sont les deux foyers.

Cela posé, le point A, intersection de la courbe avec l'axe, ne peut être que le sommet de l'ellipse, et on aura, en ce point, $\mu = \frac{1}{2}\pi$, $m^0 = m$, ce qui donnera $M = \frac{\frac{1}{2}maV^2}{(1-m)^2} + B = \frac{A+B}{1-m^2}$, et par conséquent.....

$V^2 = \frac{A+Bm^2}{\frac{1}{2}ma} \cdot \frac{1-m}{1+m}$; ou, en substituant la valeur $ma = h(1-m)$,

$$V^2 = \frac{2A + 2m^2B}{h(1+m)};$$

donc avec une vîtesse initiale ainsi déterminée, le corps décrira la même ellipse qu'avec la vîtesse $\sqrt{\left(\frac{2A}{h(1+m)}\right)}$, si la force A agissait seule, ou qu'avec la vîtesse $\sqrt{\left(\frac{2Bm^2}{h(1+m)}\right)}$, si la force A était nulle. On peut tirer de là un théorème assez remarquable.

« Soit A le sommet d'une ellipse dont F et G sont les deux foyers; soit » V′ la vitesse en A nécessaire pour que cette ellipse soit décrite en vertu » de la force A placée au foyer F; soit pareillement V″ la vitesse en A né- » cessaire pour que l'ellipse soit décrite en vertu de la force B située à l'au- » tre foyer G; si ces deux forces agissent à la fois sur le mobile, et que sa » vitesse initiale V soit telle, qu'on ait $V^2 = V'^2 + V''^2$, il décrira encore » la même ellipse. »

394. Pour avoir le temps employé à parcourir un arc quelconque de cette ellipse, déterminé par la variable q, on observera que dans ce cas particulier, la valeur de Q se réduit à cette forme,

$$Q = \frac{A}{1-m^2}(1+mq^2)^2 + \frac{B}{1-m^2}(m+q^2)^2,$$

ce qui donnera la formule à intégrer

$$\frac{dt}{4f\sqrt{f}}(1+m) = \frac{(m+q^2)(1+mq^2)\,dq}{(1+q^2)^2\sqrt{[A+Bm^2+2(A+B)mq^2+(Am^2+B)q^4]}}.$$

Soit $R = \sqrt{[A(1+mq^2)^2+B(m+q^2)^2]}$, on aura, par les réductions connues,

$$\frac{(1+m)(A+B)t}{2f\sqrt{f}} = -\frac{qR}{1+q^2} + 2m(A+B)\int\frac{dq}{R} + (Am^2+B)\int\frac{(1+q^2)dq}{R}$$
$$+(A-B)(1-m^2)\int\frac{dq}{(1+q^2)R}.$$

On voit que la valeur de t ne contiendra pas de fonctions elliptiques de la troisième espèce, si l'on a $A = B$; c'est pourquoi nous nous bornerons à développer ce cas particulier.

395. Soit donc $A = B$, ce qui donne le quarré de la vitesse initiale

$$V^2 = \frac{2A(1+m^2)}{h(1+m)} = \frac{A(1+m^2)}{mf};$$

on aura immédiatement

$$\frac{(1+m)\,dt\sqrt{A}}{4f\sqrt{f}} = \frac{(m+q^2)(1+mq^2)\,dq}{(1+q^2)^2\sqrt{[(1+m^2)(1+q^4)+4mq^2]}}.$$

Soit $q = \tang\frac{1}{2}\psi$, $\cos\theta = \frac{2m}{1+m^2}$, $c = \sin\frac{1}{2}\theta$, $b = \cos\frac{1}{2}\theta$, on aura la transformée

$$\frac{b\,dt\sqrt{2A}}{f\sqrt{f}} = \frac{d\psi(1-2c^2+c^2\sin^2\psi)}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}},$$

dont l'intégrale est

$$t = \frac{f\sqrt{f}}{b\sqrt{2A}}[2b^2F(c,\psi) - E(c,\psi)].$$

Dans le mouvement que nous considérons, la vitesse est la même aux deux extrémités du grand axe; elle est aussi la même aux deux extrémités du petit axe. En appelant celle-ci V′, on aura

$$V^2 = \frac{A(1+m^2)}{mf}, \quad V'^2 = \frac{2A}{f};$$

d'où il suit que la vitesse va en diminuant de l'extrémité du grand axe à l'extrémité du petit.

Il est évident, d'ailleurs, que chaque quart d'ellipse est parcouru dans le même temps qui sera le quart du temps d'une révolution; de sorte qu'en appelant ce dernier temps T, on aura

$$T = \frac{4f^{\frac{3}{2}}}{b\sqrt{2A}}\left(2b^2F^1c - E^1c\right).$$

396. Les deux forces A et B sont égales; elles agissent aux deux foyers de l'ellipse. Si l'on voulait que la même courbe fût parcourue en vertu d'une seule force attractive 2A, placée dans l'un des foyers, le temps de la révolution serait, comme nous l'avons vu n° 392, $T' = \frac{4f^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2A}} \cdot \frac{\pi}{2}$; donc on a

$$T : T' :: 2bF^1c - \frac{1}{b}E^1c : \frac{\pi}{2}.$$

Pour savoir lequel de ces deux temps est le plus grand, j'observe qu'on a en général, $E = b^2F + \int \frac{c^2 d\varphi \cos^2\varphi}{\Delta}$; donc

$$2bF^1c - \frac{1}{b}E^1c = bF^1c - \frac{c^2}{b}Z^1,$$

Z^1 étant l'intégrale $\int \frac{d\varphi \cos^2\varphi}{\Delta}$, prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Mais bF^1c représente l'intégrale $\int \frac{d\varphi\sqrt{(1-c^2)}}{\Delta}$, prise entre les mêmes limites; et puisque $1 - c^2$ est plus petit que $1 - c^2 \sin^2\varphi$, cette intégrale est plus petite que $\int d\varphi$ ou $\frac{1}{2}\pi$: donc, à plus forte raison, $2bF^1c - \frac{1}{b}E^1c < \frac{1}{2}\pi$; donc on a $T < T'$. Ainsi la masse 2A, partagée également dans les deux foyers, agit plus fortement que la même masse réunie dans un seul foyer, c'est-à-dire fait circuler le corps dans un moindre temps.

397. Pour juger de la différence numérique de ces termes dans un cas particulier, soit $c = \sin 30°$, on aura par la table des fonctions complètes,

$$\log F'c = 0.226793\ 259758,$$
$$\log E'c = 0.166566\ 925942,$$

ce qui donnera

$$\frac{T}{T'} = 0.780066\ 690223.$$

Ainsi les deux temps dont il s'agit seront à très peu près dans le rapport de 78 à 100.

Au reste, les vitesses aux extrémités du grand axe, ne sont pas les mêmes dans les deux cas, et leur différence sert à expliquer en grande partie la différence des résultats. Si l'on appelle V' et V'' les vitesses aux apsides supérieure et inférieure, dans le cas d'une seule force attractive $2A$, concentrée dans l'un des foyers, on aura

$$V'^2 = \frac{2Am}{f}, \quad V''^2 = \frac{2A}{fm};$$

et dans le cas des forces séparées, on a $V^2 = \frac{A(1+m')}{fm}$; donc $V^2 = \frac{1}{2}(V'^2 + V''^2)$, c'est-à-dire que V^2 tient le milieu juste entre V'^2 et V''^2. Quant à l'effet de ces vitesses sur le temps périodique, il n'y a que le calcul qui puisse l'apprécier, et à cet égard il ne reste rien à désirer.

Solution d'une difficulté analytique.

398. Puisque l'ellipse satisfait dans un cas fort étendu où les forces attractives A et B sont situées respectivement dans les deux foyers F et G, on peut partir de la courbe connue pour faire les substitutions dans les équations générales (1) et (2), afin d'en déduire les conditions nécessaires pour que ce mouvement puisse avoir lieu.

Ayant donc fait $CA = f$, $CF = CG = g = \frac{1}{2}a$, $m = \frac{f-g}{f+g}$; soit de plus $n = \frac{2fg}{f^2+g^2}$, on aura par les propriétés de l'ellipse,

$$r = \frac{f^2-g^2}{f+g\cos\varphi}, \qquad s = \frac{f^2-g^2}{f-g\cos\omega} = \frac{(f^2+g^2)(1+n\cos\varphi)}{f+g\cos\varphi},$$

$$\cos\omega = \frac{n+\cos\varphi}{1+n\cos\varphi}, \quad \tang^2\tfrac{1}{2}\omega = \frac{1-n}{1+n}\tang^2\tfrac{1}{2}\varphi = m^2\tang^2\tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$p^2 = \frac{\tang\frac{1}{2}\omega}{\tang\frac{1}{2}\varphi} = m, \qquad q^2 = \tang\tfrac{1}{2}\omega\tang\tfrac{1}{2}\varphi = m\tang^2\tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$d\omega = \frac{f^2-g^2}{f^2+g^2}\cdot\frac{d\varphi}{1+n\cos\varphi}, \quad rd\varphi = sd\omega = \frac{(f^2-g^2)\,d\varphi}{f+g\cos\varphi},$$

$$dr^2 + r^2d\varphi^2 = \frac{(f^2-g^2)^2(f^2+g^2)(1+n\cos\varphi)d\varphi^2}{(f+g\cos\varphi)^4}.$$

Ces valeurs, et celles des constantes C et C′ (art. 374), où l'on fera $\mu = \frac{1}{2}\pi$, et pour abréger, $D = \frac{f^2 - g^2}{4g} V^2$, étant substituées dans les équations (1) et (2), on trouvera que ces deux équations conduisent également, et sans aucune condition, à cette valeur de dt,

$$dt\sqrt{\left(\frac{2g}{f^2-g^2}\right)} = \frac{(f^2-g^2)(1+n\cos\varphi)\,d\varphi}{(f+g\cos\varphi)^2\sqrt{N}},$$

dans laquelle

$$N = 2D(1+n\cos\varphi) - A(1-\cos\varphi)(1+n\cos\varphi) + B(1-n)(1-\cos\varphi).$$

Ce résultat, qui n'impose aucune condition à la vitesse initiale, a de quoi surprendre, ou doit même paraître fautif, puisque s'il y a une vitesse initiale propre à décrire l'ellipse donnée, toute vitesse plus grande ou plus petite fera nécessairement décrire une autre courbe.

399. Pour rendre raison de ce paradoxe, il faut considérer que les équations (1) et (2) ne sont pas linéaires par rapport aux différences $d\varphi$, $d\omega$, dt, et qu'un facteur qui est nul dans l'ellipse, a pu satisfaire à ces équations, sans qu'on soit en droit d'en conclure que ces deux équations se réduisent absolument à une seule.

Toute incertitude à cet égard disparaîtra, si l'on remonte aux équations différentielles du second ordre, et qu'on fasse les substitutions convenables dans ces équations. On devra obtenir ainsi la condition pour que l'ellipse soit décrite en vertu des deux forces d'attraction et de la vitesse initiale V, dirigée perpendiculairement à la ligne des centres FG.

Faisant donc, comme au n° 370, $x = a + r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, les équations différentielles du second ordre donneront immédiatement,

$$\frac{ddr - rd\varphi^2}{dt^2} = \frac{A}{r^2} - \frac{B\cos(\varphi-\omega)}{s^2},$$

$$\frac{rdd\varphi + 2drd\varphi}{dt^2} = \frac{B}{s^2}\sin(\varphi-\omega).$$

Ces équations servent en général à déterminer la courbe décrite et le lieu du corps au bout du temps t. Maintenant si cette courbe est l'ellipse qui a pour équation $r(f+g\cos\varphi) = f^2 - g^2$, on aura

$$(f+g\cos\varphi)\frac{ddr - rd\varphi^2}{dt^2} - g\sin\varphi\left(\frac{rdd\varphi + 2drd\varphi}{dt^2}\right) = fr\cdot\frac{dt^2}{d\varphi^2}.$$

Au moyen de ces trois équations et de la valeur de $\frac{dt^2}{d\varphi^2}$, tirée du résultat de l'article précédent, on trouve l'équation de condition

$$(f+g\cos\varphi)\frac{A}{r^2}+\frac{fB\cos(\varphi-\omega)+gB\cos\omega}{s^2}=\frac{(f+g\cos\varphi)^3 Nn}{(f^2-g^2)^2(1+n\cos\varphi)^2},$$

Substituant les valeurs de r, s, $\cos\omega$, $\cos(\varphi-\omega)$ en fonctions de φ, on aura enfin,

$$Nn=A(1+n\cos\varphi)^2+B\left(\frac{f^2-g^2}{f^2+g^2}\right)^2.$$

Comparant cette valeur de N avec celle de l'article précédent, on trouve qu'elles sont identiques, si l'on a $2nD=A(1+n)+B(1-n)$, c'est-à-dire si la vitesse initiale V est telle qu'on ait

$$V^2=\frac{A(f+g)^2+B(f-g)^2}{f(f^2-g^2)}=\frac{A+Bm^2}{fm},$$

ce qui s'accorde entièrement avec les résultats précédens.

Du cas particulier où $B=-A$.

400. Dans ce cas, la force placée au second foyer G est répulsive, et égale en intensité à la force attractive placée au foyer F. Pour que l'ellipse soit décrite en vertu de ces deux forces, il faut, d'après la formule précédente, qu'on ait

$$V^2=\frac{4Ag}{f^2-g^2}=\frac{A(1-m^2)}{fm}.$$

Alors la vitesse v en un point quelconque est donnée par l'équation (1), savoir,

$$v^2=\frac{2A}{r}-\frac{2A}{s}+V^2-\frac{2A}{f-g}+\frac{2A}{f+g}.$$

Mais on a, par hypothèse, $V^2=\frac{4Ag}{f^2-g^2}=\frac{2A}{f-g}-\frac{2A}{f+g}$; donc

$$v^2=\frac{2A}{r}-\frac{2A}{s}.$$

On voit, par cette équation, que la vitesse diminue de plus en plus, à mesure que le corps s'éloigne de l'extrémité du grand axe; elle sera nulle à l'extrémité du petit axe, où l'on a $r=s$. Ainsi, à partir de ce point, le corps reviendra sur ses pas, et décrira le quart d'ellipse dans le sens contraire. Arrivé au point A avec une vitesse V égale à la vitesse initiale, mais dirigée en sens contraire, il continuera son mouvement sur l'ellipse, jusqu'à ce qu'il parvienne à l'autre extrémité du petit axe, où sa vitesse sera nulle. Ainsi, dans le cas où les deux forces situées aux deux foyers sont égales, mais agissent en sens contraire, le mobile, en supposant sa vitesse initiale

telle que nous l'avons fixée, parcourra la demi-ellipse, d'une extrémité à l'autre du petit axe, par un mouvement analogue à celui d'un pendule qui oscillerait dans une demi-ellipse dont le grand axe serait vertical. Cet exemple d'un mouvement d'oscillation, que des forces accélératrices produisent sur un corps parfaitement libre, s'il n'est pas le premier que la mécanique ait offert jusqu'à présent, est au moins digne de remarque.

401. Pour trouver le temps du mouvement, il faut faire $B = -A$ dans la formule du n° 394, ce qui donnera

$$\frac{dt\sqrt{A}}{4f\sqrt{f}}(1+m)\sqrt{(1-m^2)} = \frac{(m+q^2)(1+mq^2)\,dq}{(1+q^2)^2\sqrt{(1-q^4)}}.$$

Soit $c^2 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{c\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, $\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)} = \Delta$, on aura

$$\frac{dq}{\sqrt{(1-q^4)}} = \frac{c\,d\psi}{\Delta},\quad \frac{m+q^2}{m+q^2} = 1+(1-m)\Delta^2,\quad \frac{1+mq^2}{1+q^2} = m+(1-m)\Delta^2;$$

donc le second membre de l'équation précédente étant nommé dZ, on aura

$$dZ = \frac{c\,d\psi}{\Delta}\left[m+(1-m)^2\Delta^2-(1-m)^2\Delta^4\right],$$

ce qui donne en intégrant,

$$Z = cmF(c,\psi)+c(1-m)^2E(c,\psi)-c(1-m)^2\int\Delta^3 d\psi.$$

Mais on a

$$\int\Delta^3 d\psi = \tfrac{1}{3}c^2\Delta\sin\psi\cos\psi+E(c,\psi)-\tfrac{1}{3}c^2F(c,\psi);$$

donc

$$Z = \frac{c^3}{3}(1+4m+m^2)F(c,\psi)-\frac{c^3}{3}(1-m)^2\Delta\sin\psi\cos\psi.$$

Cette intégrale, qui ne comprend que la fonction de première espèce $F(c,\psi)$, est la valeur de $\frac{t\sqrt{A}}{4g\sqrt{g}}(1+m)\sqrt{(1-m^2)}$; et en faisant $m = \frac{f-g}{f+g}$, on en déduit

$$t = \frac{\sqrt{(2g^3)}}{3\sqrt{A}}\left[\frac{3f^2-g^2}{2g^2}F(c,\psi)-\Delta\sin\psi\cos\psi\right].$$

Si l'on fait $q = 1$, ou $\psi = \frac{1}{2}\pi$, on aura le temps employé à parcourir le quart d'ellipse. Ainsi en appelant T le temps d'une oscillation, on aura

$$T = \frac{3f^2-g^2}{3\sqrt{(\frac{1}{2}Ag)}}F'c.$$

Du cas particulier où l'on a $C + C' = 0$.

402. Dans ce cas, les polynomes P et Q se réduisent à deux termes, savoir,

$$P = \alpha - \beta p^4,$$
$$Q = \gamma + \delta q^4.$$

Dans le premier, les coefficiens α et β sont toujours positifs; dans l'autre, les coefficiens γ et δ peuvent être tous deux positifs, ou l'un positif et l'autre négatif.

D'après ces valeurs, chaque membre de l'équation $\frac{dp}{\sqrt{P}} = \frac{dq}{\sqrt{Q}}$ pourra toujours se réduire à la forme $\frac{a d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\varphi)}}$, où l'on a $c^2 = \frac{1}{2}$; donc l'équation dont il s'agit peut être représentée en général par $\frac{k d\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\psi)}} = \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\zeta)}}$, et son intégrale sera

$$kF(c, \psi) = F(c, \zeta) + \text{const.},$$

ou simplement $kF(\psi) = F(\zeta) + \text{const.}$, le module commun à ces fonctions étant $c = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

On pourra toujours supposer que dans l'état initial du mouvement, l'une des variables ψ, ζ est nulle. Soit cette variable ζ, et soit en même temps $\psi = \epsilon$, alors l'équation de la courbe sera

$$k(F\psi - F\epsilon) = F\zeta;$$

et si l'on prend une nouvelle variable ξ, telle que $F\xi = F\psi - F\epsilon$, on aura plus simplement $kF\xi = F\zeta$.

403. Telle est, sous la forme la plus simple, l'équation de la trajectoire, lorsque la vitesse initiale satisfera à la condition $C + C' = 0$. Dans cette équation, k sera en général une fonction donnée des quantités A, B, α, et de celles qui sont relatives à l'état initial du corps; si l'on suppose que k est égal à une fraction rationnelle $\frac{i}{e}$, prise à volonté entre des limites convenables, cette condition établira, entre les données du problème, une relation au moyen de laquelle la courbe décrite par le corps sera une courbe algébrique, puisqu'il y a toujours une équation algébrique qui représente l'équation transcendante

$$iF\xi = eF\zeta.$$

Il y a donc une infinité de cas où la courbe décrite par un corps attiré vers

deux centres fixes, est une courbe algébrique. Cette courbe sera nécessairement rentrante sur elle-même, lorsque la vitesse initiale sera telle, que le corps ne peut s'éloigner à l'infini; alors il y aura une période composée d'une ou de plusieurs révolutions, laquelle se répétera à l'infini; de sorte qu'il suffira de calculer le mouvement du corps dans une de ces périodes, pour pouvoir assigner le lieu du corps et toutes les circonstances du mouvement au bout d'un temps quelconque.

Les courbes algébriques que nous venons d'indiquer, et qui seront déterminées d'une manière plus particulière dans l'examen que nous ferons des différens cas principaux du problème, sont les seules qu'Euler ait données dans les Mémoires de Berlin, ann. 1760. Mais nous ferons voir qu'il y a une infinité d'autres systèmes de courbes algébriques qui peuvent également satisfaire au problème; et cette multitude de solutions est une nouvelle preuve des avantages que peut procurer, dans les applications, la théorie des fonctions elliptiques.

Recherche des cas principaux contenus dans le premier système.

404. Jusqu'ici nous n'avons considéré que des cas particuliers; nous allons maintenant procéder à l'intégration de l'équation (3). Pour cela, il faudra distinguer dans chacun des deux systèmes indiqués art. 377, les différens cas principaux qui peuvent y être renfermés, et qui donnent lieu à des résultats de forme différente.

En général, on sait que chaque membre de l'équation (3) peut être réduit à la forme $\frac{a\,d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$; cette équation sera donc toujours de la forme

$$k\,.\,\frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}=\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}},$$

et son intégrale sera, par conséquent,

$$k\mathrm{F}(c,\psi)=\mathrm{F}(\varkappa,\zeta)+\text{const.}$$

En supposant que le point A, origine du mouvement, est situé sur l'axe EFG, soit dans son prolongement du côté de F, soit entre les deux centres F et G, on pourra toujours faire en sorte qu'une des variables ψ, ζ soit nulle au point A; alors on devra supposer que $\frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\zeta}{dt}$ sont tous deux positifs, afin que les angles ψ et ζ croissent continuellement avec le temps: c'est sur ce principe que seront dirigées les transformations par lesquelles

on obtient, dans les différens cas, l'équation de la courbe décrite

$$kF(c, \psi) = F(\varkappa, \zeta) + \text{const.}$$

Cette équation, de même forme dans tous les cas, et facile à résoudre pour déterminer tant de points qu'on voudra de l'orbite, est remarquable surtout en ce que le coefficient k s'exprime toujours très simplement par les deux modules c et $\varkappa$; d'où il suit que les cas les plus variés du mouvement d'un corps attiré vers deux centres fixes, sont toujours résolus par une équation finale, où il n'y a que deux constantes arbitraires pour représenter toutes les données du problème.

405. Dans le premier système que nous nous proposons maintenant de développer, le polynome P est de la forme

$$P = M(m - p^2)(p^2 - m'),$$

où l'on suppose m et m' positifs, et $m > m'$. La valeur de p^2 est donc toujours comprise entre les limites m et m'. Or, le lieu de tous les points où l'on a $p^2 = m$, est une ellipse décrite des foyers F et G, et dont le sommet E est placé à la distance $EF = \frac{ma}{1-m}$; de même, le lieu de tous les points où l'on a $p^2 = m'$, est une ellipse décrite des mêmes foyers, et dont le sommet D est placé à la distance $FD = \frac{m'a}{1-m'}$. Donc, dans tous les cas qui appartiennent au premier système, la courbe décrite par le mobile sera toujours comprise dans l'espace que laissent entre eux les périmètres des deux ellipses que nous venons de déterminer; de sorte que les intersections de cette courbe avec l'axe ne pourront se faire que dans les parties de cet axe ED, KL comprises entre les deux ellipses.

406. Nous appellerons *apsides supérieures*, les points de l'orbite S^1, S^2, S^3, etc., où l'on a $p^2 = m$, et *apsides inférieures* les points I^1, I^2, I^3, etc., où l'on a $p^2 = m'$. La raison de cette dénomination est que la somme des rayons vecteurs $r + s$ est un *maximum* dans les premiers points, et un *minimum* dans les autres; mais il importe surtout de remarquer une propriété générale des apsides, tant supérieures qu'inférieures, savoir, que dans ces points l'orbite est toujours tangente à l'ellipse terminatrice $p^2 = m$ ou $p^2 = m'$.

En effet, si l'orbite, qui a un point S commun avec l'ellipse supérieure $p^2 = m$, coupait cette ellipse, il y aurait des points de l'orbite qui appartiendraient à une ellipse plus grande, et pour lesquels, par conséquent, on aurait $p^2 > m$; ce qui ne peut avoir lieu, puisque m est la plus grande

valeur de p^2. De même si l'orbite, qui a un point I commun avec l'ellipse inférieure $p^2 = m'$, entrait dans cette ellipse, il y aurait des points de l'orbite qui appartiendraient à une ellipse plus petite, et pour lesquels on aurait $p^2 < m'$; ce qui ne peut encore avoir lieu, puisque m' est la plus petite valeur de p^2.

Il ne peut y avoir d'exception à cette propriété générale, que dans le cas où l'orbite aurait un point de rebroussement qui aboutirait à l'une des ellipses terminatrices, ou bien dans le cas où la vitesse du corps serait zéro au point S; car alors il reviendrait sur ses pas, en suivant le même arc de courbe.

407. Pour procéder maintenant à l'intégration de l'équation (3), il faut transformer convenablement les deux membres. Et d'abord puisqu'on a $P = M(m - p^2)(p^2 - m')$, si l'on fait $c^2 = 1 - \frac{m'}{m}$ et $p^2 = m(1 - c^2 \sin^2 \psi)$, on aura la transformée

$$-\frac{dp}{\sqrt{P}} = \frac{1}{\sqrt{(mM)}} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}}.$$

On a ensuite, d'après les formules de l'art. 379;

$$(1 - mm')Q = A + Bmm' + (m + m')(A + B)q^2 + (Amm' + B)q^4;$$

mais il y a deux cas à distinguer, selon que les facteurs du second membre sont réels ou imaginaires.

408. *Premier cas*. Si ces facteurs sont imaginaires, ou si l'on a

$$\frac{m - m'}{1 - mm'} < \frac{2\sqrt{AB}}{A + B},$$

on pourra supposer

$$Q = (M - B)(1 + 2\alpha \cos\theta . q^2 + \alpha^2 q^4),$$

α et θ étant déterminés par les équations

$$\alpha^2 = \frac{Amm' + B}{A + Bmm'}, \quad \cos\theta = \frac{\frac{1}{2}(m + m')(A + B)}{\sqrt{(Amm' + B)} . \sqrt{(A + Bmm')}};$$

d'ailleurs on a, comme dans l'art. 378, $M = \frac{A + B}{1 - mm'}$, $M - B = \frac{A + Bmm'}{1 - mm'}$.

Cela posé, si l'on fait $z = \sin\frac{1}{2}\theta$, $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tang \frac{1}{2}\zeta$, on aura la transformée

$$\frac{dq}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{2\sqrt{(M\alpha - B\alpha)}} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - z^2 \sin^2 \zeta)}}.$$

Soit enfin $k = 2\sqrt{\left(\frac{\alpha(M - B)}{mM}\right)} = 2\sqrt{\left(\frac{\alpha(A + Bmm')}{m(A + B)}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2m + 2m'}{m \cos\theta}\right)}$

$= \sqrt{\left(\frac{4-2c^2}{1-2\varkappa^2}\right)}$, et l'équation (3) deviendra

$$\mp k \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}} = \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}};$$

mais j'observe qu'on peut mettre $\pi - \psi$ à la place de ψ, sans changer la valeur supposée $p^2 = m(1 - c^2\sin^2\psi)$; ainsi on peut supprimer le double signe de cette équation, et écrire simplement

$$k \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}} = \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}},$$

ce qui donnera, en intégrant,

$$k\mathrm{F}(c, \psi) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta) + \mathrm{C}''.$$

409. Il s'agit maintenant de déterminer la constante C''. Or, d'après l'état initial du mouvement, tel qu'il est supposé dans l'art. 374, on doit avoir au point A, $q = 0$ et $p^2 = m^0$. Faisant donc $\zeta = 0$ et $\psi = \varepsilon$, ce qui donnera $m^0 = m(1 - c^2\sin^2\varepsilon)$, ou

$$\sin^2\varepsilon = \frac{m-m^0}{mc^2} = \frac{m-m^0}{m-m'},$$

on aura $\mathrm{C}'' = -k\mathrm{F}(c, \varepsilon)$; ainsi l'équation de la courbe sera

$$k\mathrm{F}(c, \psi) - k\mathrm{F}(c, \varepsilon) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta).$$

Mais il importe de savoir si l'angle ε, déterminé par la valeur de $\sin^2\varepsilon$, est aigu ou obtus; car l'équation de la courbe ne serait plus la même si l'on mettait $\pi - \varepsilon$ à la place de ε.

Pour cela il faut, comme nous l'avons déjà dit, faire en sorte que les coefficiens $\frac{d\zeta}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$ soient tous deux positifs au commencement du mouvement. Or, on a au point A, $\varphi = 0$, $\omega = 0$, $q = 0$, $p = \sqrt{m^0}$, $dr = \mathrm{V}dt\cos\mu$, $rd\varphi = \mathrm{V}dt\sin\mu$; d'un autre côté les équations $r = \frac{a}{1-p^2} - \frac{a}{1+q^2}$, $\tang\frac{1}{2}\varphi = \frac{q}{p}$ étant différenciées, donnent au même point A où $q = 0$, $dr = \frac{2apdp}{(1-p^2)^2}$, $\frac{1}{2}d\varphi = \frac{dq}{p}$; donc $\frac{dq}{dt} = \frac{p}{2}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{p}{2r}\mathrm{V}\sin\mu = \frac{(1-m^0)\sqrt{m^0}}{2am^0}\mathrm{V}\sin\mu$; mais on a en général $q = \frac{1}{\sqrt{a}}\tang\frac{1}{2}\zeta$, ce qui donne au point A, $\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{d\zeta}{dt}$; donc

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{1-m^0}{2a}\sqrt{\left(\frac{a}{m^0}\right)} \cdot \mathrm{V}\sin\mu;$$

cette valeur est toujours positive. Pour avoir celle de $\frac{d\psi}{dt}$, j'observe qu'on a $dr = \mathrm{V}dt\cos\mu = \frac{2apdp}{(1-p^2)^2}$; donc au point A, $\frac{dp}{dt} = \frac{(1-m^0)^2}{2a\sqrt{m^0}}.\mathrm{V}\cos\mu$; d'ailleurs l'équation $p^2 = m(1 - c^2\sin^2\psi)$ donne $pdp = -mc^2\sin\psi\cos\psi d\psi$; donc au point A, où $\psi = \varepsilon$, on a

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\sqrt{m^0}}{mc^2\sin\varepsilon\cos\varepsilon}.\frac{dp}{dt} = -\frac{(1-m^0)^2\,\mathrm{V}\cos\mu}{2amc^2\sin\varepsilon\cos\varepsilon}.$$

De là on voit que pour rendre $\frac{d\psi}{dt}$ positif, il faut toujours prendre $\cos\varepsilon$ de signe contraire à $\cos\mu$, c'est-à-dire que les angles ε et μ seront toujours, l'un aigu, l'autre obtus.

Par cette condition, l'angle ε sera entièrement déterminé, et la courbe décrite par le mobile se construira au moyen de l'équation

$$k\mathrm{F}(c, \psi) - k\mathrm{F}(c, \varepsilon) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta),$$

qu'il faudra combiner avec les équations $p^2 = m(1 - c^2\sin^2\psi)$, $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tang\frac{1}{2}\zeta$. On voit par ces dernières, que p restera toujours positive, mais que q prendra toutes les valeurs positives et négatives, depuis zéro jusqu'à l'infini. On déterminera d'ailleurs les coordonnées x et y par les formules de l'art. 381, où l'on voit que l'ordonnée y change de signe en même temps que la variable q.

410. L'équation qu'on vient de trouver pour la courbe décrite, peut en général se réduire à deux termes; car en faisant $\mathrm{F}(\psi) - \mathrm{F}(\varepsilon) = \mathrm{F}(\xi)$, c étant le module commun à ces fonctions, on aura

$$k\mathrm{F}(c, \xi) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta);$$

mais alors il faudrait exprimer p en fonction de ξ. Or, d'après l'équation supposée, on a (art. 18), en faisant $\sqrt{(1 - c^2\sin^2\xi)} = \Delta(\xi)$ et.... $\sqrt{(1 - c^2\sin^2\varepsilon)} = \Delta(\varepsilon)$,

$$p = \sqrt{m}.\frac{\Delta\varepsilon\Delta\xi - c^2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin\xi\cos\xi}{1 - c^2\sin^2\varepsilon\sin^2\xi}.$$

Mais cette expression étant assez compliquée, il est préférable de laisser l'équation de la courbe dans sa forme à trois termes, laquelle, d'ailleurs, n'est pas moins facile à résoudre, lorsqu'il s'agit de déterminer ψ par le moyen de ζ, ou réciproquement.

Cette équation se simplifie d'elle-même dans les deux cas particuliers où

le point A, origine du mouvement, est une apside supérieure ou inférieure.

411. Si le point A est une apside supérieure, ce point ne pourra être qu'un des sommets de l'ellipse $p^2 = m$; on aura par conséquent, dans ce point, $m^0 = m$ et $\mu = \frac{1}{2}\pi$, ce qui donnera $\epsilon = 0$, et l'équation de la courbe sera simplement

$$kF(c, \psi) = F(x, \zeta).$$

Si le point A est une apside inférieure, ce point sera un sommet de l'ellipse $p^2 = m'$, et on aura $m^0 = m'$, $\mu = \frac{1}{2}\pi$, ce qui donnera $\epsilon = \frac{1}{2}\pi$. Dans ce cas, l'équation de la courbe contient encore trois termes, savoir, $kF(c, \psi) - kF^0 c = F(x, \zeta)$; mais en faisant la même transformation que dans l'article précédent, et substituant dans la formule la valeur $\epsilon = \frac{1}{2}\pi$, on trouve $p = \frac{b\sqrt{m}}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \xi)}} = \frac{\sqrt{m'}}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \xi)}}$, $kF(c, \xi) = F(x, \zeta)$; et comme rien n'empêche de mettre ψ au lieu de ξ dans ce résultat, l'équation de la courbe sera toujours de la forme

$$kF(c, \psi) = F(x, \zeta);$$

mais on aura $p = \frac{\sqrt{m'}}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}}$ et $q = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{tang} \frac{1}{2}\zeta$.

412. *Second cas*. Si les facteurs du polynome Q sont réels, ou si l'on a

$$\frac{m - m'}{1 - mm'} > \frac{2\sqrt{AB}}{A + B},$$

on pourra supposer

$$Q = (M - B)(1 + \alpha q^2)(1 + \alpha' q^2),$$

α et α' étant des quantités réelles et positives données par les équations

$$\alpha + \alpha' = \frac{(m + m')(A + B)}{A + Bmm'}, \quad \alpha\alpha' = \frac{Amm' + B}{A + Bmm'}.$$

Soit $\alpha > \alpha'$, si l'on fait $x^2 = 1 - \frac{\alpha'}{\alpha}$ et $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tang} \zeta$, on aura la transformée

$$\frac{dq}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha M - \alpha B)}} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - x^2 \sin^2 \zeta)}}.$$

Soit enfin $k = \sqrt{\left(\frac{\alpha(M - B)}{mM}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2 - c^2}{2 - x^2}\right)}$, et on aura l'équation de la courbe

$$kF(c, \psi) - kF(c, \epsilon) = F(x, \zeta),$$

ϵ étant la valeur de ψ au point A, donnée par l'équation

$$\sin^2 \varepsilon = \frac{m - m^0}{m - m'}.$$

On trouvera, comme ci-dessus, que l'angle ε est toujours de même espèce que $\pi - \mu$, ce qui achèvera de déterminer cet angle. Ensuite, pour construire la courbe, il faudra joindre à l'équation précédente les équations

$$p^2 = m(1 - c^2 \sin^2 \psi), \quad q = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{tang} \zeta.$$

413. Si le point A est une apside supérieure, on aura $\varepsilon = 0$, et l'équation de la courbe sera simplement

$$k\mathrm{F}(c, \psi) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta).$$

Si le point A est une apside inférieure, on aura $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$; alors l'équation de la courbe sera encore de la même forme, mais on aura ..... $p^2 = \frac{m'}{1 - c^2 \sin^2 \psi}$ et $q = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{tang} \zeta$.

Les deux cas principaux que nous venons de développer sont les seuls qui soient compris dans le premier système. Nous allons donc passer à l'examen des cas qui appartiennent au second système; mais pour cet effet il faut, comme nous l'avons déjà dit, déterminer les constantes C et C′ dans l'hypothèse que le point A, origine du mouvement, est situé sur l'axe entre les deux centres des forces F et G.

Recherche des cas principaux contenus dans le second système.

414. On a déjà vu que, dans le second système, la valeur de P doit toujours être de la forme

$$\mathrm{P} = \mathrm{M}(m - p^2)(p^2 + m'),$$

dans laquelle m est positif et < 1, m' étant positif aussi, mais d'une grandeur non limitée.

Dans ce système, la valeur de p^2 varie entre les limites zéro et m; tous les points où $p^2 = m$ sont les apsides supérieures S^1, S^2, S^3, etc., dans lesquelles l'orbite est tangente à l'ellipse terminatrice $p^2 = m$; tous les points où $p^2 = 0$ peuvent être regardés comme des apsides inférieures I^1, I^2, I^3, etc., puisque la somme des rayons vecteurs FI + IG, égale à FG, est un *minimum*; ces points sont en même temps les intersections de la courbe avec l'axe entre les deux centres F et G.

415. Soit A le point de l'axe situé entre F et G, qu'on prend pour ori- Fig. 19.

gine du mouvement; soit V la vitesse initiale, et μ l'angle EAH que fait la direction de cette vitesse avec l'axe : les angles μ, φ, ω sont ouverts d'un même côté; ils prennent naissance lorsque leurs côtés sont confondus avec la partie de l'axe dirigée dans le sens GFE.

Cela posé, on aura, au point A, les valeurs $t = 0$, $\varphi = \pi$, $\omega = 0$, $p^2 = 0$, $q^2 = m^0$, $r = \frac{am^0}{1+m^0}$, $s = \frac{a}{1+m^0}$, $\frac{rd\varphi}{dt} = -V \sin\mu$, $\frac{sd\omega}{dt} = V \sin\mu$. Substituant ces valeurs dans les équations (1) et (2), afin de déterminer les constantes C et C', on en déduira

$$C = \tfrac{1}{2} aV^2 - \left(\frac{A}{m^0} + B\right)(1 + m^0),$$

$$C' = A + B - \frac{aV^2 m^0 \sin^2\mu}{(1+m^0)^2}.$$

Mais puisqu'on a en général

$$P = \tfrac{1}{2} A - \tfrac{1}{2} B + \tfrac{1}{2} C' + (C + C') p^2 - (\tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{2} B + \tfrac{1}{2} C') p^4,$$

et que cette même quantité est représentée, dans le second système, par la formule

$$P = M [mm' + (m - m') p^2 - p^4],$$

on aura pour déterminer M, m, m', les équations

$$mm' = \frac{\frac{1}{2} aV^2 m^0 \sin^2\mu}{(A+B)(1+m^0)^2 - \frac{1}{2} aV^2 m^0 \sin^2\mu},$$

$$m - m' = \frac{\left(\frac{1}{2} aV^2 - \frac{A}{m^0} - Bm^0\right)(1+m^0)^2 - aV^2 m^0 \sin^2\mu}{(A+B)(1+m^0)^2 - \frac{1}{2} aV^2 m^0 \sin^2\mu},$$

$$M = \frac{A+B}{1+mm'} = A + B - \tfrac{1}{2} aV^2 . \frac{m^0 \sin^2\mu}{(1+m^0)^2};$$

ensuite la valeur de Q sera donnée par la formule

$$(1 + mm') Q = A - Bmm' + (A + B)(m - m') q^2 + (B - Amm') q^4.$$

416. Procédons maintenant à l'intégration de l'équation (3), et soit d'abord $p = \sqrt{m} \cos\xi$, $c^2 = \frac{m}{m+m'}$, on aura la transformée

$$\frac{dp}{\sqrt{P}} = -\frac{c}{\sqrt{(Mm)}} . \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\xi)}};$$

mais il convient d'obtenir un résultat positif, parce que la première valeur de p étant zéro, celle de $\frac{dp}{dt}$ doit être positive. Or, en faisant $F^2 c - F(c, \xi) = F(c, \psi)$, ou algébriquement $\tang\xi \tang\psi = \frac{1}{c}$, on aura $\frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\psi)}}$

$= -\frac{d\xi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\xi)}}$; et comme l'équation supposée donne $\cos\xi = \ldots\ldots$ $\frac{b\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, il s'ensuit que si l'on fait directement $p = \frac{c\sqrt{m'}\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, on aura

$$\frac{dp}{\sqrt{P}} = \frac{c}{\sqrt{(Mm)}} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}.$$

Cette valeur restera toujours la même dans tous les cas du second système; mais celle de $\frac{dq}{\sqrt{Q}}$ sera d'une forme différente, suivant les différens cas, c'est-à-dire suivant les différentes formes que peuvent prendre les facteurs dont le polynome Q est composé. Nous allons examiner successivement ces différens cas, mais nous nous bornerons toujours à ceux qui supposent les quantités A et B positives.

417. *Premier cas.* Supposons qu'on ait à la fois $A > Bmm'$ et $B > Amm'$, en sorte que mm' soit non-seulement moindre que l'unité, mais moindre que le plus petit des rapports $\frac{B}{A}$, $\frac{A}{B}$. Soit de plus $(A+B)^2(m-m')^2 \ldots\ldots$ $< 4(A-Bmm')(B-Amm')$, ou, ce qui revient au même,

$$\frac{m+m'}{1+mm'} < \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}.$$

Ces conditions ayant lieu, on pourra faire

$$Q = (M-B)(1+2\alpha\cos\theta \cdot q^2 + \alpha^2 q^4),$$

α et θ étant déterminés par les équations

$$\alpha^2 = \frac{B-Amm'}{A-Bmm'}, \quad \alpha\cos\theta = \frac{\frac{1}{2}(m-m')(A+B)}{A-Bmm'}.$$

Cela posé, soit $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tang\frac{1}{2}\zeta$, $\varkappa = \sin\frac{1}{2}\theta$, on aura la transformée

$$\frac{dq}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{2\sqrt{(M\alpha - B\alpha)}} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}.$$

Soit enfin

$$k = 2c\sqrt{\left(\frac{M\alpha - B\alpha}{Mm}\right)} = 2\sqrt{\left(\frac{\alpha}{m+m'} \cdot \frac{m-m'}{2\alpha\cos\theta}\right)} = \sqrt{\left(\frac{4c^2-2}{1-2\varkappa^2}\right)},$$

l'équation (3) deviendra

$$k \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}} = \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}},$$

et son intégrale sera

$$kF(c,\psi) = F(\varkappa,\zeta) - F(\varkappa,\varepsilon),$$

ϵ étant la valeur de ζ lorsque $t=0$: alors on a $q=\sqrt{m^0}$; ainsi ϵ est donné par l'équation $\tang \frac{1}{2}\epsilon=\sqrt{(am^0)}$.

418. Cherchons maintenant les valeurs de $\frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\zeta}{dt}$ lorsque $t=0$. Puisqu'on a $r=\frac{a}{1-p^2}-\frac{a}{1+q^2}$, $\tang \frac{1}{2}\omega=pq$, ces équations étant différenciées, donnent pour le point A où $p=0$ et $\omega=0$, $dr=\frac{2aqdq}{(1+q^2)^2}$, $\frac{1}{2}d\omega=qdp$; donc $\frac{dp}{dt}=\frac{1}{2q}\cdot\frac{d\omega}{dt}=\frac{1+m^0}{2a\sqrt{m^0}}.V\sin\mu$. Cette valeur est positive; donc $\frac{d\psi}{dt}$, qui est du même signe que $\frac{dp}{dt}$, est aussi positif. Il reste à faire en sorte que $\frac{d\zeta}{dt}$ soit aussi positif.

Or, on a $dr=-Vdt\cos\mu=\frac{2aqdq}{(1+q^2)^2}$; donc $\frac{dq}{dt}=\frac{(1+m^0)^2}{2a\sqrt{m^0}}V\cos(\pi-\mu)$; d'un autre côté, l'équation $q=\frac{1}{\sqrt{a}}\tang\frac{1}{2}\zeta$ donne $dq=\frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot\frac{d\zeta}{\cos^2\frac{1}{2}\zeta}$; donc au point A, on aura

$$\frac{d\zeta}{dt}=\frac{(1+m^0)^2\sqrt{a}}{a(1+am^0)\sqrt{m^0}}.V\cos(\pi-\mu).$$

Ainsi la valeur de $\frac{d\zeta}{dt}$ ne sera positive que lorsque l'angle μ sera plus grand qu'un droit. Dans cette hypothèse, l'équation de l'article précédent est exacte, et il n'y a aucune ambiguïté sur la valeur de l'angle ϵ déduit de l'équation $\tang\frac{1}{2}\epsilon=\sqrt{(am^0)}$.

419. Mais si l'angle μ est moindre qu'un droit, alors le coefficient $\frac{d\zeta}{dt}$ deviendra négatif, et l'équation (3), dans laquelle nous avions négligé le double signe, devra être écrite ainsi,

$$\frac{kd\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}=-\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}.$$

Pour la ramener à la forme ordinaire, nous prendrons une nouvelle variable ξ, telle que $\tang\xi\tang\zeta=\frac{1}{c}=\frac{1}{\sqrt{(1-\varkappa^2)}}$, ce qui donnera..... $-\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}=\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\xi)}}$; alors q devra être exprimée en fonction de ξ, et on aura $q=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\cos\xi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\xi)}+\varkappa\sin\xi}$. Par le moyen de cette valeur substituée directement dans la quantité $\frac{dq}{\sqrt{Q}}$, on aurait trouvé.. $-\frac{dq}{\sqrt{Q}}=\frac{1}{2\sqrt{(M\alpha-B\alpha)}}\cdot\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\xi)}}$; ainsi l'équation (3), qui est alors

$\frac{dp}{\sqrt{P}} = -\frac{dq}{\sqrt{Q}}$, a pour transformée

$$\frac{k d\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}} = \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \xi)}},$$

et son intégrale est

$$kF(c, \psi) = F(\varkappa, \xi) - F(\varkappa, \varepsilon),$$

ε étant déterminé par l'équation $\sqrt{(am^0)} = \frac{\cos \varepsilon}{\sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \varepsilon)} + b \sin \varepsilon}$; d'où l'on tire

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{1 - am^0}{2\mathfrak{C}\sqrt{(am^0)}}.$$

420. Il résulte de cette analyse, que, dans tous les cas, l'équation de la courbe sera représentée par la même formule

$$kF(o, \psi) = F(\varkappa, \zeta) - F(\varkappa, \varepsilon);$$

que, dans tous les cas, la valeur de p sera $p = \frac{c\sqrt{m'} \sin \psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}}$; mais que les formules qui donnent les valeurs de la variable q et de la constante ε, seront différentes, selon que l'angle μ qui détermine la direction de la vitesse initiale est plus grand ou plus petit qu'un angle droit.

Si l'on a $\mu > \frac{1}{2}\pi$, les formules dont il s'agit seront

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \varepsilon = \sqrt{(am^0)}, \quad q = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \zeta;$$

si l'on a $\mu < \frac{1}{2}\pi$, ces formules seront

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{1 - am^0}{2\mathfrak{C}\sqrt{(am^0)}}, \quad q = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\cos \zeta}{\sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \zeta)} + \mathfrak{C} \sin \zeta}.$$

421. On pourra éviter la distinction de ces deux cas, et s'en tenir au premier, qui est le plus simple, si l'on désigne constamment par F celui des deux centres où l'angle FAH, formé par la tangente AH avec l'axe du côté de F, est un angle obtus. Cette hypothèse ne diminue en rien la généralité de la solution, puisque d'ailleurs m^0, qui représente le rapport $\frac{FA}{AG}$, peut avoir une valeur quelconque depuis zéro jusqu'à l'infini, et qu'il n'y a aucun avantage à supposer le point A plus près de F que de G, ce qui rendrait $m^0 < 1$.

Pour éviter une subdivision inutile, nous choisirons de même, dans les autres cas généraux qui nous restent à examiner, le centre relativement auquel la solution se présente sous la forme la plus simple, lorsque cette solution sera susceptible de deux formes.

422. Nous pourrions passer sous silence le cas de $\mu = \frac{1}{2}\pi$, parce que ce cas particulier ne peut avoir lieu dans le cas général dont nous nous occupons. En effet, comme on aurait alors $\frac{dq}{dt} = 0$, il faudrait qu'on eût en même temps $Q = 0$, et qu'ainsi $q^2 - m^0$ fût facteur du polynome Q; ce qui n'a pas lieu, puisque les facteurs de Q sont imaginaires, excepté dans le seul cas de $\theta = 0$, où ils deviennent égaux et de la forme $1 + \alpha q^2$, non semblable a $q^2 - m^0$.

Au reste, si, dans la supposition de $\mu = \frac{1}{2}\pi$, on cherchait à vérifier la condition $(A + B)^2 (m - m')^2 < 4(A - Bmm')(B - Amm')$, d'après les valeurs de mm' et $m - m'$ données art. 419, on trouverait que cette condition n'a pas lieu; car elle donnerait pour résultat,

$$\left[\tfrac{1}{2} aV^2 (1 - m^0) = \left(\frac{A}{m^0} + Bm^0\right)(1 + m^0)\right]^2 < 0.$$

Ainsi lorsqu'on a $\frac{m + m'}{1 + mm'} < \frac{2\sqrt{AB}}{A + B}$, l'orbite ne coupera jamais l'axe à angles droits entre les deux centres F et G.

423. *Second cas.* Soit encore $A > Bmm'$ et $B > Amm'$, et supposons de plus qu'on ait

$$\frac{m + m'}{1 + mm'} > \frac{2\sqrt{AB}}{A + B};$$

ces conditions ayant lieu, les facteurs du polynome Q seront réels, mais il y aura deux cas à distinguer, selon que $m - m'$ est positif ou négatif.

424. Soit, 1°. $m' < m$, on pourra faire

$$Q = (M - B)(1 + \alpha q^2)(1 + \alpha' q^2),$$

α et α' étant des quantités réelles et positives données par les équations

$$\alpha + \alpha' = \frac{(m - m')(A + B)}{A - Bmm'}, \quad \alpha\alpha' = \frac{B - Amm'}{A - Bmm'}.$$

Soit $\alpha > \alpha'$; si l'on fait $x^2 = 1 - \frac{\alpha'}{\alpha}$ et $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tang} \zeta$, on aura $\frac{dq}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{\sqrt{(M\alpha - B\alpha)}} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - x^2 \sin^2 \zeta)}}$. Soit ensuite

$$k = c\sqrt{\left(\frac{M\alpha - B\alpha}{Mm}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2c^2 - 1}{2 - x^2}\right)},$$

l'équation (3) deviendra $k \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}} = \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - x^2 \sin^2 \zeta)}}$, et son intégrale sera

$$kF(c, \psi) = F(x, \zeta) - F(x, \varepsilon),$$

ε étant la valeur de ζ au commencement du mouvement, valeur connue par l'équation

$$\tang \varepsilon = \sqrt{(am^0)}.$$

Mais pour que l'équation générale, dans laquelle nous avons supprimé le signe ambigu, soit exacte, il faut que $\frac{d\zeta}{dt}$ soit positif. Or on a, au point A, comme dans l'art. 418, $\frac{dq}{dt} = \frac{(1+m^0)^2}{2a\sqrt{m^0}}.V\cos(\pi-\mu)$. D'ailleurs l'équation $q = \frac{1}{\sqrt{a}}\tang\zeta$, donne au même point, $\frac{d\zeta}{dt} = \sqrt{a}.\cos^2\varepsilon.\frac{dq}{dt}$; donc $\frac{d\zeta}{dt}$ sera positif si $\cos(\pi-\mu)$ est positif, ou si l'on a $\mu > \frac{1}{2}\pi$.

Dans le cas contraire, il faudra transformer la variable ζ comme on l'a fait dans l'art. 419; mais on peut se dispenser de ce calcul, en choisissant, pour le centre F, celui des deux pour lequel l'angle μ est plus grand qu'un angle droit.

425. Soit, 2°. $m' > m$, les autres conditions étant les mêmes que dans l'art. 423, on pourra faire

$$Q = (M - A)(q^2 - \alpha)(q^2 - \alpha'),$$

α et α' étant des quantités réelles et positives données par les équations

$$\alpha + \alpha' = \frac{(m'-m)(A+B)}{B - Amm'}, \quad \alpha\alpha' = \frac{A - Bmm'}{B - Amm'}.$$

Soit $\alpha > \alpha'$; si l'on fait $x^2 = \frac{\alpha'}{\alpha}$ et $q = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sin\zeta}$, on aura $-\frac{dq}{\sqrt{Q}} = \ldots\ldots$ $\frac{1}{\sqrt{(M\alpha - A\alpha)}} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - x^2\sin^2\zeta)}}$. Soit donc $k = c\sqrt{\left(\frac{\alpha}{m}.\frac{M-A}{M}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1-2c^2}{1+x^2}\right)}$, et l'équation (3) deviendra, en supprimant le signe ambigu et intégrant,

$$kF(c, \psi) = F(x, \zeta) - F(x, \varepsilon);$$

c'est l'équation de la courbe qu'il faudra combiner avec les équations

$$p = \frac{c\sqrt{m'}\sin\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}, \quad q = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sin\zeta}.$$

426. Pour déterminer la constante ε, on aura d'abord l'équation $\sin\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{m^0}\right)}$; mais cette équation laisse incertain si l'angle ε est aigu ou obtus. Il faut fixer cette incertitude en satisfaisant à la condition que $\frac{d\zeta}{dt}$ soit positif au commencement du mouvement.

Or on a, comme dans l'art. 418, $\frac{dq}{dt} = \frac{(1+m^0)}{2a\sqrt{m^0}} . V\cos(\pi - \mu)$; d'ailleurs l'équation $q = \frac{\sqrt{a}}{\sin\zeta}$ donne au point A, $\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{\sin^2\varepsilon}{\sqrt{a}.\cos\varepsilon} . \frac{dq}{dt}$, ou

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{(1+m^0)^2}{2am^0} . V\cos\mu \operatorname{tang}\varepsilon;$$

donc $\frac{d\zeta}{dt}$ sera toujours positif, si l'on prend ε de même espèce que μ. Cette condition, jointe à la valeur $\sin\varepsilon = \sqrt{\frac{a}{m^0}}$, détermine complétement l'angle ε, qui, dans ce cas comme dans tous les autres, est toujours moindre que deux angles droits.

Si l'angle μ est droit, c'est-à-dire si la tangente en A est perpendiculaire à l'axe, on aura aussi $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$, et l'équation $\sin\varepsilon = \sqrt{\frac{a}{m^0}}$ donnera $a = m^0$; alors Q aura pour facteur $q^2 - m^0$; c'est un cas dont nous avons déjà rencontré un exemple, art. 422.

Dans ce cas, l'équation de la courbe deviendra $kF(c, \psi) = F(x, \zeta) - F'x$, et on peut réduire le second membre à un seul terme, en faisant $F(x,\zeta) - F'x = F(x, \zeta')$, ce qui donnera $\sin\zeta = \frac{\cos\zeta'}{\sqrt{(1 - x^2\sin^2\zeta')}}$. Supprimant ensuite les accens dans le résultat, on voit que pour le cas de $\mu = \frac{1}{2}\pi$, on aura les équations

$$kF(c, \psi) = F(x, \zeta), \quad p = \frac{c\sqrt{m'}.\sin\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}, \quad q = \sqrt{a}.\frac{\sqrt{(1 - x^2\sin^2\zeta)}}{\cos\zeta}.$$

427. *Troisième cas.* Supposons maintenant $A < Bmm'$ et $B > Amm'$, ou, en d'autres termes, $A < B$, et mm' tout-à-la-fois $> \frac{A}{B}$ et $< \frac{B}{A}$; alors on devra faire

$$Q = (M - A)(q^2 - \alpha)(q^2 + \alpha'),$$

α et α' étant des quantités réelles et positives déterminées par les équations

$$\alpha - \alpha' = \frac{(m' - m)(A + B)}{B - Amm'}, \quad \alpha\alpha' = \frac{Bmm' - A}{B - Amm'}.$$

Soit $x^2 = \frac{\alpha'}{\alpha + \alpha'}$ et $q = \frac{\sqrt{a}}{\cos\zeta}$, on aura $\frac{dq}{\sqrt{Q}} = \frac{x}{\sqrt{(M\alpha' - A\alpha')}} . \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - x^2\sin^2\zeta)}}$; soit enfin $k = \frac{c}{x}\sqrt{\left(\frac{\alpha'}{m} . \frac{M - A}{M}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1 - 2c^2}{1 - 2x^2}\right)}$, l'équation (3) deviendra, en substituant et en intégrant,

$$kF(c, \psi) = F(x, \zeta) - F(x, \varepsilon):$$

c'est l'équation de la courbe qu'il faudra combiner avec les équations

$$p = \frac{c\sqrt{m'}\,.\,\sin\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}, \quad q = \frac{\sqrt{a}}{\cos\zeta}.$$

Quant à la valeur de ε, elle devra satisfaire à l'équation $\cos\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{a}{m^2}\right)}$, où l'on voit que ε sera toujours $< \frac{1}{2}\pi$; mais il faut en outre que le coefficient $\frac{d\zeta}{dt}$ soit positif à l'origine du mouvement.

Or, l'équation $q\cos\zeta = \sqrt{a}$ donne au point A, $\frac{d\zeta}{dt} = \frac{dq}{dt}\cot\varepsilon$; substituant la valeur de $\frac{dq}{dt}$ de l'art. 418, il viendra

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{(1 + m^2)^2}{2a\sqrt{m^2}}\,\mathrm{V}\cot\varepsilon\cos(\pi - \mu);$$

ainsi la valeur de $\frac{d\zeta}{dt}$ ne sera positive que lorsqu'on aura $\mu > \frac{1}{2}\pi$.

Si l'on a $\mu = \frac{1}{2}\pi$, il faudra, d'après l'équation précédente, qu'on ait $\varepsilon = 0$, et par conséquent $a = m^2$; c'est aussi ce qu'on peut vérifier, d'après les équations de l'art. 415, en y faisant $\mu = \frac{1}{2}\pi$, et combinant ces équations avec celles qui, dans le cas présent, servent à déterminer a et a'.

Dans ce cas donc, l'équation de la courbe se simplifie et devient $k\mathrm{F}(c, \psi) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta)$. On peut d'ailleurs s'assurer que la valeur de $\frac{d\zeta}{dt}$, qui reste indéterminée dans la formule précédente, devra être positive. En effet, puisqu'on a $a = m^2$, la valeur de Q devient

$$\mathrm{Q} = (\mathrm{M} - \mathrm{A})(q^2 - m^2)(q^2 + a'),$$

d'où l'on voit que m^2 est la plus petite valeur de q^2; donc $\frac{dq}{dt}$ est positif, et par conséquent aussi $\frac{d\zeta}{dt}$.

428. Si l'angle λ est $< \frac{1}{2}\pi$, on ne pourra plus, comme dans les cas précédens, obtenir la solution en choisissant pour le centre F' celui qui est placé du côté de l'angle $\mu > \frac{1}{2}\pi$; car l'échange qu'on ferait entre A et B, substituerait aux conditions $\mathrm{A} < \mathrm{B}mm'$, $\mathrm{B} > \mathrm{A}mm'$, des conditions différentes $\mathrm{B} < \mathrm{A}mm'$, $\mathrm{A} > \mathrm{B}mm'$, inconvénient qui ne s'est pas rencontré dans les cas précédens. Mais il y a un moyen très simple de changer la variable ζ, pour laquelle $\frac{d\zeta}{dt}$ sera négatif, en une autre ζ', pour laquelle $\frac{d\zeta'}{dt}$ sera positif; il consiste, comme nous l'avons déjà vu, à faire $\mathrm{F}\zeta + \mathrm{F}\zeta' = \mathrm{F}'\varkappa$

$\varkappa$ étant le module commun, ce qui donnera $\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}=-\frac{d\zeta'}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta')}}$.

Et comme par cette supposition on a $\tang\zeta\ \tang\zeta'=\frac{1}{\varepsilon}$, il en résulte..

$\cos\zeta=\frac{\varepsilon\sin\zeta'}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta')}}$, et $q=\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}\cdot\frac{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta')}}{\sin\zeta'}=\frac{\sqrt{\alpha'}}{\varkappa}\cdot\frac{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta')}}{\sin\zeta'}$.

Soit d'ailleurs ε' la valeur de ζ' lorsque $t=0$, ou lorsque $q^2=m^2$, on aura $\cos\varepsilon'=\sqrt{\left(\frac{m^2-\alpha}{m^2+\alpha'}\right)}$.

Cela posé, on peut supprimer les accens qui affectent ζ' et ε', et la solution, pour le cas de $\mu<\frac{1}{2}\pi$, sera donnée par les formules

$$kF(c,\psi)=F(\varkappa,\zeta)-F(\varkappa,\varepsilon),$$

$$p=\frac{c\sqrt{m'}.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}},\quad q=\frac{\sqrt{\alpha'}}{\varkappa}\cdot\frac{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}{\sin\zeta},\quad \cos\varepsilon=\sqrt{\left(\frac{m^2-\alpha}{m^2+\alpha'}\right)}.$$

429. Ici se termine l'examen que nous voulions faire des cas principaux du problème. Car si on avait à la fois $B<Amm'$ et $A>Bmm'$, ce cas, qui suppose $A>B$, est entièrement semblable au troisième cas, où l'on a $A<Bmm'$ et $B>Amm'$, qui suppose $B>A$. Ces deux cas se réduiront à un seul, en désignant constamment par F celui des deux centres ou réside la moindre force. Enfin si l'on supposait pour dernière combinaison $A<Bmm'$ et $B<Amm'$, ce qui rendrait négatifs le premier et le troisième terme du polynome Q, il faudrait qu'au moins le second fût positif, et qu'ainsi on eût $m'<m$; mais les conditions $A<Bmm'$, $B<Amm'$, supposent $mm'>1$, ou $m'>\frac{1}{m}$, ce qui ne peut s'accorder avec la condition $m'<m$. Ainsi ce cas ne peut avoir lieu.

430. Pour plus de clarté, nous joignons ici un tableau général qui contient le résultat de tous les calculs précédens. On y trouvera les formules qui servent à distinguer et à résoudre les différens cas principaux dans lesquels se divise le problème général du mouvement d'un corps attiré vers deux centres fixes.

Tableau général des cas principaux du Problème.

Nota. Dans les deux premiers cas, les valeurs de m et m' se déduisent des données immédiates du problème m°, V. μ, par les formules de l'art. 378; ces deux cas composent le premier système, dans lequel la courbe décrite ne peut jamais rencontrer son axe entre les centres F et G.

Dans les quatre autres cas, les valeurs de m et m' sont déduites des données m°, V, μ, par les formules de l'art. 415; ces cas composent le second système, dans lequel il y a toujours, entre les centres F et G, un ou plusieurs points d'intersection de la courbe avec l'axe; le point A, origine du mouvement, auquel se rapportent les données m°, V, μ, est un de ces points d'intersection.

Conditions et dénominations.	Équation de la courbe.
CAS I.	
$m' < m, \quad c^2 = 1 - \frac{m'}{m},$ $\frac{m-m'}{1-mm'} < \frac{2\sqrt{AB}}{A+B},$ $\alpha^2 = \frac{Amm'+B}{A+Bmm'}, \cos\theta = \frac{\frac{1}{2}(m+m')(A+B)}{\sqrt{(Amm'+B)}.\sqrt{(A+Bmm')}}$ $\varkappa = \sin\frac{1}{2}\theta, \qquad k = \sqrt{\left(\frac{4-2c^2}{1-2\varkappa^2}\right)},$ $\sin^2 \varepsilon = \frac{m-m^\circ}{m-m'},$ ε de même espèce que $\varpi - \mu$.	$kF(c,\psi) - kF(c,\varepsilon) = F(\varkappa,\zeta),$ $p^2 = m(1 - c^2\sin^2\psi),$ $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.\tang\frac{1}{2}\zeta.$
Corollaire I. Si l'on a $m^\circ = m$,	$\begin{cases} kF(c,\psi) = F(\varkappa,\zeta), \\ p^2 = m(1 - c^2\sin^2\psi), \\ q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.\tang\frac{1}{2}\zeta. \end{cases}$
Corollaire II. Si l'on a $m^\circ = m'$,	$\begin{cases} kF(c,\psi) = F(\varkappa,\zeta), \\ p^2 = \frac{m'}{1 - c^2\sin^2\psi}, \\ q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.\tang\frac{1}{2}\zeta. \end{cases}$

Conditions et dénominations.	Équation de la courbe.
CAS II. $m' < m$, $c^2 = 1 - \frac{m'}{m}$, $\frac{m-m'}{1-mm'} > \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}$, $\alpha + \alpha' = \frac{(m+m')(A+B)}{A+Bmm'}$, $\alpha\alpha' = \frac{Amm'+B}{A+Bmm'}$, $\alpha > \alpha'$, $\varkappa^2 = 1 - \frac{\alpha'}{\alpha}$, $k = \sqrt{\left(\frac{2-c^2}{2-\varkappa^2}\right)}$, $\begin{cases} \sin^2 \iota = \frac{m-m^\circ}{m-m'}, \\ \iota \text{ de même espèce que } \pi - \mu. \end{cases}$	$kF(c,\psi) - kF(c,\iota) = F(\varkappa,\zeta)$, $p^2 = m(1 - c^2\sin^2\psi)$, $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.\tang\zeta$.
Corollaire II. Si l'on a $m^\circ = m$,	$\begin{cases} kF(c,\psi) = F(\varkappa,\zeta), \\ p^2 = m(1 - c^2\sin^2\psi), \\ q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.\tang\zeta. \end{cases}$
Corollaire II. Si l'on a $m^\circ = m'$,	$\begin{cases} kF(c,\psi) = F(\varkappa,\zeta), \\ p^2 = \frac{m'}{1 - c^2\sin^2\psi}, \\ q = \frac{\varkappa}{\sqrt{\alpha}}.\tang\zeta. \end{cases}$
CAS III. $A > Bmm'$, $B > Amm'$, $\frac{m+m'}{1+mm'} < \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}$, $c^2 = \frac{m}{m+m'}$, $\alpha^2 = \frac{B-Amm'}{A-Bmm'}$, $\cos\theta = \frac{\frac{1}{2}(m-m')(A+B)}{\sqrt{(A-Bmm')}.\sqrt{(B-Amm')}}$, $\varkappa = \sin\frac{1}{2}\theta$, $k = \sqrt{\left(\frac{4c^2-2}{1-2\varkappa^2}\right)}$, $\begin{cases} \tang\frac{1}{2}\iota = \sqrt{(2m^\circ)}. \\ \text{On devra prendre pour F celui des deux centres vers} \\ \text{lequel l'angle } \iota = FAH \text{ est plus grand qu'un droit.} \end{cases}$	$kF(c,\psi) = F(\varkappa,\zeta) - F(\varkappa,\iota)$ $p = \frac{c\sqrt{m'}.\sin\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.\tang\frac{1}{2}\zeta$.

Conditions et dénominations.	Équation de la courbe.
CAS IV.	
$A > Bmm'$, $B > Amm'$, $m' < m$,	
$\frac{m+m'}{1+mm'} > \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}$, $c^2 = \frac{m}{m+m'}$,	$kF(c,\psi) = F(\varkappa,\zeta) - F(\varkappa,\varepsilon)$,
$\alpha + \alpha' = \frac{(m-m')(A+B)}{A-Bmm'}$, $\alpha\alpha' = \frac{B-Amm'}{A-Bmm'}$,	$p = \frac{c\sqrt{m'}.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$,
$\alpha > \alpha'$, $\varkappa^2 = 1 - \frac{\alpha'}{\alpha}$, $k = \sqrt{\left(\frac{2c^2-1}{2-\varkappa^2}\right)}$,	$q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.\tang\zeta$.
$\tang\varepsilon = \sqrt{(\alpha m^0)}$. On prendra pour F celui de deux centres vers lequel l'angle $\mu = FAH$ est plus grand qu'un droit.	
CAS V.	
$A > Bmm'$, $B > Amm'$, $m' > m$,	
$\frac{m+m'}{1+mm'} > \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}$, $c^2 = \frac{m}{m+m'}$,	$kF(c,\psi) = F(\varkappa,\zeta) - F(\varkappa,\varepsilon)$,
$\alpha + \alpha' = \frac{(m'-m)(A+B)}{B-Amm'}$, $\alpha\alpha' = \frac{A-Bmm'}{B-Amm'}$,	$p = \frac{c\sqrt{m'}.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$,
$\alpha > \alpha'$, $\varkappa^2 = \frac{\alpha'}{\alpha}$, $k = \sqrt{\left(\frac{1-2c^2}{1+\varkappa^2}\right)}$,	$q = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sin\zeta}$.
$\sin\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{m^0}\right)}$, ε de même espèce que μ.	
Le cas de $\mu = \frac{1}{2}\pi$ donne $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$, et les mêmes formules sont applicables. Mais l'équation de la courbe se réduira à deux termes, au moyen des formules ci-jointes.	$kF(c,\psi) = F(\varkappa,\zeta)$, $p = \frac{c\sqrt{m'}.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \sqrt{\alpha}.\frac{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}{\cos\zeta}$.
CAS VI.	
$A < Bmm'$, $B > Amm'$, $c^2 = \frac{m}{m+m'}$,	
$\alpha - \alpha' = \frac{(m'-m)(A+B)}{B-Amm'}$, $\alpha\alpha' = \frac{Bmm'-A}{B-Amm'}$,	$kF(c,\psi) = F(\varkappa,\zeta) - F(\varkappa,\varepsilon)$,
$\varkappa^2 = \frac{\alpha'}{\alpha+\alpha'}$, $k = \sqrt{\left(\frac{1-2c^2}{1-2\varkappa^2}\right)}$,	$p = \frac{c\sqrt{m'}.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$,
$\mu > \frac{1}{2}\pi$, $\cos\varepsilon = \sqrt{\frac{\alpha}{m^0}}$,	$q = \frac{\sqrt{\alpha}}{\cos\zeta}$.
$\mu = \frac{1}{2}\pi$, $\varepsilon = 0$.	

Conditions et dénominations.	Équations de la courbe.
CAS VI.	
$\mu < \frac{1}{2}\pi$, $\cos\iota = \sqrt{\left(\frac{m^2-a}{m^2+a}\right)}$,	$kF(c,\psi) = F(\varkappa,\zeta) - F(\varkappa,\iota)$, $p = \frac{c\sqrt{m'}.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \frac{\sqrt{a'}}{\varkappa}.\frac{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}{\sin\zeta}$.
Nota. Si l'on avait les conditions $B < Amm'$, $A > Bmm'$, il faudrait faire la permutation entre A et B, ainsi qu'entre F et G, et les formules du cas VI deviendraient applicables au cas proposé.	

Nous allons maintenant développer les solutions indiquées dans ce tableau général, en nous bornant à celles qui offrent les résultats les plus remarquables. Nous donnerons aussi, dans les cas principaux, les formules qui servent à déterminer le temps.

Développement du cas 1.

431. Si la vitesse initiale et sa direction satisfont aux conditions du cas 1, on connaîtra, par les formules du tableau, les modules c et $\varkappa$, ainsi que les constantes a, ε et $k = \sqrt{\left(\frac{4-2c^2}{1-2\varkappa^2}\right)}$; au moyen de toutes ces données, l'équation de l'orbite sera $kF(c,\psi) - kF(c,\varepsilon) = F(\varkappa,\zeta)$, et on aura en même temps $p^2 = m(1-c^2\sin^2\psi)$, $q = \frac{1}{\sqrt{a}}\tang\frac{1}{2}\zeta$; on pourra donc trouver tant de points qu'on voudra de l'orbite. En effet, prenant à volonté l'un des arcs ψ, ζ, qui peut comprendre plusieurs circonférences, l'autre se trouvera par la résolution de l'équation $kF(c,\psi) = kF(c,\varepsilon) + F(\varkappa,\zeta)$, où un seul terme deviendra inconnu. On connaîtra donc les valeurs de p et q; quant aux signes de ces quantités, on observera que p reste toujours positif, parce qu'il ne devient jamais zéro, ses limites étant $\sqrt{m}$ et $\sqrt{m'}$; mais que q prendra le signe qui convient à $\tang\frac{1}{2}\zeta$, suivant les valeurs indéfiniment grandes de l'arc ζ. Ensuite le point correspondant de la courbe se trouvera, soit par les valeurs de r et s exprimées en fonctions de p et q

(art. 372), soit plutôt, pour ne laisser aucune indétermination, par les valeurs des coordonnées $GP = x$, $PM = y$, lesquelles sont

$$x = \frac{a(1-p^2q^2)}{(1-p^2)(1+q^2)}, \quad y = \frac{2apq}{(1-p^2)(1+q^2)}.$$

432. Puisque l'orbite dont il s'agit est renfermée tout entière dans l'espace que laissent entre eux les périmètres des deux ellipses $p^2 = m$, $p^2 = m'$, décrites des mêmes foyers F et G; soient E et D les sommets voisins de ces ellipses, en sorte qu'on ait $m = \frac{EF}{EG}$ et $m' = \frac{DF}{DG}$, les deux autres sommets étant L et K; il est visible que l'orbite qui commence au point A ne pourra, dans ses circonvolutions, couper l'axe que dans les intervalles KL et DE. Voyons d'abord comment on détermine ces intersections, qui sont des points d'autant plus remarquables, qu'ils servent à compter les révolutions et demi-révolutions du corps dans son orbite. Fig. 20.

A partir du point A, le point B', où la courbe rencontre son axe, se trouvera, d'après le n° 382, en faisant $q = \infty$ ou $\zeta = \pi$. Soit γ' la valeur correspondante de ψ, de sorte qu'on ait

$$F(c, \gamma') = F(c, \epsilon) + \frac{2}{k} F'\varkappa;$$

supposons qu'on ait déterminé δ' par l'équation $F(c, \delta') = \frac{2}{k} F'\varkappa$, ce qui peut se faire par la méthode du n° 71, il restera à résoudre l'équation $F(c, \gamma') = F(c, \epsilon) + F(c, \delta')$, ou simplement $F\gamma' = F\epsilon + F\delta'$, c étant le module commun à ces fonctions; or, celle-ci se résout par les formules du n° 18, qui donnent

$$\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \gamma')} = \frac{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \delta')}\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \epsilon)} - c^2 \sin\delta' \sin\epsilon \cos\delta' \cos\epsilon}{1 - c^2 \sin^2 \delta' \sin^2 \epsilon};$$

de là, $p^2 = m(1 - c^2 \sin^2 \gamma') = \frac{GB'}{FB'}$; ainsi le point B' est déterminé.

433. A partir du point B', l'intersection suivante, qui doit avoir lieu en un point A' situé sur la partie de l'axe ED, se déterminera en faisant $q = 0$ ou $\zeta = 2\pi$. Appelant donc γ'' la valeur correspondante de ψ, on trouvera γ'' par la résolution de l'équation $F(c, \gamma'') = F(c, \epsilon) + \frac{4}{k} F'\varkappa = F(c, \epsilon) + 2F(c, \delta')$.

Soit δ'' l'amplitude qui donne $F(c, \delta'') = 2F(c, \delta')$, δ'' pourra se déduire trigonométriquement de δ', par les formules de la duplication des fonctions; ensuite il faudra résoudre l'équation $F\gamma'' = F\epsilon + F\delta''$, et on en

déduira une valeur de $\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \gamma'')}$ pareille à celle que nous avons trouvée dans l'article précédent.

434. En général, soient B^1, B^2, B^3, etc., les intersections successives qui ont lieu du côté du centre G; soient A^1, A^2, A^3, etc., celles qui ont lieu du côté de F; les valeurs de ζ et ψ correspondantes à ces différens points, suivant l'ordre avec lequel ils se succèdent dans le mouvement du corps, pourront se désigner comme il suit, en y joignant les auxiliaires δ', δ'', δ''', etc.

Intersections..... B^1, A^1, B^2, A^2, B^3, A^3, B^4, etc.,
ζ..... π, 2π, 3π, 4π, 5π, 6π, 7π, etc.,
Auxiliaires..... δ', δ'', δ''', δ^{IV}, δ^5, δ^6, δ^7, etc.,
ψ..... γ', γ'', γ''', γ^{IV}, γ^5, γ^6, γ^7, etc.

Ayant donc déterminé la première auxiliaire δ' avec toute l'exactitude nécessaire, par l'équation $F(c, \delta') = \frac{2}{k} F'x$, on déterminera les suivantes, δ'', δ''', δ^{IV}, etc., par les formules connues pour la multiplication de la fonction $F(c, \delta')$ ou $E\delta'$, de manière qu'on ait

$$F\delta'' = 2F\delta', \quad F\delta''' = 3F\delta', \quad F\delta^{\text{IV}} = 4F\delta', \text{ etc.}$$

Cela posé, chaque valeur de γ se déduira du δ correspondant, en résolvant l'équation $F\gamma = F\delta + F\varepsilon$, dans laquelle γ et δ prendront un même nombre d'accens, tandis que ε reste toujours le même; or, la résolution de cette équation donne en général

$$\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \gamma)} = \frac{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \delta)} \cdot \sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varepsilon)} - c^2 \sin \varepsilon \sin \delta \cos \varepsilon \cos \delta}{1 - c^2 \sin^2 \varepsilon \sin^2 \delta}.$$

On connaîtra ainsi la valeur de $p^2 = m(1 - c^2 \sin^2 \gamma)$, laquelle étant égale à $\frac{GB^2}{FB^2}$ ou à $\frac{FA^2}{GA^2}$, déterminera le point d'intersection correspondant B^2 ou A^2.

Les points B^1, B^2, B^3, etc., sont ceux où le corps termine la 1re, la 3e, la 5e, etc., demi-révolution; les points A^1, A^2, A^3, etc., sont ceux où il termine la 1re, la 2e, la 3e, etc., révolution. Ces points seront tous différens les uns des autres, dans chaque série, si la quantité $\frac{kF'c}{F'x}$ est irrationnelle; mais si cette quantité est rationnelle, le corps reviendra, après un certain nombre de révolutions, au point A, d'où il était parti, et la même période de mouvement se renouvellera à l'infini.

En effet, le corps reviendra au point A, si l'on peut faire à la fois $\zeta = 2i\pi$ et $\psi = e\pi + \varepsilon$, i et e étant des nombres entiers. Ces valeurs étant substituées dans l'équation $kF(c, \psi) - kF(c, \varepsilon) = F(x, \zeta)$, on en tire $2keF'c = 4iF'x$,

ou $\frac{kF'c}{2F'\varkappa} = \frac{i}{e}$. Donc si la quantité $\frac{kF'c}{2F'\varkappa}$ est un nombre rationnel $\frac{i}{e}$, le corps reviendra au point de départ A, après une période composée de i révolutions, ce qui résulte de la valeur $\zeta = 2i\pi$. En revenant ainsi au même point, on voit, par l'équation (1), que le corps aura la même vitesse qu'à l'origine du mouvement; mais cette vitesse sera-t-elle dirigée dans le même sens? c'est ce qu'il faut examiner.

435. En général, quel que soit l'état initial du mouvement, si le corps passe deux fois dans un même point M de son orbite, sa vitesse en ce point sera égale dans les deux cas, et la direction de cette vitesse devra faire un angle égal, dans un sens ou dans l'autre, avec la droite MQ, qui divise en deux parties égales l'angle FMG. Fig. 13.

En effet, il résulte des équations (1) et (2), que si on désigne par dz l'élément de la courbe, la valeur de $\frac{dz^2}{dt^2}$ et celle de $\frac{rd\varphi}{dz} \cdot \frac{sd\omega}{dz}$, seront les mêmes dans les deux passages du corps par le point M. La première quantité est le carré de la vitesse; donc la vitesse est égale dans les deux cas; la seconde représente le produit sin TMF . sin TMG, ou $\frac{1}{2}$ cos FMG..... $-\frac{1}{2}$ cos 2TMQ, MQ étant la droite qui divise en deux également l'angle FMG. Donc si TM est la tangente de l'orbite au premier passage, la tangente de l'orbite, au second passage, sera nécessairement l'une des deux droites TM, T'M, également inclinées sur MQ.

Le point M devient un point double, lorsque l'orbite a deux tangentes différentes TM, T'M; jamais il n'y aura de point triple, car il est impossible que trois tangentes différentes donnent une même valeur pour le produit sin TMF . sin TMG.

436. On voit maintenant que si $\frac{kF'c}{F'\varkappa}$ est rationnelle, et qu'en conséquence on puisse faire $\psi = e\pi + \varepsilon$ et $\zeta = 2i\pi$, ce qui ramène le corps, après un nombre i de révolutions, au point A d'où il était parti, il aura en ce point la même vitesse V qu'au point de départ, et la direction de cette vitesse devra être également inclinée, dans un sens ou dans l'autre, avec l'axe FG; c'est-à-dire que l'angle EAH, qui est μ au point A dans l'état initial du mouvement, ne pourra être que μ ou $\pi - \mu$, lorsque le corps sera revenu au point A. Mais par la valeur de $\frac{d\psi}{dt}$ (art. 409), on voit que $\frac{d\psi}{dt}$ ne pourrait continuer d'être positive, si à la place de μ on mettait $\pi - \mu$, puisque d'ailleurs l'angle ε reste toujours le même. Donc le corps A revenu au point A après un nombre i de révolutions, aura en ce point la même vi-

tesse et la même direction qu'au commencement du mouvement; ainsi cette période de i révolutions devra se répéter à l'infini.

437. Si au contraire la quantité $\frac{kF'c}{F'\varkappa}$ est irrationnelle, l'orbite, composée d'une infinité de circonvolutions toutes différentes les unes des autres, devra remplir tout l'espace renfermé entre les périmètres des deux ellipses $p^2 = m$, $p^2\ m'$; de sorte qu'il n'y aura aucun point de cet espace qui ne soit un point de l'orbite, ou qui n'en soit infiniment peu distant. Il faut excepter seulement le cas de $m' = 0$, qui donne lieu à une figure particulière.

Cette propriété n'est qu'une conséquence fort simple des considérations précédentes; mais on peut la démontrer directement au moyen de l'équation $kF(c, \psi) - kF(c, \epsilon) = F(\varkappa, \zeta)$, qui doit satisfaire à tous les points de l'orbite. En effet, supposons que pour un point déterminé M, compris entre les deux ellipses qui limitent l'orbite, on ait $p^2 = m(1 - c^2 \sin^2 \psi^\circ)$ et $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \zeta^\circ$; si l'on satisfait à l'équation $kF(c, \psi) - kF(c, \epsilon) = F(\varkappa, \zeta)$, en faisant $\psi = \psi^\circ$ et $\zeta = \zeta^\circ$, il s'ensuivra que le point M est un point de l'orbite. Supposons donc qu'il existe une différence quelconque entre les quantités $kF(c, \psi^\circ) - kF(c, \epsilon)$ et $F(\varkappa, \zeta^\circ)$; je dis qu'on pourra néanmoins satisfaire à l'équation $kF(c, \psi) - kF(c, \epsilon) = F(\varkappa, \zeta)$, dans un point de l'orbite dont la distance au point M sera plus petite que toute quantité donnée.

Pour cet effet, soit $\psi = \pi x + \psi^\circ$, et $\zeta = 2\pi y + \zeta^\circ$ (x et y étant des entiers quelconques); le point déterminé par ces valeurs sera toujours le point M, quels que soient les entiers x et y. Pour qu'il soit en même temps un point de l'orbite, il faut qu'on ait

$$k[2xF'c + F(c, \psi^\circ) - F(c, \epsilon)] = 4yF'\varkappa + F(\varkappa, \zeta^\circ),$$

ce qui donne $Lx - My = N$, en faisant, pour abréger, $L = kF'c$, $M = 2F'\varkappa$, $N = \frac{1}{2}kF(c, \epsilon) - \frac{1}{2}kF(c, \psi^\circ) + \frac{1}{2}F(\varkappa, \zeta^\circ)$. Or, en prenant les entiers x et y suffisamment grands, il sera toujours possible de satisfaire à l'équation $Lx - My = N$, de manière que la différence des deux membres soit plus petite que toute quantité donnée. Car soit pris à volonté $y = b'$, b' étant un entier, et soit $\frac{Mb' + N}{L} = a' + \delta$, a' étant un entier, et δ un reste plus petit que l'unité; si l'on fait $x = a'$, on aura $Lx - My = N - L\delta$. Supposons qu'en réduisant la quantité irrationnelle $\frac{L}{M}$ en fraction continue, et

prolongeant le calcul jusqu'à un terme assez éloigné, on ait $\frac{L'}{M'}$ pour la dernière fraction convergente vers $\frac{L}{M}$, on aura, par les propriétés connues de ces fractions, $\frac{L}{M} - \frac{L'}{M'} = \frac{\delta'}{M'^2}$, δ' étant une quantité positive ou négative plus petite que l'unité, d'où résultera $LM' - L'M = \frac{\delta' M}{M'}$. Soit maintenant $x = a' + M'z$, $y = b' + L'z$, on aura $Lx - My = N - L\delta' + \frac{\delta' Mz}{M'}$ $= N + \frac{\delta' M}{M'}\left(z - \frac{\delta LM'}{\delta' M}\right)$; soit donc $\frac{\delta LM'}{\delta' M} = c' + \delta''$, c' étant un entier, et δ'' un reste plus petit que l'unité; si l'on fait $z = c'$, ce qui donne $x = a' + c'M'$, $y = b' + c'L'$, on aura $Lx - My = N - \frac{\delta'\delta'' M}{M'}$. Ainsi, l'équation proposée $Lx - My = N$ sera résolue; de manière que l'erreur ou la différence entre les deux membres ne sera que $\frac{\delta'\delta'' M}{M'}$, quantité moindre que $\frac{M}{M'}$. Or, le dénominateur M' donné par le développement d'une quantité irrationnelle $\frac{L}{M}$ en fraction continue, sera aussi grand qu'on voudra; donc l'erreur dont il s'agit pourra être rendue moindre que toute quantité donnée.

438. Après avoir déterminé les différens points d'intersection de la courbe avec l'axe, il importe de déterminer avec la même précision les apsides tant supérieures qu'inférieures, c'est-à-dire les points où l'orbite est tangente aux ellipses terminatrices $p^2 = m$, $p^2 = m'$; car la connaissance de ces points, jointe à celle des intersections de la courbe avec l'axe, contribuera beaucoup à donner une idée exacte de la figure de cette courbe.

Puisqu'on a, au commencement du mouvement, $\psi = \varepsilon$, ε étant moindre que 180°, on voit, d'après l'équation $p^2 = m(1 - c^2 \sin^2 \psi)$, que la première apside rencontrée par le corps sera une apside inférieure si l'on a $\varepsilon < \frac{1}{2}\pi$, et une apside supérieure si l'on a $\varepsilon > \frac{1}{2}\pi$. En général, si l'on désigne par S^1, S^2, S^3, etc., les apsides supérieures, et par I^1, I^2, I^3, I^4, etc., les apsides inférieures, auxquelles le corps parvient successivement à partir du point A, ces points se détermineront en donnant à ψ les valeurs successives, savoir :

pour le point..... I^1, S^1, I^2, S^2, I^3, S^3, I^4, S^4, etc.,

ψ..... $= \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi, \frac{5}{2}\pi, 3\pi, \frac{7}{2}\pi, 4\pi$, etc.

Il faudra donc calculer les valeurs correspondantes de ζ, en observant que le premier point I^1 doit être omis, comme se rapportant à une époque antérieure à l'origine du mouvement, si l'on a $\varepsilon > \frac{1}{2}\pi$. Il n'en est pas moins nécessaire de calculer dans tous les cas la valeur de ζ qui répond au point I, parce que cette valeur, une fois connue avec toute la précision nécessaire, sert à calculer trigonométriquement les valeurs de ζ qui répondent aux autres points I et S.

En faisant $\psi = \frac{1}{2}\pi$, on aura à résoudre l'équation $kF^1c - kF(c, \varepsilon) = F(\varkappa, \zeta)$; en faisant $\psi = \pi$ on aurait à résoudre l'équation $2kF^1c - kF(c, \varepsilon) = F(\varkappa, \zeta)$, ainsi des autres. Pour obtenir une plus grande uniformité dans la résolution de ces équations, supposons qu'on ait déterminé η et δ' par les équations $F(\varkappa, \eta) = kF(c, \varepsilon)$, $F(\varkappa, \delta') = kF^1c$; connaissant l'auxiliaire δ', on déterminera les auxiliaires suivantes δ'', δ''', δ^{IV}, etc., de manière qu'on ait

$$F\delta'' = 2F\delta', \quad F\delta''' = 3F\delta', \quad F\delta^{IV} = 4F\delta', \text{ etc.},$$

$\varkappa$ étant le module commun à ces fonctions.

Cela posé, si l'on appelle λ', λ'', λ''', λ^{IV}, etc., les valeurs de ζ qui répondent aux valeurs successives $\psi = \frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, etc., ces quantités seront déterminées par les équations suivantes, où $\varkappa$ est le module commun des fonctions;

$$F\lambda' = F\delta' - F\eta,$$
$$F\lambda'' = F\delta'' - F\eta,$$
$$F\lambda'' = F\delta'' - F\eta, \text{ etc.}$$

Ces équations étant toutes de la même forme, il suffira de résoudre l'équation générale $F\lambda = F\delta - F\eta$, d'où l'on tire, par les formules de l'art. 19.

$$\tang \tfrac{1}{2}\lambda = \frac{\sin\delta\cos\eta\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\eta)} - \sin\eta\cos\delta\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\delta)}}{1+\cos\delta\cos\eta - \varkappa^2\sin^2\delta\sin^2\eta + \sin\delta\sin\eta\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\eta)}.\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\delta)}},$$

Par cette formule, où l'on donnera à δ et λ un même nombre d'accens, on connaîtra les valeurs successives λ', λ'', λ''', λ^{IV}, λ^V, λ^6, etc.; ensuite les apsides inférieures I^1, I^2, I^3, I^4, etc., seront déterminées par la valeur constante $p^2 = m'$ combinée avec les valeurs successives $q = \frac{1}{\sqrt{a}}\tang\frac{1}{2}\lambda'$, $q = \frac{1}{\sqrt{a}}\tang\frac{1}{2}\lambda'''$, $q = \frac{1}{\sqrt{a}}\tang\frac{1}{2}\lambda^V$, etc.; et les apsides supérieures S^1, S^2, S^3, S^4, etc., seront déterminées par la valeur constante $p^2 = m$ combinée avec les valeurs successives $q = \frac{1}{\sqrt{a}}\tang\frac{1}{2}\lambda''$, $q = \frac{1}{\sqrt{a}}\tang\frac{1}{2}\lambda^{IV}$, $q = \frac{1}{\sqrt{a}}\tang\frac{1}{2}\lambda^6$, etc.

Ainsi, la série finie ou infinie des apsides, tant supérieures qu'inférieures, peut être déterminée par de simples formules trigonométriques, dès qu'une fois on a calculé avec la précision nécessaire, les deux quantités n et δ'. Au reste, cette série sera finie si la quantité $\frac{kF'c}{F'\varkappa}$ est rationnelle, et elle sera infinie dans le cas contraire. Dans le premier cas sont compris tous ceux où l'orbite est une courbe algébrique.

439. Il ne sera pas inutile de chercher dans quels cas l'orbite peut avoir une apside supérieure ou inférieure située sur l'axe EFGL; car dans ces cas, l'équation de la courbe se réduira à deux termes, en prenant cette apside pour l'origine du mouvement; et alors on a les formules qui répondent à l'un des corollaires I et II du cas I, dans le tableau général.

Lorsque la quantité $\frac{kF'c}{F'\varkappa}$ est irrationnelle, la courbe passe exactement, ou à un infiniment petit près, par tous les points de l'axe EL non situés entre F et G; ainsi on peut placer indifféremment l'origine du mouvement, soit dans une apside supérieure au point E ou au point L, soit dans une apside inférieure au point D ou K; et on remplira également des deux manières le but qu'on peut avoir de réduire l'équation de la courbe à la forme la plus simple, telle que la donnent les corollaires I et II du cas I.

Il n'en est pas de même si la quantité $\frac{kF'c}{F'\varkappa}$ est rationnelle et représentée par $\frac{2i}{e}$; car ce n'est que dans un petit nombre de cas que l'orbite pourra avoir une apside située sur l'axe.

En effet, s'il y a une apside supérieure ou inférieure située sur l'axe, il faut qu'on puisse avoir à la fois $\psi = \frac{\pi}{2} n$, et $\zeta = \pi n'$, n et n' étant des entiers. Substituant ces valeurs dans l'équation $kF(c,\psi) - kF(c,\varepsilon) = F(\varkappa,\zeta)$, il en résulte la condition

$$\frac{F'(c,\varepsilon)}{F'c} = n - \frac{en'}{i}.$$

Ainsi, il n'y aura d'apside sur l'axe qu'autant que $\frac{F(c,\varepsilon)}{F'c}$ sera une fraction rationnelle, qui a pour dénominateur i ou un diviseur de i. Si cette condition a lieu, on pourra prendre pour équations du mouvement celles qui appartiennent à l'un des corollaires I et II; dans le cas contraire, cette réduction ne pourra avoir lieu.

On voit par là, que la solution du problème donné par les formules du cas I aurait perdu beaucoup de sa généralité, si l'on avait supposé

qu'au point A, origine du mouvement, l'angle μ est droit, ce qui revient à supposer que le point A est un apside supérieure ou inférieure.

440. Il reste à trouver l'expression générale du temps employé à parcourir un arc quelconque de l'orbite. Pour cela, il faut recourir à la formule (4), où l'on voit que le temps est composé de deux parties toujours additives, l'une, fonction de p ou de ψ; l'autre, fonction de q ou de ζ Nous allons chercher successivement ces deux parties.

Désignant la première partie par t', il faudra, dans l'équation $\frac{dt'}{a\sqrt{2a}} = -\frac{p^2}{(1-p^2)^2}\cdot\frac{dp}{\sqrt{P}}$, substituer les valeurs trouvées $p^2 = m(1 - c^2\sin^2\psi)$, $-\frac{dp}{\sqrt{P}} = \sqrt{\left(\frac{1-mm'}{mA+mB}\right)}\cdot\frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, et on aura la formule à intégrer

$$dt' = D.\frac{d\psi\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}{(1+n\sin^2\psi)^2},$$

où l'on a fait, pour abréger, $n = \frac{mc^2}{1+m} = \frac{m-m'}{1-m}$, $D = \frac{a\sqrt{2am}}{(1-m)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1-mm'}{A+B}\right)}$.
Soit $Z(\psi) = \int\frac{\Delta d\psi}{(1+n\sin^2\psi)^2}$, Δ étant mis pour $\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}$, on aura, par les réductions connues,

$$2(1+n)Z(\psi) = \frac{n\Delta\sin\psi\cos\psi}{1+n\sin^2\psi} + E(c,\psi) - \left(1+\frac{c^2}{n}\right)F(c,\psi)$$
$$+\left(2+n+\frac{c^2}{n}\right)\Pi(n, c, \psi).$$

Lorsque $\psi = \frac{1}{2}\pi$, l'intégrale $Z(\psi)$ devenant Z^1, on aura

$$2(1+n)Z^1 = E^1c - \left(1+\frac{c^2}{n}\right)F^1c + \left(2+n+\frac{c^2}{n}\right)\Pi^1(n, c).$$

Soit $n = \cot^2\lambda$, on aura, par la formule de l'art. 108,

$$\frac{\Delta(b,\lambda)}{\sin\lambda\cos\lambda}[\Pi^1(n, c) - \sin^2\lambda F^1c] = \tfrac{1}{2}\pi + (F^1c - E^1c)F(b,\lambda) - F^1cE(b,\lambda).$$

Donc en faisant, pour abréger, $K = \frac{1}{2}\pi + (F^1c - E^1c)F(b,\lambda) - F^1cE(b,\lambda)$, on aura

$$Z^1 = \tfrac{1}{2}\sin^2\lambda\left(E^1c + b^2\sin^2\lambda F^1c + \frac{m+\sin^2\lambda}{\sqrt{m}.\sin\lambda}K\right).$$

441. Il résulte de ces calculs, que pour une valeur quelconque de ψ, on aura t' ou

$$t'(\psi) = \frac{a\sqrt{(2am)}}{(1-m)^2}\sqrt{\left(\frac{1-mm'}{A+B}\right)}.Z(\psi) = DZ(\psi);$$

et pour la valeur déterminée $\psi = \frac{1}{2}\pi$, t' devenant T^v, on aura

$$T' = \frac{a\sqrt{(2am)}}{(1-m)^2}\sqrt{\left(\frac{1-mm'}{A+B}\right)}\cdot Z' = DZ'.$$

Donc, si l'on a en général $\psi = I\pi + \psi'$, I étant un entier quelconque, et ψ' un arc positif ou négatif moindre que $\frac{1}{2}\pi$, la valeur correspondante de t' ou $t'(\psi)$ sera

$$t'(\psi) = 2IT' + t'(\psi'),$$

$t'(\psi')$ désignant la valeur de t' qui répond à l'amplitude ψ', et qui est du même signe que ψ'; cette quantité sera toujours moindre que T', et pourra être évaluée avec tel degré d'approximation qu'on voudra, par les formules que nous avons données pour cet objet.

On voit donc que la valeur de t', pour une amplitude ψ composée de tant de circonférences qu'on voudra, se détermine en supposant connue la valeur de cette quantité pour toute amplitude non plus grande que $\frac{1}{2}\pi$. Si la quantité $c\sin\psi'$ est assez petite pour qu'on puisse prendre $1 - \frac{1}{2}c^2\sin^2\psi'$ pour $\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi')}$, la valeur de $t'(\psi')$ se trouvera très simplement par la formule suivante, où l'on a pris un angle auxiliaire Ω tel que $\tang\Omega = \frac{\tang\psi}{\sin\lambda}$;

$$t'(\psi') = \tfrac{1}{2}D\sin\lambda\left[\Omega + \tfrac{1}{2}\sin 2\Omega + (1-\tfrac{1}{2}c^2)\sin^2\lambda\,(\Omega - \tfrac{1}{2}\sin 2\Omega)\right].$$

Ces formules supposent le temps compté depuis $\psi = 0$; mais comme au commencement du mouvement on a $\psi = \varepsilon$, il faut regarder l'époque où $\psi = 0$ comme antérieure à celle où $\psi = \varepsilon$, et en conséquence retrancher du temps trouvé pour une valeur quelconque de ψ; la quantité constante $t'(\varepsilon)$, qu'on déterminera par les mêmes formules.

442. Pour avoir l'autre partie du temps, il faut, dans la formule $\frac{dt}{a\sqrt{2a}} = \frac{q^2}{(1+q^2)^2}\cdot\frac{dq}{\sqrt{Q}}$, substituer les valeurs $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tang\frac{1}{2}\zeta$, $\frac{dq}{\sqrt{Q}} = \ldots\ldots \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\cdot\sqrt{\left(\frac{1-mm'}{A+Bmm'}\right)}\cdot\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}$, ce qui donnera

$$t = \frac{a\sqrt{(\frac{1}{2}a\alpha)}\cdot\sqrt{(1-mm')}}{\sqrt{(A+Bmm')}}\int\frac{d\zeta\sin^2\zeta}{[\alpha+1+(\alpha-1)\cos\zeta]^2\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}.$$

Pour obtenir cette intégrale, il faut la partager en deux parties $t'' + t'''$, dont les valeurs seront, en faisant $\alpha = \cot^2\frac{1}{2}\eta$, $\nu = \cot^2\eta$,

$$D' = \frac{a}{4}\sqrt{\left(\frac{a}{2\alpha}\cdot\frac{1-mm'}{A+Bmm'}\right)} = \frac{a}{4k}\sqrt{\left(\frac{2a}{m}\cdot\frac{1-mm'}{A+B}\right)},$$

$$t'' = D'U(\zeta),\quad U(\zeta) = \int\frac{(1+2\nu-\nu\sin^2\zeta)\,d\zeta}{(1+\nu\sin^2\zeta)^2\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}},$$

$$t''' = -D'W(\zeta), W(\zeta) = \frac{2\cos\eta}{\sin^2\eta}\int\frac{d\zeta\cos\zeta\sin^2\zeta}{(1+\nu\sin^2\zeta)^2\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}.$$

Soit ξ un arc moindre que $\frac{1}{2}\pi$, tel qu'on ait $\operatorname{tang}\xi = \frac{\sin\zeta\sqrt{(\varkappa^2+\nu)}}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}$, ou $\sin\zeta = \frac{\sin\xi}{\sqrt{(\varkappa^2+\nu\cos^2\xi)}}$, on aura, en faisant $\mathcal{E}^2 = 1-\varkappa^2$,

$$W(\zeta) = \frac{\sin\eta\cos\eta}{(1-\mathcal{E}^2\sin^2\eta)^{\frac{3}{2}}}(\xi - \sin\xi\cos\xi).$$

Cette quantité est nulle, lorsque ζ est un multiple de π; elle est à son *maximum* positif ou négatif, lorsque ζ est un multiple impair de $\frac{1}{2}\pi$. En général, il suffira de connaître la fonction $W(\zeta)$ depuis $\zeta = 0$ jusqu'à $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, car on a $W(\zeta) = W(\pi-\zeta)$ et $W(\pi+\zeta) = -W(\zeta)$.

443. Quant à la valeur de l'intégrale U ou $U(\zeta)$, on trouvera, par les formules connues, en faisant $\Delta = \sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}$,

$$(1-\mathcal{E}^2\sin^2\eta)\,U(\zeta) = -\frac{\Delta\sin\zeta\cos\zeta\cos^2\eta}{1+\nu\sin^2\zeta} - \sin^2\eta E(\varkappa,\zeta) + \Pi(\nu,\varkappa,\zeta).$$

Soit U^1 la valeur de $U(\zeta)$ lorsque $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, on aura

$$(1-\mathcal{E}^2\sin^2\eta)\,U^1 = -\sin^2\eta F^1\varkappa + \Pi^1(\nu,\varkappa).$$

D'ailleurs, par la formule du n° 108, on trouve

$$\frac{(1-\mathcal{E}^2\sin^2\eta)^{\frac{1}{2}}}{\sin\eta\cos\eta}[\Pi^1(\nu,\varkappa) - \sin^2\eta F^1\varkappa] = \frac{1}{2}\pi + (F^1\varkappa - E^1\varkappa)F(\mathcal{E},\eta) - F^1\varkappa E(\mathcal{E},\eta).$$

Donc, si l'on fait pour abréger, $H = \frac{1}{2}\pi + (F^1\varkappa - E^1\varkappa)F(\mathcal{E},\eta) - F^1\varkappa E(\mathcal{E},\eta)$, on aura

$$(1-\mathcal{E}^2\sin^2\eta)\,U^1 = \sin^2\eta(F^1\varkappa - E^1\varkappa) + \frac{\sin\eta\cos\eta}{\sqrt{(1-\mathcal{E}^2\sin^2\eta)}}.H.$$

444. Cela posé, soit $\zeta = L\pi + \zeta'$, L étant un nombre entier, et ζ' un arc positif ou négatif moindre que $\frac{1}{2}\pi$, on aura le temps correspondant $t'' + t'''$, par les formules

$$t'' = D'[2LU^1 + U(\zeta')],$$
$$t''' = -D'\cos L\pi . W(\zeta').$$

Soit T'' la valeur qui répond à $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, savoir, $T'' = D'U^1$, on aura plus simplement

$$t'' = 2LT'' + D'U(\zeta').$$

445. Étant donnée la valeur $\zeta = L\pi + \zeta'$, comme dans l'article précédent, si l'on veut avoir le temps total du mouvement, il faudra chercher la valeur de ψ correspondante, afin d'en déduire la première partie du temps

désignée par t'. Soit donc, comme ci-dessus, $\psi = I\pi + \psi'$, I étant un entier, et ψ' un arc $< \frac{1}{2}\pi$; substituant ces valeurs dans l'équation de la courbe $kF(c, \psi) - kF(c, \varepsilon) = F(\varkappa, \zeta)$, on aura

$$2I + \frac{F(c, \psi')}{F'c} = \frac{2LF'\varkappa + F(\varkappa, \zeta) + kF(c, \varepsilon)}{kF'c}.$$

Le second membre étant un nombre connu, on connaîtra l'entier pair 2I, qui en approche le plus; on connaîtra en même temps la valeur et le signe de la partie $\frac{F(c, \psi')}{F'c}$; ainsi, il ne restera à résoudre que l'équation $F(c, \psi') = k'F'c$, dans laquelle k' sera un nombre donné plus petit que l'unité. Or, cette équation peut être résolue avec tel degré de précision qu'on voudra, par la méthode du n° 71.

446. Ayant donc à la fois $\psi = I\pi + \psi'$, $\zeta = L\pi + \zeta'$, on trouvera, par les formules précédentes, les différentes parties du temps, savoir :

$$t' = 2IT' + t'(\psi'),$$
$$t'' = 2LT'' + t''(\zeta'),$$
$$t''' = -D' \cos L\pi \,.\, W(\zeta'),$$

où il faut observer que les fonctions $t'(\psi')$, $t''(\zeta')$, $W(\zeta')$, prennent le même signe que les variables ψ' et ζ', dont elles dépendent. De là résulte le temps cherché

$$t = 2IT' + 2LT'' + t'(\psi') + t''(\zeta') - D' \cos L\pi \,.\, W(\zeta') - t'(\varepsilon).$$

447. Si l'on fait $\zeta = 2N\pi$, ou si l'on suppose que le corps a achevé un nombre N de révolutions, on aura $L = 2N$, $\zeta = 0$, ce qui donnera

$$t = 2IT' + 4NT'' + t'(\psi') - t'(\varepsilon).$$

Mais dans ce même cas on a $2I + \frac{F(c, \psi)}{F'c} = \frac{4NF'\varkappa + kF(c, \varepsilon)}{kF'c}$; donc

$$t = 4N\left(T'' + \frac{T'F'\varkappa}{kF'c}\right) + T'\left(\frac{F(c, \varepsilon)}{F'c} - \frac{F(c, \psi')}{F'c}\right) + t'(\psi') - t'(\varepsilon).$$

Désignons par τ la durée moyenne d'une révolution $\frac{t}{N}$, nous aurons

$$\tau = 4T'' + 4T' \,.\, \frac{F'\varkappa}{kF'c} + \frac{T'}{N}\left(\frac{F(c, \varepsilon)}{F'c} - \frac{t'(\varepsilon)}{T'}\right) + \frac{T'}{N}\left(\frac{t'(\psi')}{T'} - \frac{F(c, \psi')}{F'c}\right);$$

or, les quantités $\frac{F(c, \varepsilon)}{F'c}$, $\frac{t'\varepsilon}{T'}$ sont plus petites que deux unités, et presque égales entre elles; de même les quantités $\frac{t'(\psi')}{T'}$, $\frac{F(c, \psi')}{F'c}$ sont plus petites que

l'unité, et presque égales entre elles; donc le temps moyen d'une révolution approchera de plus en plus d'être égal à la limite $4T'' + 4T' \cdot \frac{F'z}{kF'c}$. Il sera exactement égal à cette limite, lorsque $\frac{kF'c}{F'z}$ sera rationnel, et que le temps comprendra une ou plusieurs périodes entières.

448. Supposons maintenant qu'on veuille résoudre le problème inverse, qui consiste à déterminer la position du corps au bout d'un temps donné $\mathfrak{T}$ aussi grand qu'on voudra. On prendra, comme dans l'article précédent, la limite $\tau = 4T'' + 4T' \cdot \frac{F'z}{kF'c}$; et parce que le quotient $\frac{\mathfrak{T}}{\tau}$ doit indiquer à très peu près le nombre de révolutions faites dans le temps $\mathfrak{T}$, on pourra prendre pour première hypothèse $\zeta = 2\pi \cdot \frac{\mathfrak{T}}{\tau}$, et on calculera la valeur correspondante de t.

Soit cette valeur $t = \mathfrak{T} + d$, la différence d fera connaître par son signe le sens dans lequel la première valeur de ζ doit être rectifiée; et comme un temps d répond à peu près à une partie $\frac{d}{\tau}$ de révolution, il est clair qu'on devra prendre pour seconde hypothèse $\zeta = 2\pi \cdot \frac{\mathfrak{T} - d}{\tau}$.

Avec cette valeur, on calculera le temps correspondant, lequel sera exprimé par $\mathfrak{T} + d'$, d' étant une quantité beaucoup plus petite que d. Désignant donc par ζ_1 la valeur prise pour ζ dans la seconde hypothèse, on aura la valeur corrigée $\zeta = \zeta_1 - 2\pi \cdot \frac{d'}{\tau}$, laquelle devra suffire pour la solution du problème, à moins qu'on ne veuille obtenir une approximation encore plus grande, en ayant recours à une troisième hypothèse.

Des courbes algébriques qui satisfont aux formules du cas I.

449. Si l'on fait $F(c, \psi) - F(c, \varepsilon) = F(c, z)$, ou simplement $F\psi - F\varepsilon = Fz$, l'équation de l'orbite se réduit, en général, à la forme

$$kF(c, z) = F(x, \zeta);$$

et pour construire la courbe, on aura toujours les équations..... $p^2 = m(1 - c^2 \sin^2 \psi)$, $q = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{tang} \frac{1}{2}\zeta$; mais il faudra exprimer p en fonction de z, ce qui se fera en tirant de l'équation $F\psi - F\varepsilon = Fz$, la valeur de $\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}$, ou $\Delta(\psi)$, par les formules du n° 18; on aura ainsi

$$\frac{p}{\sqrt{m}} = \frac{\Delta(\iota)\Delta(z) - c^2 \sin\iota \cos\iota \sin z \cos z}{1 - c^2 \sin^2\iota \sin^2 z}.$$

450. Nous allons faire voir maintenant comment on peut trouver tant de courbes algébriques qu'on voudra qui satisfassent à l'équation $k\mathrm{F}(c, z) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta)$. Ces courbes auront généralement la propriété de rentrer sur elles-mêmes, après une période composée d'un certain nombre de révolutions; de sorte qu'il suffira de calculer le mouvement du corps pendant une seule période, pour connaître et déterminer le mouvement au bout du temps quelconque.

Nous avons déjà remarqué que si l'orbite rentre sur elle-même après un certain nombre de révolutions, la quantité $\frac{k\mathrm{F}'c}{\mathrm{F}'\varkappa}$ doit être rationnelle. Cette condition aura donc lieu généralement dans toutes les courbes algébriques que nous allons déterminer; mais elle pourrait avoir lieu aussi dans une infinité d'autres courbes qui ne seraient pas algébriques.

Ce n'est que par des suppositions particulières sur la valeur de la vitesse initiale, ou sur celle de quelques-unes des autres données du problème, qu'on parvient à obtenir des courbes algébriques; mais les résultats de ce genre ont encore une telle généralité, que non-seulement le nombre des courbes algébriques qui peuvent satisfaire au problème dans le seul cas Ier est infini, mais que l'on peut former une infinité de systèmes différens qui y satisferont également, et dont chacun comprendra un nombre infini de courbes algébriques des formes les plus variées et les plus bizarres.

451. Soit d'abord $\varkappa = c$, et k ou $\sqrt{\left(\frac{4-2c^2}{1-2c^2}\right)} = \frac{i}{e}$, $\frac{i}{e}$ étant une fraction rationnelle; on aura, en supposant $i > 2e$,

$$c^2 = \frac{i^2 - 4e^2}{2i^2 - 2e^2};$$

et l'équation $k\mathrm{F}(c, z) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta)$ deviendra $i\mathrm{F}(c, z) = e\mathrm{F}(c, \zeta)$, ou simplement $i\mathrm{F}z = e\mathrm{F}\zeta$, c étant le module commun à ces deux fonctions.

Par les propriétés connues des fonctions F, on pourra toujours remplacer l'équation transcendante $i\mathrm{F}(c, z) = e\mathrm{F}(c, \zeta)$, par une équation algébrique équivalente, et si l'on combine cette équation avec les valeurs de x et de y exprimées en fonctions de p et q, qui elles-mêmes s'expriment trigonométriquement au moyen des arcs z et ζ, on aura l'équation cherchée de la trajectoire. Mais il sera toujours plus simple de ne point faire d'élimination, et de construire la courbe par le moyen de l'équation $k\mathrm{F}(c, z) = \mathrm{F}(c, \zeta)$,

qui fera connaître tant de valeurs correspondantes qu'on voudra des variables z et ζ, et par conséquent tant de points qu'on voudra de cette courbe.

452. En donnant à $\frac{i}{e}$ une valeur rationnelle quelconque, plus grande que deux unités, on connaîtra la valeur du module c qui détermine entièrement l'équation $i\mathrm{F}z = e\mathrm{F}\zeta$; et comme la quantité $\frac{k\mathrm{F}'c}{2\mathrm{F}'z}$ se réduit, dans ce cas, à $\frac{i}{2e}$, il s'ensuit que l'orbite rentrera sur elle-même après un nombre i de révolutions, ou $\frac{i}{2}$, selon que i est impair ou pair.

Étant donnée la fraction rationnelle $\frac{i}{e} > 2$, d'où l'on déduit la valeur du module c; étant données également les forces A et B, ou seulement leur rapport $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, les valeurs de m et m' ne sont plus arbitraires. En effet, les formules du cas 1er donnent $m' = m(1 - c^2) = mb^2$, $\sin\frac{1}{2}\theta = \varkappa = c$, $\cos\theta = 1 - 2c^2$; substituant ces valeurs dans les équations $\alpha^2 = \frac{\mathrm{A}mm' + \mathrm{B}}{\mathrm{A} + \mathrm{B}mm'}$, $2\alpha\cos\theta = \frac{(m+m')(\mathrm{A}+\mathrm{B})}{\mathrm{A}+\mathrm{B}mm'}$, et éliminant α, on aura pour déterminer m, l'équation

$$\frac{m}{1 - b^2m^2} = \frac{1 - 2c^2}{c\sqrt{(c^2 + 16b^4)}} \cdot \frac{2\sqrt{\mathrm{AB}}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}.$$

Connaissant m et m', les équations du n° 378 donneront cette relation entre les données m^0 et μ, à l'origine du mouvement,

$$\tang^2\mu = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}mm'}{\mathrm{A}+\mathrm{B}} \cdot \frac{(1 - m^0)^2}{(m - m^0)(m^0 - m')}.$$

Cette équation détermine l'angle μ, d'après la valeur connue de m^0, comprise entre m et m', ou d'après la position donnée du point A, entre les points E et D, connus par les valeurs de m et de m'. Elle servirait également à déterminer m^0 par le moyen de μ, ce qu'on ferait par les formules

$$\frac{m - m^0}{m^0 - m'} = \left(\frac{1 - m}{1 - m'}\right) \cdot \tang^2\chi,$$

$$\sin 2\chi = \frac{2\cot\mu\sqrt{[(1 - m)(1 - m')(\mathrm{A} + \mathrm{B}mm')]}}{(m - m')\sqrt{(\mathrm{A}+\mathrm{B})}},$$

χ étant une auxiliaire qui exige que $\cot\mu$ ne passe pas la limite d'où résulte $\sin 2\chi = 1$, et $\tang\chi = 1$.

Dans les deux cas, la vitesse initiale nécessaire pour que la courbe dont il s'agit soit décrite, est donnée par l'équation

$$\tfrac{1}{2}aV^2 \cdot \frac{m^2}{(1-m^2)^2} = \frac{A+Bmm'}{1-mm'}.$$

453. Soit, par exemple, $i=4$, $e=1$, on aura $c^2=\frac{2}{5}$, $b^2=\frac{3}{5}$, et la courbe qui a pour équation $4F(z)=F(\zeta)$ rentrera sur elle-même après deux révolutions; dans ce cas, m devra satisfaire à l'équation

$$\frac{m\sqrt{(385)}}{5-3m^2} = \frac{\sqrt{(AB)}}{A+B}.$$

Pour avoir une idée de la figure de cette courbe dans le cas le plus simple, supposons $m^0=m$, afin qu'on ait $\varepsilon=0$ et $z=\psi$; le point E sera l'origine du mouvement, et sera en même temps une apside supérieure. Pour avoir le premier point B^1 où la courbe rencontre son axe, il faudra faire $\zeta=\pi$, ce qui donne $F\psi=\frac{1}{2}F^1c$, $\sin\psi=\frac{1}{\sqrt{(1+b)}}$, $p^2=m(1-c^2\sin^2\psi)$ $=mb=\frac{GB^1}{FB^1}$, d'où résulte $GB^1=\frac{abm}{1-mb}$. Fig. 21.

La seconde intersection A^1 se trouvera en faisant $\zeta=2\pi$, ce qui donne $\psi=\frac{1}{2}\pi$, $p^2=mb^2=m'$; ainsi le point A^1, qui se confond avec le point D, est en même temps une apside inférieure. De là le corps retourne au nœud B, puis au point E, où s'achève la période entière de deux révolutions. Au reste, le point D ou A^1 partageant l'orbite en deux parties égales et semblables, il est visible que toutes les révolutions du corps seront d'une égale durée.

454. Prenons encore pour exemple les valeurs $i=3$, $e=1$, d'où résulte $c^2=\frac{5}{16}$, $b^2=\frac{11}{16}$; la courbe aura pour équation $3F(z)=F(\zeta)$, et elle rentrera sur elle-même après trois révolutions. Dans ce cas, la valeur de m devra satisfaire à l'équation,

$$\frac{4m\sqrt{70}}{16-11m^2} = \frac{\sqrt{(AB)}}{A+B}.$$

Par exemple, si l'on fait $\frac{A}{B}=\frac{35}{6}$, on aura $m=\frac{2}{11}$, et $m'=mb^2=\frac{1}{6}$.

Supposons, pour plus de simplicité, $m^0=m$, afin que E soit encore le premier point de la courbe, et qu'on ait $z=\psi$, $p^2=m(1-c^2\sin^2\psi)$. Le premier point d'intersection B^1 de la courbe avec l'axe se trouvera en faisant $\zeta=\pi$, $\psi=\gamma'$, et déterminant γ' par l'équation $F\gamma'=\frac{2}{3}F^1c$, ce qui donnera $p^2=m(1-c^2\sin^2\gamma')=\frac{GB^1}{FB^1}$. Fig. 22.

Le second point d'intersection A^1 se trouvera en faisant $\zeta=2\pi$, $\psi=\gamma''$, ce qui donnera $F\gamma''=\frac{4}{3}F^1c=2F\gamma'$, ensuite $p^2=m(1-c^2\sin^2\gamma'')=\frac{FA^1}{GA^1}$;

Enfin soit $\zeta = 3\pi$, $\psi = \gamma'''$, on aura $F\gamma''' = 2F'c$, $\gamma''' = \pi$, et par conséquent $p^2 = m$; ainsi le troisième point d'intersection B^2 se confond avec le point L, autre extrémité du grand axe EL de l'ellipse terminatrice, et ce point sera par conséquent une apside supérieure.

Le point L où le corps achève sa troisième demi-révolution est visiblement le milieu de l'orbite entière, composée de trois révolutions, après lesquelles le corps, revenu au point E, commence une nouvelle période de trois révolutions, et ainsi à l'infini.

On voit que la courbe aura deux nœuds ou points doubles situés en B^1 et A^1, et deux apsides supérieures situées aux extrémités E, L du grand axe de l'ellipse terminatrice; quant aux apsides inférieures, il y en a également deux, I^1 et I^2, qu'on déterminera en faisant successivement $\psi = \frac{1}{2}\pi$ et $\psi = \frac{3}{2}\pi$; soient λ' et λ''' les valeurs correspondantes de ζ, on aura, pour déterminer λ' et λ''', les équations $F\lambda' = 3F'c$, $F\lambda''' = 9F'c$, d'où résultent $\lambda' = \frac{3}{2}\pi$, $\lambda''' = \frac{9}{2}\pi$; ainsi le point I^1, situé au-dessous de l'axe EFG, sera déterminé par les valeurs $p^2 = m'$, $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tang} \frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, et le point I^2 sera placé semblablement au-dessus du même axe.

455. La supposition de $x = c$ nous a fait connaître un système de courbes algébriques qui satisfont aux formules du cas I; on trouvera également d'autres systèmes de courbes algébriques, en tel nombre qu'on voudra, par les suppositions $x = c^0$, c^{00}, c^{000}, etc., cette suite étant formée suivant la loi des modules décroissans.

Soit d'abord $x = c^0$, on aura $F(c, z) = \frac{1 + c^0}{2} F(c^0, z^0)$, et par conséquent $k\left(\frac{1 + c^0}{2}\right) F(c^0, z^0) = F(x, \zeta) = F(c^0, \zeta)$. Mais on a $c^2 = \frac{4c^0}{(1 + c^0)^2}$; donc $k\left(\frac{1 + c^0}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{1 + c^{02}}{1 - 2c^{02}}\right)}$. Soit cette quantité $= \frac{i}{e}$; on aura

$$c^{02} = x^2 = \frac{i^2 - e^2}{2i^2 + e^2},$$

et l'équation de la courbe deviendra $iF(z^0) = eF(\zeta)$, le module commun à ces fonctions étant c^0.

Les nombres i et e étant entiers, et $i > e$, il y aura toujours une équation algébrique qui représentera cette équation transcendante. D'ailleurs, entre z^0 et z on a l'équation

$$\sin(2z - z^0) = c^0 \sin z^0.$$

Ainsi en y joignant les valeurs de p et q de l'art. 449, on aura tous les

moyens pour construire la courbe et pour en trouver, si l'on veut, l'équation rapportée aux coordonnées x et y.

Et comme la quantité $\frac{kF'c}{F'z}$ se réduit, dans ce cas, à $\frac{k(1+c^0)}{2}$, ou $\frac{i}{e}$, on voit qu'il faudra i révolutions pour que la courbe rentre sur elle-même.

456. Étant données la valeur de $\frac{i}{e} > 1$ et celle de $\frac{A}{B}$, les valeurs de m et m' ne sont plus arbitraires. En effet, les formules du cas Ier donnent $m' = mb'$, $\sin\frac{1}{2}\theta = x$, $\cos\theta = 1 - 2x^2$, $4\cos^2\theta(A+Bmm')(Amm'+B) = (m+m')^2(A+B)^2$; de là on déduit, en faisant $\mathcal{C}^2 = 1 - x^2$,

$$\frac{4mm'}{(1-m'm)^2} = \frac{AB}{(A+B)^2} \cdot \frac{\mathcal{C}^4(1-2x^2)^2}{x^2(1+\mathcal{C}^2)}.$$

Connaissant mm', on aura $m = \frac{1}{b}\sqrt{mm'}$ et $m' = b\sqrt{(mm')}$. Ensuite on aura, comme dans l'art. 452, une relation entre m^0 et μ, qui laisse une de ces quantités arbitraires, et d'où l'on déduit enfin la vitesse nécessaire pour que la courbe dont il s'agit soit décrite.

457. Soit, par exemple, $i = 2$, $e = 1$; on aura $c^{00^2} = x^2 = \frac{1}{3}$, $\mathcal{C}^2 = \frac{2}{3}$, $c^2 = 2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$, $b = 2 - \sqrt{3}$, et la valeur de mm' devra être déduite de l'équation

$$\frac{35mm'}{(1-mm')^2} = \frac{AB}{(A+B)^2}.$$

Si l'on suppose, pour plus de simplicité, que le point E, où $p^2 = m$, est l'origine du mouvement, on aura $z = \psi$; l'équation de la courbe sera $2F\psi^0 = F\zeta$, le module commun étant $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$; de plus on aura, pour construire la courbe, les équations $\sin(2\psi - \psi^0) = x\sin\psi^0$, $p^2 = m(1 - c^2\sin^2\psi)$, $q = \frac{1}{\sqrt{a}}\tang\frac{1}{2}\zeta$. D'après ces équations, on trouvera que la courbe rentre sur elle-même après deux révolutions, et qu'elle est d'une forme analogue à celle de la figure 21.

458. Pour avoir un troisième système de courbes algébriques, soit $x = c^{00}$, on aura $F(c, z) = \frac{1+c^0}{2} \cdot \frac{1+c^{00}}{2} F(c^{00}, z^{00})$, et l'équation de la courbe deviendra

$$k \cdot \frac{1+c^0}{2} \cdot \frac{1+c^{00}}{2} F(x, z^{00}) = F(x, \zeta).$$

On a déjà trouvé $k \cdot \frac{1+c^0}{2} = \sqrt{\left(\frac{1+c^{0^2}}{1-2x^2}\right)}$; multipliant de part et d'autre par $\frac{1+c^0}{2}$ ou $\frac{1+x}{2}$, et observant que $c^0 = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$, on aura

$$k.\frac{1+c^{\circ}}{2}.\frac{1+c^{\circ\circ}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1+6\varkappa+\varkappa^{2}}{1-2\varkappa^{2}}\right)}.$$

Soit cette quantité $=\frac{i}{e}$, afin qu'on ait l'équation de la courbe $iF(z^{\circ\circ})=eF(\zeta)$, $\varkappa$ étant le module commun à ces fonctions, on aura

$$\varkappa=\frac{-3e^{2}+2\sqrt{(2e^{4}-i^{2}e^{2}+8i^{4})}}{e^{2}+8i^{2}}.$$

On voit, par cette formule, que toute valeur rationnelle de $\frac{i}{e}$ plus grande que $\frac{1}{2}$, donnera une valeur de $\varkappa$ comprise entre o et $\sqrt{\frac{1}{2}}$, et qu'ainsi on aura une courbe algébrique qui satisfera au problème, en laissant encore arbitraires, tant le rapport de A à B, que l'une des deux quantités m° et μ relatives à l'état initial du corps. Cette courbe rentrera sur elle-même après un nombre de révolutions qui peut être déterminé par la quantité $\frac{kF^{1}c}{2F^{1}\varkappa}$; et comme on a $F^{1}c=(1+c^{\circ})(1+c^{\circ\circ})F^{1}\varkappa$, cette quantité $=\frac{k}{2}(1+c^{\circ})\times(1+c^{\circ\circ})=\frac{2i}{e}$. Donc le nombre de ces révolutions sera $2i$ ou i, selon que e est impair ou pair.

On aura d'ailleurs, pour construire la courbe, les valeurs de p et q, comme dans l'art. 449, et de plus les équations

$$\sin(2z-z^{\circ})=c^{\circ}\sin z^{\circ},$$
$$\sin(2z^{\circ}-z^{\circ\circ})=\varkappa\sin z^{\circ\circ}.$$

459. Nous remarquerons enfin que la suite des modules décroissans $c, c^{\circ}, c^{\circ\circ}$, etc., étant liée par une même loi à la suite des modules croissans c, c', c'', etc., on pourra obtenir une infinité de combinaisons nouvelles, en faisant $\varkappa$ égal à l'un des termes c', c'', etc., et chaque supposition donnera naissance à une série infinie de courbes algébriques qui satisferont toutes aux formules du cas Ier.

Soit, par exemple, $\varkappa=c'$; puisqu'on a $F(c,z)=\frac{2}{1+c}F(c',z')$, l'équation $kF(c,z)=F(\varkappa,\zeta)$ deviendra $\frac{2k}{1+c}F(z')=F(\zeta)$, c' étant le module commun. Soit $\frac{2k}{1+c}$ ou $\frac{2}{1+c}\sqrt{\left(\frac{4-2c^{2}}{1-2\varkappa^{2}}\right)}=\frac{i}{e}$; si l'on substitue dans cette équation la valeur $\varkappa=\frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, il en résultera

$$c=\frac{3i^{2}-2\sqrt{(2i^{4}+2e^{2}i^{2}+32e^{4})}}{i^{2}+8e^{2}},$$

formule qui donnera $c < 3 - 2\sqrt{2}$, pourvu qu'on ait $i > 4e$; on connaîtra ensuite x par sa valeur $\frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, et son complément $\zeta = \sqrt{(1 - x^2)}$.

Cela posé, la courbe décrite aura pour équation $iF(z') = eF(\zeta)$, x étant le module commun; on aura en même temps l'équation $\tang(z - z') = \zeta \tang z$, à laquelle on joindra les valeurs de p et q données art. 440.

Quant au nombre de révolutions qui compose chaque période, il se déterminera par la quantité $\frac{kF'c}{F'x}$, qui se réduit à $\frac{i}{4e}$; ce nombre sera donc i, $\frac{1}{2}i$ ou $\frac{1}{4}i$, selon que i sera de la forme $2n+1$, $4n+2$ ou $4n$.

460. Il est inutile de pousser plus loin nos recherches sur les courbes algébriques qui peuvent satisfaire aux formules du cas I; il y en a, comme on voit, une infinité dans chaque système, et le nombre de ces systèmes peut être multiplié à l'infini. D'ailleurs, j'observe que les courbes ainsi déterminées sont différentes de celles qu'Euler a indiquées dans les Mémoires de Berlin, année 1760, celles-ci étant toutes rapportées à des fonctions dont le module $= \sqrt{\frac{1}{2}}$. Or, dans les formules du cas I, on ne peut jamais avoir $x^2 = \frac{1}{2}$, puisque cette valeur rendrait le coefficient k infini.

Du cas particulier où l'on a $m' = 0$.

461. L'hypothèse $m' = 0$ réduit l'ellipse $p^2 = m'$ à son grand axe FG; on a alors $c = 1$, et l'équation de la courbe devient $kF(1, z) = F(x, \zeta)$, ou $\frac{k}{2}\log\left(\frac{1+\sin z}{1-\sin z}\right) = F(x, \zeta)$; ainsi, on ne peut avoir $z = \frac{1}{2}\pi$ que lorsque ζ est infini, ou lorsque le corps a fait une infinité de révolutions autour de l'ellipse infiniment petite FG.

Supposons, pour plus de simplicité, que le point E soit l'origine du mouvement, on aura $\varepsilon = 0$, $z = \psi$, $p = \sqrt{m}.\cos\psi$, $q = \frac{1}{\sqrt{a}}\tang\frac{1}{2}\zeta$. Pour avoir le point B', premier point d'intersection de la courbe avec son axe, il faut faire $\zeta = \pi$, $\psi = \gamma'$, et γ' sera déterminé par l'équation $\log\left(\frac{1+\sin\gamma'}{1-\sin\gamma'}\right) = \frac{4}{k}F'x$; soit $n = \frac{4F'x}{k}$, on aura $\sin\gamma' = \frac{e^n - 1}{e^n + 1}$, ce qui donnera $p^2 = \ldots m\cos^2\gamma' = \frac{GB'}{FB'}$. Fig. 23.

Le second point d'intersection A' qui termine la première révolution, se trouvera en faisant $\zeta = 2\pi$, $\psi = \gamma''$ et γ'' sera déterminé par l'équation $\log\left(\frac{1+\sin\gamma''}{1-\sin\gamma''}\right) = 2n$, d'où l'on déduit $\sin\gamma'' = \frac{e^{2n}-1}{e^{2n}+1}$, $p^2 = m\cos^2\gamma'' = \frac{FA'}{GA'}$.

Le troisième point d'intersection B^3 se trouvera de même en faisant $\zeta = 3\pi$, $\psi = \gamma'''$, ce qui donnera $\sin\gamma''' = \frac{e^{3\pi}-1}{e^{3\pi}+1}$, ensuite $m\cos^2\gamma''' = \frac{FB^3}{GB^3}$.

En continuant ainsi, on voit que les termes γ', γ'', γ''', γ^{iv}, etc., croissent de plus en plus, jusqu'à la limite $\frac{1}{2}\pi$, qu'ils n'atteignent cependant que lorsque leur nombre est devenu infini. Il suit de là que les points d'intersection B^1, B^2, B^3, etc., se rapprochent continuellement du foyer G, et finissent par se confondre avec ce foyer. De même les points d'intersection A^1, A^2, A^3, etc., se rapprochent progressivement du foyer F, et finissent par se confondre avec lui. Ainsi, le corps parti du point E, suivant une direction perpendiculaire à l'axe EL, fait une infinité de révolutions autour de l'ellipse infiniment petite FG, lesquelles forment autant de spires qui se resserrent de plus en plus en s'approchant de FG; et le corps finit par coïncider avec l'un des centres F et G. On trouvera d'ailleurs, par la formule de l'art. 447, qu'à mesure que les spires se resserrent, le temps de chaque révolution approche de plus en plus de la limite $4T''$.

Développement du cas II.

462. Les formules générales du cas II ne diffèrent de celles du cas I que par les valeurs des constantes nécessaires pour construire la courbe, et par la valeur de q, dans laquelle $\frac{1}{2}\zeta$ est remplacé par ζ; changemens qui n'apportent qu'une modification très légère dans les formules qui servent à déterminer les intersections successives de la courbe avec l'axe et ses apsides tant supérieures, qu'inférieures. Du reste, le caractère essentiel du premier système, qui comprend les cas I et II, est que la courbe décrite par le corps soit comprise dans l'espace que laissent entre eux les périmètres des deux ellipses $p^2 = m$, $p^2 = m'$, dont les centres F et G sont les foyers. La courbe fera une infinité de révolutions dans cet espace; et ces révolutions seront toutes différentes les unes des autres, si la quantité $\frac{kF'c}{F'\pi}$ est irrationnelle; mais elle rentrera sur elle-même après un certain nombre de révolutions, si $\frac{kF'c}{F'\pi}$ est rationnelle, condition qui est toujours remplie lorsque l'orbite est une courbe algébrique.

Si l'on a $\frac{kF'c}{F'\pi} = \frac{i}{e}$, $\frac{i}{e}$ étant une quantité rationnelle, le nombre des révolutions après lesquelles la courbe rentre sur elle-même sera égal à i; et il suffira de connaître le mouvement du corps pendant une période de i

révolutions, puisque cette période se renouvellera sans cesse en restant toujours semblable à elle-même.

493. Si l'on veut déterminer le temps du mouvement, il faut d'abord observer que la première partie, désignée par t', se trouvera, ainsi que T', par les mêmes formules que dans l'art. 441, puisque p^2 est représenté dans les deux cas par la même valeur $m(1 - c^2 \sin^2 \psi)$. On aura soin également de retrancher du résultat la quantité constante $t'(\varepsilon)$, lorsque ε ne sera pas zéro; et comme le cas du corollaire II se déduit des formules générales en faisant $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$, il conviendra, pour plus d'uniformité, de calculer le temps par les formules de l'art. 441, et de retrancher du résultat la constante $t'(\frac{1}{2}\pi)$ ou T', ce qui suppose l'équation de la courbe $kF(c, \psi) - kF'c = F(\varkappa, \zeta)$, et en même temps $p^2 = m(1 - c^2 \sin^2 \psi)$. Cette observation s'applique également aux formules des cas I et II.

464. Pour avoir l'autre partie du temps désignée par t'', il faut, dans l'équation $\frac{dt''}{a\sqrt{2a}} = \frac{q^2}{(1+q^2)^2} \cdot \frac{dq}{\sqrt{Q}}$, substituer les valeurs $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tang} \zeta$, $\frac{dq}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha M - \alpha B)}} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \zeta)}}$; on aura, en faisant $\nu = \frac{1}{\alpha} - 1$, $D' = a\sqrt{\left(\frac{2a}{\alpha} \cdot \frac{1 - mm'}{A + Bmm'}\right)}$,

$$t'' = D'V(\zeta), \quad V(\zeta) = \int \frac{(1+\nu)\, d\zeta \sin^2\zeta \cos^2\zeta}{(1 + \nu \sin^2\zeta)^2 \sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2\zeta)}}.$$

Or, par les réductions connues on a, en faisant $\Delta = \sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2\zeta)}$,

$$\frac{2\nu(\varkappa^2+\nu)}{1+\nu} V(\zeta) = \left(2 + \nu + \frac{\varkappa^2}{\nu}\right)\Pi(\nu, \varkappa, \zeta) - \frac{\nu \Delta \sin\zeta \cos\zeta}{1 + \nu \sin^2\zeta} - \left(1 + \frac{\varkappa^2}{\nu}\right) F(\varkappa, \zeta) - E(\varkappa, \zeta).$$

Soit T'' ce que devient t'' lorsque $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, on aura $T'' = D'V'$, et

$$\frac{2\nu(\varkappa^2+\nu)}{1+\nu} V' = \left(2 + \nu + \frac{\varkappa^2}{\nu}\right)\Pi'(\nu, \varkappa) - \left(1 + \frac{\varkappa^2}{\nu}\right) F'\varkappa - E'\varkappa.$$

Quant à la valeur de $\Pi'(\nu, \varkappa)$, elle s'exprimera toujours par les fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce; mais la formule sera différente, selon que α sera plus petit ou plus grand que l'unité.

465. Par les formules du tableau, on trouve

$$\alpha\alpha' - 1 = \frac{(B - A)(1 - mm')}{A + Bmm'}, \quad \frac{(1 - \alpha)(1 - \alpha')}{1 + \alpha\alpha'} = \frac{(1 - m)(1 - m')}{1 + mm'};$$

d'où il suit que α et α' sont tous deux plus petits que l'unité, si l'on a $A > B$; et tous deux plus grands que l'unité, si l'on $A < B$.

Soit d'abord $A > B$, et par conséquent $\alpha < 1$, on pourra faire $\alpha = \sin^2 \eta$, ce qui donnera $\nu = \cot^2 \eta$; ensuite, par l'application de la formule du n° 108,

on trouvera

$$\begin{cases} \frac{\Delta(\mathcal{C}, \eta)}{\sin\eta\cos\eta}\Pi^1(\nu, \varkappa) = \mathrm{H} + \frac{\sin\eta}{\cos\eta}\Delta(\mathcal{C}, \eta).\mathrm{F}^1\varkappa, \\ \mathrm{H} = \frac{1}{2}\pi + (\mathrm{F}^1\varkappa - \mathrm{E}^1\varkappa)\mathrm{F}(\mathcal{C}, \eta) - \mathrm{F}^1\varkappa\mathrm{E}(\mathcal{C}, \eta); \end{cases}$$

d'où résulte

$$\mathrm{T}'' = \frac{\mathrm{D}'\sin^2\eta}{2\cos^2\eta(1 - \mathcal{C}^2\sin^2\eta)}\left(\frac{1 - \mathcal{C}^2\sin^4\eta}{\sin\eta\cos\eta\Delta(\mathcal{C}, \eta)}\mathrm{H} + \mathcal{C}^2\sin^2\eta\,\mathrm{F}^1\varkappa - \mathrm{E}^1\varkappa\right).$$

466. En second lieu, soit $\mathrm{A} < \mathrm{B}$, et par conséquent $\alpha > 1$, il faudra faire $\nu = \frac{1}{\alpha} - 1 = -1 + \mathcal{C}^2\sin^2\eta$, ce qui donnera $\sin^2\eta = \frac{1}{\mathcal{C}^2\alpha} = \frac{1}{\alpha'}$, et la valeur de η sera réelle, puisqu'on a $\alpha' > 1$. Ensuite la formule du n° 112, donnera

$$\frac{\mathcal{C}^2\sin\eta\cos\eta}{\Delta(\mathcal{C}, \eta)}[\Pi^1(\nu, \varkappa) - \mathrm{F}^1\varkappa] = \mathrm{H},$$

H étant la même quantité que dans l'article précédent, et de là résulte

$$\mathrm{T}'' = \frac{\mathrm{D}'\sin^2\eta}{2\cos^2\eta(1 - \mathcal{C}^2\sin^2\eta)}\left(\frac{1 - \mathcal{C}^2\sin^4\eta}{\sin\eta\cos\eta\Delta(\mathcal{C}, \eta)}\mathrm{H} + \mathcal{C}^2\sin^2\eta\,\mathrm{F}^1\varkappa - \mathrm{E}^1\varkappa\right).$$

Il est remarquable que la valeur de T'' soit la même lorsqu'on fait $\nu = -1 + \mathcal{C}^2\sin^2\eta$, que lorsqu'on fait $\nu = \cot^2\eta$; d'où résulte le théorème suivant :

« Si l'on prend entre les limites $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ les deux intégrales

$$\mathrm{V}(n) = \int\frac{(1+n)\,d\varphi\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^2\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}},\quad \mathrm{V}(n') = \int\frac{(1+n')\,d\varphi\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(1+n'\sin^2\varphi)^2\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}},$$

» dans lesquelles $n = \cot^2\theta$, $n' = -1 + b^2\sin^2\theta$, ces deux intégrales seront » égales à une même quantité

$$\mathrm{V}^1 = \frac{\sin^2\theta}{2\cos^2\theta\Delta^2(b, \theta)}\left(\frac{1 - b^2\sin^4\theta}{\sin\theta\cos\theta\Delta(b, \theta)}\mathrm{H} + b^2\sin^2\theta\,\mathrm{F}^1c - \mathrm{E}^1c\right),$$

» dans laquelle $\mathrm{H} = \frac{1}{2}\pi + (\mathrm{F}^2c - \mathrm{E}^1c)\,\mathrm{F}(b, \theta) - \mathrm{F}^1c.\mathrm{E}(b, \theta)$. »

Au reste, l'égalité de ces intégrales se déduirait immédiatement de la formule (g'), art. 54, en différenciant les deux membres par rapport aux paramètres n et $-m$, liés entre eux par l'équation $(1+n)(1-m) = b^2$.

467. Supposons maintenant qu'après tant de révolutions qu'on voudra, le corps se trouve en un point de l'orbite, déterminé, à compter de l'origine, par les arcs $\psi = \mathrm{I}\pi + \psi'$, $\zeta = \mathrm{L}\pi + \zeta'$, I et L étant des entiers, et ψ', ζ' des arcs positifs ou négatifs moindres que $\frac{1}{2}\pi$. Les parties du temps correspondantes à ces valeurs seront

$$t'(\psi) = 2\mathrm{IT}' + t'(\psi'),$$
$$t''(\zeta) = 2\mathrm{LT}'' + t''(\zeta');$$

ce qui donne le temps total

$$t = 2\mathrm{IT}' + 2\mathrm{LT}'' + t'(\psi') + t''(\zeta') - t'(\varepsilon),$$

formule dans laquelle les termes $t'(\psi)$, $t''(\zeta')$ prendront le même signe que les arcs ψ', ζ', dont ils dépendent.

468. D'après l'équation de la courbe $k\mathrm{F}(c, \psi) - k\mathrm{F}(c, \varepsilon) = \mathrm{F}(x, \zeta)$, on aura

$$2\mathrm{I} + \frac{\mathrm{F}(c, \psi')}{\mathrm{F}'c} = \frac{2\mathrm{LF}'x + \mathrm{F}(x, \zeta') + k\mathrm{F}(c, \varepsilon)}{k\mathrm{F}'c},$$

équation qui servira à déterminer I et ψ', par le moyen des valeurs données de L et ζ', et réciproquement.

Lorsque le corps aura achevé un nombre L de révolutions, on aura $\zeta = \mathrm{L}\pi$, $\zeta' = 0$; et si l'on fait $\mathrm{F}(c, \psi') = k'\mathrm{F}'c$, I et k' étant déterminées par l'équation

$$2\mathrm{I} + k' = \frac{2\mathrm{LF}'x + k\mathrm{F}(c, \varepsilon)}{k\mathrm{F}'c},$$

le temps correspondant sera

$$t = 2\mathrm{LT}'' + 2\mathrm{LT}' \cdot \frac{\mathrm{F}'x}{k\mathrm{F}'c} + t'(\psi') - t'(\varepsilon)$$
$$- \mathrm{T}'k' + \mathrm{T}' \frac{\mathrm{F}(c, \varepsilon)}{\mathrm{F}'c}.$$

Donc, si l'on appelle τ le temps moyen d'une de ces L révolutions, on aura

$$\tau = 2\mathrm{T}'' + 2\mathrm{T}' \cdot \frac{\mathrm{F}'x}{k\mathrm{F}'c} + \frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{L}}\left(\frac{t'(\psi')}{\mathrm{T}'} - k'\right) - \frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{L}}\left(\frac{t'(\varepsilon)}{\mathrm{T}'} - \frac{\mathrm{F}(c, \varepsilon)}{\mathrm{F}'c}\right).$$

Les deux derniers termes de cette formule, déjà très petits, puisqu'ils sont la différence de deux quantités presque égales, diminueront de plus en plus à mesure que le nombre L des révolutions augmentera; ainsi la valeur de τ approchera de plus en plus de la limite $2\mathrm{T}'' + 2\mathrm{T}' \cdot \frac{\mathrm{F}'x}{k\mathrm{F}'c}$. Elle sera exactement égale à cette limite, si l'orbite est rentrante sur elle-même, ou si $\frac{k\mathrm{F}'c}{\mathrm{F}'x}$ est égale à un nombre rationnel $\frac{i}{e}$, et si le temps total embrasse un nombre entier de périodes. Alors on a le temps moyen d'une révolution

$$\tau = 2\mathrm{T}'' + \frac{2e}{i}\mathrm{T}',$$

et le temps d'une période composée de i révolutions sera $2i\mathrm{T}'' + 2e\mathrm{T}'$.

Des courbes algébriques qui satisfont aux formules du cas II.

469. En faisant usage des mêmes formules que dans l'art. 449, l'équation de la courbe sera semblablement $k\mathrm{F}(c, z) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta)$, et on aura..... $k = \sqrt{\left(\frac{2-c^2}{2-\varkappa^2}\right)}$, valeur qui sera toujours comprise entre $\sqrt{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt{2}$.

Pour obtenir des courbes algébriques, on ne peut supposer $c = \varkappa$, parce qu'il en résulterait, suivant les formules du tableau général, $\alpha = m$ et $\alpha' = m'$, ce qui donnerait $\mathrm{B} = 0$.

Soit donc pour première hypothèse $\varkappa = c^0$, on aura l'équation..... $k \cdot \frac{1+c^0}{2} \mathrm{F}(c^0, z^0) = \mathrm{F}(c^0, \zeta)$; et pour avoir des courbes algébriques, il faudra faire $k\left(\frac{1+c^0}{2}\right)$ ou $\frac{1+c^0}{2}\sqrt{\left(\frac{2-c^0}{2-\varkappa^0}\right)} = \frac{i}{e}$; ce qui donnera

$$\varkappa^2 = \frac{4i^2 - e^2}{2i^2 + e^2}.$$

On peut prendre pour $\frac{i}{e}$ toute fraction rationnelle plus grande que $\frac{1}{2}$, et l'on aura une valeur convenable pour $\varkappa^2$, d'où l'on déduira $c = \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}$. Alors l'équation de la courbe sera $i\mathrm{F}(z^0) = e\mathrm{F}(\zeta)$, $\varkappa$ étant le module commun à ces fonctions. Cette équation devra être combinée avec l'équation $\sin(2z - z^0) = \varkappa \sin z^0$, et avec les valeurs de p et q données dans l'art. 449.

470. Connaissant c^2, $\varkappa^2$, ainsi que le rapport $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, on connaîtra le rapport $\frac{m'}{m} = 1 - c^2 = b^2$; mais il reste à déterminer séparément m et m'.

Pour cela, j'observe qu'on a, d'après le tableau général,

$$\alpha + \alpha' = \frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})(m+m')}{\mathrm{A}+\mathrm{B}mm'}, \quad \alpha\alpha' = \frac{\mathrm{A}mm' + \mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}mm'};$$

d'ailleurs on connaît le rapport $\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 - \varkappa^2$. Ainsi, en éliminant α et α', on aura pour déterminer mm', l'équation

$$\frac{mm'}{(1-mm')^2} = \frac{\mathrm{AB}}{(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2} \cdot \frac{b^2(2-\varkappa^2)^2}{(c^2-\varkappa^2)(c^2+\varkappa^2-c^2\varkappa^2)}.$$

Connaissant mm', on aura $m = \frac{1}{b}\sqrt{mm'}$, $m' = b\sqrt{(mm')}$. Ensuite les formules de l'art. 452 donneront deux équations de condition entre les donc

nées m^0, μ, V relatives à l'état initial du corps, pour que le mouvement ait lieu dans la courbe dont il s'agit.

Le nombre des révolutions après lesquelles la courbe rentrera sur elle-même, se détermine par la quantité $\frac{kF'c}{F'z} = k(1+c^0) = \frac{2i}{e}$; donc ce nombre est i ou $2i$, selon que e sera pair ou impair.

471. Pour avoir d'autres séries de courbes algébriques, on peut supposer comme ci-dessus, $z = c^{00}$, c^{000}, etc. Nous nous contenterons de développer encore le système qui résulte de la supposition $z = c^{00}$.

Alors l'équation de la courbe devient $k.\frac{1+c^0}{2}.\frac{1+c^{00}}{2}F(z, z^{00}) = F(z, \zeta)$. Soit $k.\frac{1+c^0}{2}.\frac{1+c^{00}}{2}$, ou $\frac{1+z}{4}\sqrt{\left(\frac{2+2c^{00}}{2-z^2}\right)} = \frac{i}{e}$; comme on a $c^{00} = \frac{4z}{(1+z)^2}$, il en résulte

$$z = \frac{-3e^2+2\sqrt{(2e^4+2i^2e^2+32i^4)}}{e^2+8i^2}.$$

On devra prendre $\frac{e}{i}$ entre les limites 1 et 4, et on aura une valeur convenable de z ou c^{00}, d'où l'on déduira $c^0 = \frac{2\sqrt{z}}{1+z}$, et $c = \frac{2\sqrt{c^0}}{1+c^0}$; du reste, on déterminera mm', m et m', par les mêmes formules que dans l'article précédent.

Cela posé, l'équation de la courbe sera $eF(z^{00}) = eF(\zeta)$, z étant le module commun à ces deux fonctions; elle devra être combinée avec la valeur de p de l'art. 449, et la valeur $q = \frac{1}{\sqrt{a}}\tang\zeta$, ainsi qu'avec les équations

$$\sin(2z - z^0) = c^0 \sin z^0,$$
$$\sin(2z^0 - z^{00}) = z \sin z^{00}.$$

D'ailleurs, comme on a $\frac{kF'c}{F'z} = k(1+c^0)(1+c^{00}) = \frac{4i}{e}$, il s'ensuit que le nombre de révolutions nécessaire pour que la courbe rentre sur elle-même, sera $4i$, $2i$ ou i, selon que e sera impair, double d'un impair, ou divisible par 4.

472. Le cas le plus simple est celui où l'on fait $i = 1$, $e = 2$, ce qui donne $z = \sqrt{2} - 1$, $c^0 = \sqrt{2z}$, $\rho = \frac{2\sqrt{c^0}}{1+c^0}$. Alors l'équation de la courbe sera $F(z^{00}) = 2F(\zeta)$, le module de ces fonctions étant $z = \sqrt{2} - 1$; cette courbe rentrera sur elle-même après deux révolutions; et on trouvera aisément que si, pour plus de simplicité, on suppose $\varepsilon = 0$, de sorte que le

point E soit l'origine du mouvement, la figure de cette courbe ressemble beaucoup à celle qui a été décrite, fig. 21.

Si, dans le même cas, on veut avoir les valeurs de m et m', qui répondent aux valeurs trouvées pour c et z, on aura à résoudre l'équation de l'art. 470, qui devient

$$\frac{mm'}{(1-mm')^2}\left(\frac{8}{z^3}-1\right)=\frac{AB}{(A+B)^2}.$$

Comme on doit toujours avoir $m<1$, on aura $mm'<b^2$, et $\frac{mm'}{(1-mm')^2}<\frac{b^2}{c^4}$; or, d'après la valeur $z=\sqrt{2}-1$, on a $\frac{b^2}{c^4}\cdot\frac{8}{z^3}=\frac{3}{4}$; ainsi, on devra avoir $\frac{AB}{(A+B)^2}<\frac{1}{4}-\frac{b^2}{c^4}$, ou $\left(\frac{A-B}{A+B}\right)^2>\frac{4b^2}{c^4}$. Mettant les valeurs numériques et supposant $A>B$, on aura $\frac{A-B}{A+B}>0.0942522$, ou $\frac{A}{B}>\frac{10942522}{9057478}$, et en termes plus simples, $\frac{A}{B}>\frac{239}{197}$. Cette condition étant remplie, on aura, par l'équation précédente, une valeur convenable de mm', qui donnera celles de m et de m'.

Soit, par exemple, $A=2B$, ou $B=2A$, on aura à peu près $mm'=\frac{1}{504}$, $m'=\frac{8}{955}$, $m=\frac{955}{1008}$. Or, $m=\frac{FE}{GE}$ et $m'=\frac{FD}{GD}$; donc $FE=\frac{955}{55}a$ et $FD=\frac{8}{955}a$, ou en rapportant les distances au point C, milieu de FG, on aura $FC=\left(\frac{955}{55}+\frac{1}{2}\right)a$, $DC=\left(\frac{8}{955}+\frac{1}{2}\right)a$. Ainsi le corps sera environ 37 fois plus éloigné du centre C dans l'apside supérieure E que dans l'apside inférieure D.

473. Si l'on prolonge l'échelle des modules dans le sens inverse, on pourra faire de même $z=c'$, $z=c''$, etc., et chaque supposition produira un nouveau système comprenant une infinité de courbes algébriques.

Il est à remarquer que ces calculs donneront des résultats semblables à ceux que nous avons déjà obtenus par les suppositions $z=c^0$, $z=c^{00}$, etc., avec cette différence que les modules c et z devront être échangés entre eux, ainsi que les variables z et ζ. La raison en est que l'équation générale $kF(c,z)=F(z,\zeta)$ peut être mise sous la forme $(2-c^2)^{\frac{1}{2}}F(c,z)=(2-z^2)^{\frac{1}{2}}F(z,\zeta)$, dont les deux membres sont semblables entre eux; d'où il suit que l'équation subsiste en faisant le double échange dont nous venons de parler.

474. Soit d'abord $z=c'$, ce qui revient à faire $c=z^0$, on aura, comme

au n° 469,

$$c^2 = \frac{4i^2 - e^2}{2i^2 + e^2},$$

ce qui donne $x = c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, et l'équation de la courbe sera $i\mathrm{F}(c, \zeta^0) = e\mathrm{F}(c, z)$, ou simplement $i\mathrm{F}(\zeta^0) = e\mathrm{F}(z)$, c étant le module commun.

Pour construire la courbe, il faudra combiner cette équation avec l'équation $\sin(2\zeta - \zeta^0) = c \sin \zeta^0$ et avec les valeurs de p et q données art. 449.

Quant au nombre de révolutions nécessaire pour que la courbe rentre sur elle-même, il se détermine toujours par la quantité $\frac{k\mathrm{F}'c}{\mathrm{F}'x} = \frac{k}{1+x^0} = \frac{e}{2i}$; donc ce nombre sera e ou $\frac{1}{2}e$, selon que e est impair ou pair.

475. Soit en second lieu $x = c''$, ou $c = x^{00}$, on aura comme au n° 471,

$$c = \frac{-3e^2 + 2\sqrt{(2e^4 + 2i^2e^2 + 3i^4)}}{e^2 + 8i^2},$$

ensuite $c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, et c'' ou $x = \frac{2\sqrt{c'}}{1+c'}$. Cela posé, l'équation de la courbe sera $e\mathrm{F}(z) = i\mathrm{F}(\zeta^{00})$, e étant le module commun à ces fonctions; elle devra être combinée avec les équations $\sin(2\zeta - \zeta^0) = c' \sin\zeta^0$, $\sin(2\zeta^0 - \zeta^{00}) = c \sin \zeta^{00}$, la valeur de p de l'art. 449 et la valeur $q = \frac{1}{\sqrt{a}} \tang \zeta$.

D'ailleurs comme on a $\frac{k\mathrm{F}'c}{\mathrm{F}'x} = \frac{k}{(1+c)(1+c')} = \frac{e}{4i}$, le nombre de révolutions qui compose une période sera e, $\frac{1}{2}e$ ou $\frac{1}{4}e$, selon que e sera impair, double d'un impair, ou divisible par 4.

476. La formule générale suppose $e > i$ et $e < 4i$; c'est pourquoi le cas le plus simple s'obtient en faisant $e = 2$, $i = 1$. Alors on a l'équation $2\mathrm{F}z = \mathrm{F}\zeta^{00}$, et la période ne sera que d'une révolution, c'est-à-dire que la courbe rentrera sur elle-même après une seule révolution; ce cas est très remarquable, et il mérite d'être développé.

Supposons, pour plus de simplicité, que le point E soit celui où commence le mouvement, on aura $\zeta = 0$, $z = \psi$, $p^2 = m(1 - c^2 \sin^2 \psi)$, $q = \frac{1}{\sqrt{a}} \tang \zeta$, et l'équation de la courbe sera $2\mathrm{F}\psi = \mathrm{F}(\zeta^{00})$. Fig. 24.

Pour avoir le premier point d'intersection de la courbe avec l'axe, soit $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, on aura $\zeta^0 = \pi$, $\zeta^{00} = 2\pi$, $\psi = \pi$ et $p^2 = m$. Donc le point B', où la courbe rencontre son axe après une demi-révolution, se confondra avec l'extrémité L du grand axe de l'ellipse $p^2 = m$, et ce point sera par conséquent une apside supérieure, comme le point de départ E.

Entre les deux points E et L, le corps a dû passer par son apside infé-

rieure I^1; pour déterminer ce point, il faut faire $\psi = \frac{1}{2}\pi$, ce qui donne $\zeta^{00} = \pi$, $\zeta^0 = \frac{1}{2}\pi$ et $\tang^2 \zeta = \frac{1}{b}$. Donc le point I^1 est déterminé par les valeurs $p^2 = m'$, $q = \sqrt{\left(\frac{1}{ab}\right)}$.

Ainsi, pendant une révolution, le corps passe deux fois à l'apside supérieure en E et L, et deux fois à l'apside inférieure en I^1 et I^2. Dans ce cas, il est évident que toutes les demi-révolutions doivent se faire en temps égaux.

477. Il est essentiel d'oberver que dans toutes les hypothèses $x = c'$, $x = c''$, etc., où l'on aura $x > c$, les forces A et B devront être de signes contraires, c'est-à-dire que l'une de ces forces sera attractive et l'autre répulsive. Cela résulte de l'équation

$$\frac{mm'}{(1-mm')^2} = \frac{AB}{(A+B)^2} \cdot \frac{b^2(2-x^2)^2}{(c^2-x^2)(c^2+x^2-c^2x^2)},$$

dont le second membre serait négatif, si AB ne devenait pas négatif en même temps que le facteur $c^2 - x^2$.

Cette circonstance, qu'on peut admettre au moins comme hypothèse, n'entraînera d'ailleurs aucun inconvénient; les quantités α et α' seront toujours de même signe, et les formules générales s'appliqueront sans difficulté aux cas particuliers.

478. Ayant donc fait $x = c''$, ensuite $\epsilon = 2$, $i = 1$, ce qui donne $c = \sqrt{2} - 1$, $c' = \sqrt{2c}$, $x = \frac{2\sqrt{c'}}{1+c}$; supposant de plus $\epsilon = 0$, on aura, comme dans l'art. 476, $2F\psi = F\zeta^{00}$, c étant le module commun, $\sin(2\zeta - \zeta^0) = c' \sin\zeta^0$, $\sin(2\zeta^0 - \zeta^{00}) = c \sin\zeta^{00}$, $p^2 = m(1 - c^2 \sin^2\psi)$, $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tang\zeta$.

Pour appliquer ces formules à un cas particulier, j'observe que la valeur de x étant substituée dans l'équation de l'article précédent, on aura

$$\frac{mm'}{(1-mm')^2} = -\frac{AB}{(A+B)^2} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{2}c)^3 - 1}.$$

Soit donc, par exemple, $A = 2I$, $B = -I$, I étant l'unité qui sert à mesurer les forces A et B, on aura à résoudre l'équation

$$\left(\frac{1+mm'}{1-mm'}\right)^2 = \frac{9-(\frac{1}{2}c)^3}{1-(\frac{1}{2}c)^3}.$$

Ensuite on connaîtra $m = \frac{1}{b}\sqrt{mm'}$, $m' = b\sqrt{mm'}$; $\alpha = \frac{\sqrt{mm'}}{2-mm'} \cdot \frac{(1+b)^2}{2b}$; appliquant donc les valeurs numériques, on aura les résultats suivans :

$$\log mm' = 9.7002592, \qquad \log c = 9.6172243,$$
$$\log m = 9.8910024, \qquad \log b = 9.9591271,$$
$$\log m' = 9.8092567, \qquad \log a = 9.9764602.$$

A l'égard de la vitesse initiale V qui a lieu au point E, elle devra satisfaire à l'équation

$$V^2 = \frac{(1-m)^2}{\frac{1}{2}ma} \cdot \frac{A+Bmm'}{1-mm'} = \frac{2I}{a} \cdot \frac{(1-m)^2}{m} \cdot \frac{2-mm'}{1-mm'}.$$

Au moyen de toutes ces données, le corps décrira la courbe algébrique que nous avons déterminée, laquelle rentre sur elle-même après une seule révolution.

Du cas particulier où l'on a $\alpha = \alpha'$.

479. Ce cas se rapporte également aux formules du cas II et à celles du cas I; il sert de passage de l'un à l'autre, puisqu'on doit avoir alors... $\frac{m-m'}{1-mm'} = \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}$. Mais comme la variable ζ n'a pas la même signification dans les deux cas principaux, nous suivrons ici les dénominations du cas II.

On a d'abord $\lambda = 0$, $k = \sqrt{(1-\frac{1}{2}\delta^2)}$, $m' = m(1-c^2) = mb^2$; ainsi il faudra satisfaire à l'équation $\frac{mb^2}{1-bmb^2} = \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}$. Supposons que A et B sont donnés, ainsi que la quantité m qui détermine la position du point E sur l'axe EFG, on déterminera le module c par l'équation

$$c^2 = \frac{(1-m^2).2\sqrt{AB}}{m(A+B)-2m^2\sqrt{AB}},$$

d'où résulte $b^2 = \frac{m(A+B)-2\sqrt{AB}}{m(A+B)-2m^2\sqrt{AB}}$; ainsi, pour que cette solution ait lieu, il faut prendre $m > \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}$. Connaissant le module c, on aura $m' = mb^2$; ensuite α se déduira à volonté de l'une des deux équations

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}(m+m')(A+B)}{A+Bmm'}, \quad \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2 = \frac{1+m}{1-m} \cdot \frac{1+m'}{1-m'}.$$

Supposons encore, pour plus de simplicité, $\varepsilon = 0$, on aura l'équation de la courbe $kF(c, \psi) = \zeta$, qu'il faudra combiner avec les valeurs $p^2 = m(1-c^2\sin^2\psi)$, $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tang\zeta$.

Cette courbe ne peut jamais devenir algébrique, parce qu'on ne peut supposer $c = 0$; cependant elle rentrerait sur elle-même après un nombre

déterminé de révolutions, si la quantité $\frac{kF^1c}{\frac{1}{2}\pi}$ était rationnelle. Ce cas seul excepté, la courbe fera une infinité de révolutions dans l'espace renfermé entre les périmètres des ellipses $p^2 = m$, $p^2 = m'$, et ces révolutions seront toutes d'une inégale durée.

Pour déterminer les apsides I^1, S^1, I^2, S^2, etc., alternativement supérieures et inférieures, il faut faire successivement $\psi = \frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, etc.; et les valeurs correspondantes de ζ, qui croissent proportionnellement aux valeurs de ψ, seront $\zeta = kF^1c$, $2kF^1c$, $3kF^1c$, etc.

Développement du cas III.

480. Le cas III est le premier des quatre cas principaux qui composent le second système. Dans ce système, la valeur de p varie depuis $p = 0$ jusqu'à $p = \sqrt{m}$; l'ellipse $p^2 = m$ enveloppe toujours l'orbite, et la touche dans les points S^1, S^2, S^3, etc., qui sont ses apsides supérieures; mais il n'y a d'apsides inférieures que les points I^1, I^2, I^3, etc., situés entre les centres F et G, où la courbe rencontre son axe, et où, par conséquent, la somme des rayons vecteurs $r + s$, égale à FG, est un *minimum*.

Les formules propres au cas III, ainsi qu'aux trois autres cas du second système, sont établies en supposant que le point A, origine du mouvement, est situé sur l'axe entre les centres F et G. C'est à ce point que sont rapportées les données m^0, μ, V, d'après lesquelles on détermine m, m' et M, comme nous l'avons fait voir dans l'art. 415, et qui servent aussi à déterminer la constante ε, comme l'indiquent les formules du tableau général.

481. Dans le cas III, les intersections de la courbe avec l'axe sont de trois sortes, savoir :

Les intersections B^1, B^2, B^3, etc., qui ont lieu à droite du centre G; elles se déterminent par la valeur $q = \infty$, en faisant successivement $\zeta = \pi$, 3π, 5π, etc.

Les intersections A^1, A^2, A^3, etc., qui ont lieu à gauche du centre F; elles se déterminent par la valeur $q = 0$, en faisant successivement $\zeta = 2\pi$, 4π, 6π, etc.

Enfin les intersections I^1, I^2, I^3, etc., qui ont lieu entre les centres F et G; elles se déterminent par la valeur $p = 0$, en faisant successivement $\psi = \pi$, 2π, 3π, etc.

Ces derniers points sont en même temps les apsides inférieures de la courbe; quant aux apsides supérieures S^1, S^2, S^3, etc., elles seront déter-

minées par la valeur $p^2 = m$, en faisant successivement $\psi = \frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, etc. Ainsi, on voit que la détermination de ces points est liée avec celle des apsides inférieures I^1, I^2, I^3, etc., de manière qu'on peut obtenir les uns et les autres par un même calcul.

482. Pour déterminer avec plus d'uniformité les points B^1, A^1, B^2, A^2, B^3, etc., qui répondent aux valeurs $\zeta = \pi$, 2π, 3π, 4π, 5π, etc., nous procéderons comme dans le n° 439. Supposons que les valeurs correspondantes de ψ soient $\psi = \gamma', \gamma'', \gamma'''$, etc., il s'agira de résoudre les équations successives $k\mathrm{F}(c, \gamma') + \mathrm{F}(\varkappa, \epsilon) = 2\mathrm{F}^1\varkappa$, $k\mathrm{F}(c, \gamma'') + \mathrm{F}(\varkappa, \epsilon) = 4\mathrm{F}^1\varkappa$, etc. Pour cela, soient η et δ' deux arcs déterminés par les équations

$$\mathrm{F}(c, \eta) = \frac{2}{k}\mathrm{F}(\varkappa, \epsilon),\ \mathrm{F}(c, \delta') = \frac{1}{k}\mathrm{F}^1\varkappa;$$

appelons ensuite δ'', δ''', etc., les amplitudes qui résultent de la multiplication de la fonction $\mathrm{F}(c, \delta')$ ou $\mathrm{F}\delta'$, en sorte qu'on ait

$$\mathrm{F}(\delta'') = 2\mathrm{F}\delta',\ \mathrm{F}\delta''' = 3\mathrm{F}\delta',\ \mathrm{F}\delta^{\mathrm{IV}} = 4\mathrm{F}\delta',\ \text{etc.},$$

c étant le module commun à ces fonctions.

Cela posé, chaque valeur de γ se déduira de celle du δ correspondant qui a le même indice, en résolvant l'équation $\mathrm{F}\gamma + \mathrm{F}\eta = \mathrm{F}\delta$. Il en résulte

$$\frac{p}{c\sqrt{m'}} = \frac{\sin\eta\cos\delta\Delta(\delta) + \sin\delta\cos\eta\Delta(\eta)}{\Delta(\eta)\Delta(\delta) + c^2\sin\eta\cos\eta\sin\delta\cos\delta}.$$

Faisant ensuite $p^2 = \frac{GB^2}{FB^2}$ ou $\frac{FA^2}{GA^2}$, la position du point d'intersection correspondant B^2 ou A^2 sera déterminée.

483. Pour déterminer semblablement les points S^1, I^1, S^2, I^2, S^3, I^3, etc., qui répondent alternativement aux apsides supérieures et inférieures, nous supposerons qu'en faisant successivement $\psi = \frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, $\frac{5}{2}\pi$, 3π, etc., on ait les valeurs correspondantes $\zeta = \lambda', \lambda'', \lambda''', \lambda^{\mathrm{IV}}, \lambda^{\mathrm{V}}, \lambda^{\mathrm{VI}}$, etc.; il faudra résoudre les équations successives $k\mathrm{F}^1c = \mathrm{F}(\varkappa, \lambda') - \mathrm{F}(\varkappa, \epsilon)$, $2k\mathrm{F}^1c = \mathrm{F}(\varkappa, \lambda'') - \mathrm{F}(\varkappa, \epsilon)$, etc. Pour cela, soit δ' une première auxiliaire déterminée par l'équation $\mathrm{F}(\varkappa, \delta') = k\mathrm{F}^1c$; ensuite soient δ'', δ''', δ^{IV}, etc., d'autres auxiliaires qui résultent de la multiplication de la fonction $\mathrm{F}(\varkappa, \delta')$, en sorte qu'on ait

$$\mathrm{F}\delta'' = 2\mathrm{F}\delta',\ \mathrm{F}\delta''' = 3\mathrm{F}\delta',\ \mathrm{F}\delta^{\mathrm{IV}} = 4\mathrm{F}\delta',\ \text{etc.},$$

$\varkappa$ étant le module commun, il restera à résoudre en général l'équation $\mathrm{F}\lambda - \mathrm{F}\epsilon = \mathrm{F}\delta$, $\varkappa$ étant le module commun à ces fonctions, et on en déduira

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\lambda = \frac{\sin\iota\cos\delta\Delta(\delta) + \sin\delta\cos\iota\Delta(\iota)}{1 - \alpha^2\sin^2\iota\sin^2\delta + \cos\iota\cos\delta - \sin\iota\sin\delta\Delta(\delta)\Delta(\iota)},$$

formule dans laquelle on a $\Delta(\iota) = \sqrt{(1 - \varkappa^2\sin^2\iota)}$, $\Delta(\delta) = \sqrt{(1 - \varkappa^2\sin^2\delta)}$, et où il faudra donner à λ et δ un même nombre d'accens.

Les points I^1, I^2, I^3, etc., qui sont les apsides inférieures, ou les points d'intersection de la courbe avec l'axe, entre les centres F et G, seront en général déterminés par la valeur $q^2 = \frac{1}{\alpha}\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\zeta = \frac{FI}{GI}$, où il faudra donner à ζ les valeurs successives $\zeta = \lambda''$, λ^{IV}, λ^{VI}, etc.

Les points S^1, S^2, S^3, etc., qui sont les apsides supérieures, seront déterminés par la valeur constante $p^2 = m$ et la valeur $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\zeta$, dans laquelle il faudra faire successivement $\zeta = \lambda'$, λ''', λ^{V}, etc.

484. Examinons maintenant combien le corps devra faire de révolutions pour arriver à un point de l'orbite déterminé, soit par la valeur $\zeta = L\pi$, soit par la valeur $\psi = I\pi$, L et I étant des nombres entiers. Le nombre de demi-révolutions se trouvera par celui des intersections de la courbe avec l'axe; car nous comptons comme demi-révolution le passage d'une intersection à l'intersection suivante.

Soit d'abord $\zeta = L\pi$; cette valeur conviendra au dernier des points d'intersection B, A^1, B^1, A^2, B^2, etc.; ainsi le nombre de ces points sera L. Mais il y a d'autres points d'intersection I^1, I^2, etc., situés entre F et G; pour en connaître le nombre, il faut avoir la valeur de ψ qui correspond à la valeur $\zeta = L\pi$. Soit donc $\psi = I\pi + \psi'$, I étant un entier et ψ' un arc positif moindre que π, on aura pour déterminer I et ψ', l'équation

$$I + \frac{F(c, \psi')}{2F'c} = \frac{2LF'\varkappa + F(\varkappa, \iota)}{2kF'c}.$$

Ainsi I sera l'entier le plus grand contenu dans la quantité donnée... $\frac{2LF'\varkappa + F(\varkappa, \iota)}{2kF'c}$.

I étant ainsi déterminé, le nombre total des demi-révolutions qui correspondent à la valeur $\zeta = L\pi$, sera $L + I$.

En second lieu, soit donnée la valeur $\psi = I\pi$; le nombre des points d'intersection I^1, I^2, I^3, etc., dont le dernier répond à la valeur $\psi = I\pi$, sera I. Pour avoir le nombre des autres points d'intersection, il faut connaître la valeur correspondante de ζ; soit donc $\zeta = L\pi + \zeta'$, L étant un entier et ζ' un arc positif moindre que π. On aura, pour déterminer L et ζ', l'équation

$$L + \frac{F(\varkappa, \zeta')}{2F'\varkappa} = \frac{2kIF'c + F(\varkappa, \varepsilon)}{2F'\varkappa}.$$

Connaissant L, le nombre total des points d'intersection, ou celui des demi-révolutions du corps dans son orbite, sera $I + L$.

485. Pour que le corps revienne au point de départ A, après un certain nombre de révolutions, il faut qu'on ait à la fois $\psi = e\pi$ et $\zeta = 2i\pi + \varepsilon$, e et i étant des entiers, ce qui donnera $\frac{kF'c}{F'\varkappa} = \frac{2i}{e}$; ainsi il faut que la quantité $\frac{kF'c}{F'\varkappa}$ soit une fraction rationnelle $\frac{2i}{e}$. Alors le nombre des demi-révolutions faites par le corps sera $2i + e$; si e est pair, le corps aura achevé $i + \frac{1}{2}e$ révolutions, et la courbe rentrera sur elle-même. Mais si e est impair, il faudra encore $2i + e$ demi-révolutions pour que la courbe rentre sur elle-même. Ainsi, en général, le nombre des révolutions qui composent une période, sera $i + \frac{1}{2}e$ ou $2i + e$, selon que e sera pair ou impair : on connaîtra d'ailleurs les nombres i et e par la valeur $\frac{kF'c}{2F'\varkappa}$, réduite à l'expression la plus simple $\frac{i}{e}$.

486. Les résultats des deux articles précédens devront être modifiés, si la courbe passe par l'un des foyers F et G.

Pour que le corps parvienne au foyer F, il faut qu'on ait à la fois $p = 0$, $q = 0$, c'est-à-dire $\psi = n\pi$ et $\zeta = 2n'\pi$, n et n' étant des entiers. Alors on aura l'équation de condition $2knF'c = 4n'F'\varkappa - F(\varkappa, \varepsilon)$. Si dans cette équation on regarde $kF'c$, $F'\varkappa$ comme seules données, les entiers n et n' étant à volonté, ainsi que $F(\varkappa, \varepsilon)$, qui doit seulement être plus petit que $F(\varkappa, \pi)$ ou $2F'\varkappa$, on voit qu'il y aura une infinité de manières de satisfaire à cette équation, c'est-à-dire qu'il y a une infinité de suppositions à faire sur l'état initial du mouvement dont dépend la valeur de la constante ε, pour que le corps, après un certain nombre de demi-révolutions, parvienne au centre F.

Cependant lorsque $kF'c$ et $F'\varkappa$ seront commensurables entr'eux, si l'on appelle H leur commune mesure, les diverses valeurs de $F(\varkappa, \varepsilon)$ ne pourront être que des multiples de $2H$, ainsi leur nombre sera limité.

Pour que le corps parvienne au foyer G, il faut qu'on ait à la fois $\psi = n\pi$ et $\zeta = (2n' + 1)\pi$, ce qui donnera l'équation de condition $2knF'c = 2(2n' + 1)F'\varkappa - F(\varkappa, \varepsilon)$, équation à laquelle on pourra satisfaire d'une

infinité de manières, si $\frac{kF'c}{F'\kappa}$ est irrationnelle; et d'un certain nombre de manières seulement, si cette quantité est rationnelle.

487. Les cas dont nous venons de parler donnent lieu à exception dans les formules des articles 484 et 485; car si le foyer G est l'un des points d'intersection de la courbe avec l'axe, ce point appartiendra également à la série des points B^1, B^2, B^3, etc., et à celle des points I^1, I^2, I^3, etc. De même si le foyer F est l'un des points d'intersertion de la courbe avec l'axe, ce point appartiendra également à la série des points A^1, A^2, A^3, etc., et à celle des points I^1, I^2, I^3, etc. Ainsi, dans l'énumération des points d'intersection qui servent à compter les révolutions du corps dans son orbite, il y aurait une unité à retrancher, tant de la somme $L + I$ trouvée article 484, que de la somme $2i + e$ de l'art. 485.

Mais une remarque plus essentielle à faire, c'est qu'aussitôt que le corps est parvenu à l'un des foyers F et G, les formules générales cessent d'être applicables à la question, puisque, passé ces points, les valeurs de p et q devraient être supposées imaginaires.

On doit être peu surpris de cette difficulté analytique, si l'on considère que la vitesse du corps devient infinie lorsqu'il parvient à l'un des centres des forces; on peut supposer que la loi de continuité est violée par cette circonstance; du reste, nous ne nous occuperons pas ici de la solution de cette difficulté, et nous ferons généralement abstraction, dans tout ce qui suit, des cas où l'orbite peut passer par l'un des foyers. Nous donnerons cependant ci-après l'exemple d'un cas de ce genre, dans lequel le mouvement se détermine d'une manière qui semble d'abord peu admissible, mais que le calcul justifie suffisamment.

488. Il faut maintenant chercher dans le cas III l'expression générale du temps que le corps met à parvenir à un point quelconque de son orbite. Ce temps est toujours composé de deux parties, l'une t' fonction de ψ, l'autre t'' fonction de ζ; or, comme la valeur de q est la même que dans le cas I, les formules pour déterminer la partie t'', ou plutôt $t'' + t'''$, seront les mêmes que dans les art. 442 et suivans; il faudra seulement observer que dans le résultat on devra retrancher la constante $t''(\epsilon) + t'''(\epsilon)$, parce qu'à l'origine du mouvement on a $\zeta = \epsilon$. Il ne reste donc à trouver que la valeur de la première partie t'.

Si dans l'équation $\frac{dt'}{a\sqrt{2a}} = \frac{p^2}{(1-p^2)^2} \cdot \frac{dp}{\sqrt{P}}$, on substitue les valeurs qui

conviennent au cas III, savoir $p^2 = \frac{c^2 m' \sin^2\psi}{1 - c^2 \sin^2\psi}$, $\frac{dp}{\sqrt{P}} = \frac{c}{\sqrt{(Mm)}} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\psi)}}$, on aura, en faisant pour abréger, $n = -c^2(1 + m')$, $D = \ldots\ldots$ $c^3 m' \cdot \sqrt{\left(\frac{2\alpha^3}{m} \cdot \frac{1 + mm'}{A + B}\right)}$,

$$t' = DZ, \quad Z = \int \frac{d\psi \sin^2\psi \sqrt{(1 - c^2 \sin^2\psi)}}{(1 + n \sin^2\psi)^2}.$$

Or, par les réductions connues, on a

$$2(1+n)Z = -\frac{\Delta \sin\psi \cos\psi}{1 + n \sin^2\psi} + \frac{c^2 + n}{n^2} F(c,\psi) - \frac{1}{n} E(\psi) + \left(1 - \frac{c^2}{n^2}\right) \Pi(n,c,\psi).$$

Soit Z^1 la valeur de Z lorsque $\psi = \frac{1}{2}\pi$, on aura

$$2(1+n) Z^1 = \frac{c^2 + n}{n^2} F^1 c - \frac{1}{n} E^1 c + \left(1 - \frac{c^2}{n^2}\right) \Pi^1(n, c).$$

Or, si l'on fait $n = -1 + b^2 \sin^2\lambda$, on aura $\sin^2\lambda = 1 - m$; et en substituant la valeur de $\Pi^1(n, c)$, déduite de la formule de l'art. 112, puis faisant, pour abréger, $K = \frac{1}{2}\pi + (F^1 c - E^1 c) F(b, \lambda) - F^1 c . E(b,\lambda)$, on aura

$$2b^2 \sin^2\lambda (1 - b^2 \sin^2\lambda) Z^1 = E^1 c - b^2 \sin^2\lambda F^1 c + \frac{\cos^4\lambda - b^2 \sin^4\lambda}{\sin\lambda \cos\lambda \Delta(b,\lambda)} . K.$$

Soit T' la valeur de t' lorsque $\psi = \frac{1}{2}\pi$, on aura $T' = DZ^1$, ou

$$T' = \frac{D}{2b^2 \sin^2\lambda (1 - b^2 \sin^2\lambda)} \left(E^1 c - b^2 \sin^2\lambda F^1 c + \frac{(\cos^4\lambda - b^2 \sin^4\lambda) K}{\sin\lambda \cos\lambda \sqrt{(1 - b^2 \sin^2\lambda)}}\right).$$

En général, soit $\psi = I\pi + \psi'$, et on aura la partie du temps correspondante

$$t'(\psi) = 2IT' + t'(\psi');$$

cette partie devra être jointe à celle qui dépend de la variable ζ, savoir, $t''(\zeta) + t'''(\zeta) - t''(\epsilon) - t'''(\epsilon)$.

Du cas particulier où l'on a $m' = m$.

489. Alors on a $c^2 = \varkappa^2 = \frac{1}{2}$, et la valeur de k devient indéterminée. Pour obvier à cet inconvénient, je fais $m' = m(1 - 2\delta)$; δ étant supposé infiniment petit, j'ai $c^2 = \frac{1}{2}(1 + \delta)$, $\cos\theta = \frac{\delta m (A + B)}{\alpha(A - Bm^2)} = 1 - 2\varkappa^2$. Donc $k^2 = \frac{4c^2 - 2}{1 - 2\varkappa^2} = \frac{2\alpha}{m} \cdot \frac{A - Bm^2}{A + B}$, on, en substituant la valeur de α,

$$k^4 = \frac{4AB}{(A+B)^2} \left(\frac{1 + m^2}{m}\right)^2 - 4.$$

k étant ainsi déterminé, l'équation de la courbe sera

$$kF(\psi) = F(\zeta) - F(\varepsilon),$$

le module commun à ces fonctions étant $c = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

490. Si l'on veut que la courbe décrite soit une courbe algébrique, il faudra faire $k = \frac{i}{e}$, $\frac{i}{e}$ étant une fraction rationnelle à volonté; alors m devra être déterminée par l'équation

$$\frac{4m^2}{(1+m^2)^2} = \frac{4AB}{(A+B)^2} \cdot \frac{4e^4}{i^4 + 4e^4}.$$

Connaissant les nombres i, e, et le rapport $\frac{A}{B}$, on trouvera toujours par cette équation une valeur convenable de m, car le second membre étant toujours plus petit que l'unité, si on le désigne par $\sin^2 h$, on aura $m = \tang \frac{1}{2} h$; et comme on peut prendre $h < \frac{1}{2}\pi$, on aura $m < 1$.

D'après les formules de l'art. 415, le cas de $m' = m$ suppose une vitesse initiale V telle que

$$\tfrac{1}{2} aV^2 = \frac{\left(\frac{A}{m^0} + Bm^0\right)(1+m^0)^2}{(1+m^0)^2 - 2m^0 \sin^2\mu};$$

de plus, on doit avoir entre m^0 et μ l'équation

$$\frac{(A + Bm^{0\,2}) \sin^2\mu}{(1+m^0)^2 - 2m^0 \sin^2\mu} = \frac{m^2(A+B)}{1+m^2},$$

d'où l'on déduit

$$\cos^2\mu = \frac{A - Bm^2 + m^{0\,2}(B - Am^2)}{2m^0 m^2 (A+B) + (1+m^2)(A + Bm^{0\,2})};$$

et comme on doit supposer dans ce cas $A > Bm^2$, et $B > Am^2$, il s'ensuit que $\cos\mu$ n'est jamais zéro, et qu'ainsi $\sin\mu$ ne peut surpasser un *maximum* facile à déterminer par la variation de m^0. La valeur de m^0, qui convient au *maximum* de $\sin\mu$ est $m^0 = \frac{A - Bm^2}{B - Am^2}$, ce qui donne $\cos^2\mu = \frac{1 - m^2}{1 + m^2\left(\frac{1}{m^0} + 1 + m^0\right)}$, et $\sin^2\mu = \frac{4e^4(1-m^2)}{i^4 + 4e^4(1-m^2)}$.

Ayant donc pris m^0 et μ dans les limites convenables, l'équation de la courbe sera $iF\psi = e(F\zeta - F\varepsilon)$; et si l'on fait $F\zeta - F\varepsilon = F\zeta'$, elle deviendra $iF\psi = eF\zeta'$. On aura en même temps les valeurs suivantes de p et q.

$$p = \frac{c\sqrt{m}.\sin\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}},$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\zeta = \frac{1}{\sqrt{a}} . \frac{1 - \cos\varepsilon \cos\zeta' - c^2 \sin^2\varepsilon \sin^2\zeta' + \sin\varepsilon \sin\zeta' \Delta(\varepsilon)\Delta(\zeta')}{\sin\varepsilon \cos\zeta' \Delta(\zeta) + \sin\zeta' \cos\varepsilon \Delta(\varepsilon)}.$$

Étant donné le rapport $\frac{A}{B}$, on peut varier à l'infini les nombres entiers i et e, ainsi que les données m^0 et μ; d'où il suit qu'il y a une infinité de courbes algébriques qui satisfont à la question dans l'hypothèse de $m' = m$, laquelle est d'ailleurs comprise dans l'hypothèse $C' + C = 0$, dont nous avons parlé n° 402.

491. Le cas le plus simple s'obtient en faisant $i = 1$, $e = i$, ce qui donnera l'équation de la courbe $\psi = \zeta'$; mais il vaudra autant conserver cette équation sous la forme $F\psi = F\zeta - F\varepsilon$, parce que de là il est facile de déduire algébriquement, suivant les cas, ψ par le moyen de ζ, et réciproquement.

Pour avoir le premier point B^1 d'intersection de la courbe avec l'axe, il faut faire $\zeta = \pi$, ce qui donnera $\psi = \pi - \varepsilon$, et $p^2 = \frac{c^2 m \sin^2\varepsilon}{1 - c^2 \sin^2\varepsilon} = \frac{GB^1}{FB^1}$. Fig. 25.

Le point d'intersection suivant I^1 se trouvera en faisant $\psi = \pi$, ce qui donne $\zeta = \pi + \varepsilon$, $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\zeta = -\cot \frac{1}{2}\varepsilon$, et $q = -\frac{1}{a\sqrt{m^0}}$; ce point I^1 se trouvera donc en faisant $q^2 = \frac{1}{a^2 m^0} = \frac{FI^1}{GI^1}$. Il se confondrait avec le point A, si la valeur initiale de μ était telle, qu'on eût $m^0 = \frac{1}{a}$; cas où l'on a $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$.

Le troisième point d'intersection A^1 se trouvera en faisant $\zeta = 2\pi$, ce qui donne $\psi = 2\pi - \varepsilon$, $\sin\psi = -\sin\varepsilon$, et $p^2 = \frac{c^2 m \sin^2\varepsilon}{1 - c^2 \sin^2\varepsilon} = \frac{FA^1}{GA^1}$; ainsi le point A^1 sera situé à la même distance du centre F, que le point B l'est du centre G.

Pour avoir la quatrième intersection, on fera $\psi = 2\pi$, ce qui donnera $\zeta = 2\pi + \varepsilon$; ainsi cette quatrième intersection retombera sur le point A, et la période sera entièrement achevée. Cette période est composée par conséquent de deux révolutions.

Dans le cas de $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$, les points A et I^1 coïncideraient, et les points A^1 et B^1 seraient des apsides supérieures.

Des cas où la courbe devient algébrique.

492. Revenons aux formules générales du cas III; et comme la valeur de $k = \sqrt{\left(\frac{4c^2-2}{1-2c^2}\right)}$ ne permet pas de supposer $z = c$, excepté dans le cas déjà examiné où $c = \sqrt{\frac{1}{2}}$, faisons, pour première hypothèse, $z = c^2$, nous aurons $F(c, \psi) = \frac{1+c^2}{2} F(c^2, \psi^2)$. Soit donc $k = \frac{1+c^2}{2}$, ou $\frac{1+c^2}{2}\sqrt{\left(\frac{4c^2-2}{1-2c^{2}}\right)} = \frac{i}{e}$, il en résultera

$$c^2 = z = \frac{e^2 + 2i^2}{3e^2 + \sqrt{(8e^4 + 2e^2 i^2 + 8i^4)}}.$$

Étant donnés les nombres i et e qui servent à déterminer les modules c et z; connaissant de plus le rapport $\frac{A}{B}$, les quantités m et m' ne sont plus arbitraires; car les formules générales qui servent à déterminer α et α' donnent l'équation suivante pour déterminer mm':

$$\frac{mm'}{(1+mm')^2} = \frac{4AB}{(A+B)^2} \cdot \frac{b^2c^2(1-2z^2)^2}{4b^2c^2(1-2z^2)^2 + (2c^2-1)^2},$$

ensuite on aura $m = \frac{c}{b}\sqrt{(mm')}$, et $m' = \frac{b}{c}\sqrt{(mm')}$, $\alpha^2 = \frac{B - Amm'}{A - Bmm'}$. Connaissant m et m', les équations du n° 415 donneront cette relation entre m^2 et μ,

$$\sin^2\mu = \frac{(1+m^2)^2\, mm'(A+B)}{m^2(m-m'+2mm')(A+B) + (1+mm')(A+Bm^{2})},$$

qui permet de prendre m^2 à volonté, pourvu que la valeur de $\sin\mu$ qui en résulte soit plus petite que l'unité; enfin la vitesse initiale V sera donnée par l'équation

$$\tfrac{1}{2}aV^2 = \frac{m - m' + 2mm'}{1+mm'}(A+B) + \frac{A}{m^2} + Bm^2.$$

Avec toutes ces conditions, l'équation de la courbe décrite sera $aF\psi^2 = \sigma(F\zeta^2 - F\varepsilon)$; on aura en même temps les équations $\sin(2\psi - \psi^2) = c^2\sin\psi^2$, $p = \frac{\sigma\sqrt{mm'}\,.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tang\frac{1}{2}\zeta$. On obtiendra ainsi une infinité de courbes algébriques qui satisferont aux formules du cas III.

493. Si l'on fait $\zeta = 2L\pi + \varepsilon$ et $\psi = I\pi$, ou $\psi^2 = 2I\pi$, le corps reviendra au point du départ A, pourvu que les entiers L et I satisfassent à l'équation $Ii = eL$, qui donne $L = i$, $I = e$; or, depuis la valeur $\zeta = \varepsilon$ jusqu'à la valeur $\zeta = 2L\pi + \varepsilon$, il devra y avoir 2L intersections, soit à droite de G,

soit à gauche de F; la valeur $\psi = \ln$ indique pareillement I intersections entre F et G; donc le nombre total des intersections, ou celui des demi-révolutions, sera $2L + I$. Si ce nombre est pair, la période sera terminée après $L + \frac{1}{2}I$ révolutions; mais si I est impair, il faudra encore un pareil nombre de demi-révolutions pour terminer la période. Ainsi, en général, l'orbite rentrera sur elle-même après un nombre de révolutions $L + \frac{1}{2}I$ ou $2L + I$, selon que $2L + I$ sera pair ou impair. Il faut, comme nous l'avons déjà dit, excepter les cas où la courbe passerait par l'un des centres F et G; car la continuation du mouvement au-delà de ce centre n'est point donnée par nos formules. J'observerai, au reste, que si dans la fraction $\frac{i}{e}$, toujours supposée réduite aux moindres termes, le dénominateur e est pair, la courbe ne passera par aucun des centres F et G; alors la période sera de $i + \frac{1}{2}e$ révolutions; si au contraire le dénominateur e est impair, la courbe passera toujours par l'un des centres F et G; savoir, par le centre F, si i est pair, et par le centre G, si i est impair.

494. La supposition $x = c^0$ fait connaître une infinité de courbes algébriques qui satisfont au cas III; on en trouverait de même une infinité par chacune des suppositions $x = c^{00}$, $x = c^{000}$, etc.; mais il nous paraît superflu d'entrer dans de nouveaux détails à ce sujet.

Développement du cas IV.

495. Les observations générales que nous avons faites sur les formules du cas III s'appliquent avec très peu de modifications aux formules du cas IV; nous nous dispenserons donc de donner une explication détaillée de celles-ci; nous remarquerons seulement que le temps se déterminera par les formules déjà données, savoir, la partie t' qui dépend de ψ, par les formules de l'art. 488, et la partie t'' qui dépend de ζ, par les formules de l'art. 464.

496. A l'égard des courbes algébriques qui peuvent satisfaire au cas IV, il est facile d'en trouver tant de séries qu'on voudra. L'hypothèse la plus simple pour obtenir de telles courbes, consiste à faire $c = x$ et $k = \ldots \sqrt{\left(\frac{2c^2-1}{2-c^2}\right)} = \frac{i}{e}$, il en résultera

$$c^2 = x^2 = \frac{2i^2+e^2}{2e^2+i^2}, \qquad b^2 = \frac{e^2-i^2}{e^2+i^2}.$$

Ainsi pourvu qu'on prenne $e > i$, on aura une valeur convenable du mo-

dule c, et l'équation de la courbe sera $iF\psi = e(F\zeta - F\epsilon)$; on aura en même temps $p = \frac{c\sqrt{m'}.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \frac{1}{\sqrt{a}}\tang\zeta$.

Ayant pris à volonté la fraction $\frac{i}{e} < 1$, et le rapport $\frac{A}{B}$, on connaîtra d'abord le module c, par la formule précédente; ensuite mm' devra être déterminé par l'équation

$$\frac{mm'}{(1+mm')^2} = \frac{AB}{(A+B)^2} \cdot \frac{c^2(2-c^2)^2}{1+c^6}.$$

Connaissant mm', on aura $m = \frac{c}{b}\sqrt{(mm')}$, et $m' = \frac{b}{c}\sqrt{(mm')}$. Enfin, les deux équations de l'art. 492 donneront, l'une la relation entre m^0 et $\sin\mu$, l'autre la valeur de la vitesse initiale V, pour que la courbe dont il s'agit soit décrite.

On trouvera d'ailleurs, comme dans le n° 493, que la courbe rentrera sur elle-même après un nombre de révolutions $i + \frac{1}{2}e$, si e est pair. Lorsque e est impair, la courbe passe par l'un des foyers F et G, et la période cesse d'avoir lieu, ou ne peut être déterminée que par d'autres considérations.

Du cas particulier où l'on a $B = Amm'$.

497. Dans ce cas on a $a' = 0$, $\varkappa = 1$, $k = \sqrt{(2c^2 - 1)}$, et l'équation de la courbe devient $kF(c, \psi) = F(1, \zeta) - F(1, \epsilon)$, ou

$$2kF(c, \psi) = \log\left(\frac{1+\sin\zeta}{1-\sin\zeta}\right) - \log\left(\frac{1+\sin\epsilon}{1-\sin\epsilon}\right).$$

Cette courbe n'est point algébrique, mais elle est d'une forme qui mérite d'être remarquée.

On voit que l'arc ζ a pour limite $\frac{1}{2}\pi$, et qu'il n'atteint cette limite que lorsque ψ est devenu infini; d'ailleurs, comme ζ augmente en même temps que ψ, et que lorsque $\psi = 0$ on a $\zeta = \epsilon$, il faut, à plus forte raison, qu'on ait $\epsilon < \frac{1}{2}\pi$; c'est ce qu'on voit immédiatement par l'équation $\tang\epsilon = \sqrt{(am^0)}$; on peut même prouver que ϵ est $< \frac{1}{4}\pi$; car on a, dans ce cas, $a = \frac{m-m'}{1-mm'}$, et par les équations de l'art. 492, on trouve

$$am^0 = 1 - \frac{mm'}{1-mm'}(1+m^0)^2\cot^2\mu = \tang^2\epsilon.$$

498. Puisque dans la courbe dont il s'agit, la valeur de ζ est toujours comprise entre ϵ et $\frac{1}{2}\pi$, cette courbe ne peut rencontrer son axe qu'entre les points F et G, ou même qu'entre les points A, G. Ces points d'inter-

section sont les apsides inférieures successives I^1, I^2, I^3, etc.; ils répondront aux valeurs $\psi = \pi$, 2π, 3π, etc.

Quant aux apsides supérieures S^1, S^2, S^3, etc., toutes placées sur le périmètre de l'ellipse $p^2 = m$, elles devront répondre aux valeurs $\psi = \frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, etc.

Supposons qu'aux valeurs successives $\psi = \frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, $\frac{5}{2}\pi$, etc. répondent les valeurs..... $\zeta = \lambda'$, λ'', λ''', λ^{iv}, λ^{v}, etc., le premier terme λ' de cette dernière suite sera déterminé par l'équation $2kF^1c = \log\left(\frac{1+\sin\lambda'}{1-\sin\lambda'}\right) - \log\left(\frac{1+\sin\varepsilon}{1-\sin\varepsilon}\right)$. Soit $2kF^1c = n$, et on aura

$$\frac{1+\sin\lambda'}{1-\sin\lambda'} = \frac{1+\sin\varepsilon}{1-\sin\varepsilon}\, e^{n}.$$

On aura de même $\frac{1+\sin\lambda''}{1-\sin\lambda''} = \frac{1+\sin\varepsilon}{1-\sin\varepsilon}\, e^{2n}$, et en général, pour un indice quelconque i,

$$\frac{1+\sin\lambda^{i}}{1-\sin\lambda^{i}} = \frac{1+\sin\varepsilon}{1-\sin\varepsilon}\, e^{in}.$$

De là on voit que la suite ε, λ', λ'', λ''', λ^{iv}, etc. est continuellement croissante depuis le terme ε ou λ^0, jusqu'au dernier terme $\frac{1}{2}\pi$. Il en résulte que les points I^1, I^2, I^3, etc. s'approchent continuellement du centre G, avec lequel ils finissent par se confondre, et que les points S^1, S^2, S^3, S^4, etc. s'approchent de même continuellement du point L, avec lequel ils finissent par coïncider. Mais ces coïncidences n'ont lieu qu'après un nombre de termes infini.

499. Cela posé, on voit que la courbe est composée d'une infinité de parties AS^1I^1, $I^1S^2I^2$, $I^2S^3I^3$, etc., situées alternativement des deux côtés de l'axe FG, lesquelles avancent graduellement par leurs bases AI^1, I^1I^2, I^2I^3, etc., jusqu'au point G, et par leurs sommets jusqu'au point L, qui est le dernier terme de la suite supérieure S^1, S^3, S^5, etc., comme celui de la suite inférieure S^2, S^4, S^6, etc. Fig. 26.

Cette courbe ainsi composée d'une infinité de spires juxta-posées qui diminuent continuellement de largeur, et dont les sommets convergent vers le point L, ne ressemble en rien aux autres courbes que nous avons décrites jusqu'à présent; et c'est un résultat de calcul assez frappant, qu'une telle courbe puisse être décrite par l'action de deux forces, qui, considérées séparément, ne pourraient faire décrire qu'une ellipse. Si l'on demandait, dans ce cas, quel est le temps moyen d'une révolution, il faudra entendre par demi-révolution le passage d'un point d'intersection tel que I^2

au point d'intersection suivant I⁴, pendant lequel ψ varie depuis 3π jusqu'à 4π. En général, si l'on calcule, par les formules données ci-dessus, le temps écoulé depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = I\pi$, ce temps sera celui des I premières demi-révolutions, et en le divisant par I on aura le temps moyen d'une demi-révolution, lequel approchera d'autant plus d'une valeur constante, que I sera plus grand; d'où il suit qu'à mesure que ψ augmente, les temps des demi-révolutions tendent de plus en plus vers l'égalité.

On pourrait aussi considérer le mouvement du corps comme une espèce de mouvement d'oscillation, dans lequel le corps passe successivement d'une apside supérieure telle que S^2 à l'apside suivante S^3, puis de S^3 à S^4, et ainsi de suite. Ces sortes d'oscillations vont en diminuant d'étendue, à mesure que le corps s'approche du centre G, mais elles finissent par s'effectuer toutes dans le même temps.

Développement du cas V.

500. Les cas I et II, et tous ceux qui en dépendent, ont un caractère commun et distinctif qui consiste en ce que les intersections de la courbe avec l'axe ne peuvent avoir lieu que dans les parties DE, KL situées entre les deux ellipses terminatrices. Les cas III et IV se distinguent des premiers, en ce que les intersections de la courbe avec son axe ont lieu, non-seulement dans les deux parties DF, GL comprises entre les ellipses $p^2 = m$, $p^2 = 0$, mais encore dans la partie de l'axe FG comprise entre les deux centres. Les cas V et VI, qui nous restent à examiner, se distinguent des autres en ce que les intersections de la courbe avec l'axe n'ont lieu que dans les deux parties FG, GL qui sont adjacentes au centre G. Il y a donc dans ces deux derniers cas une partie de l'axe DE, même une partie FI^0 de la droite FG, déterminée par la valeur $\frac{FI^0}{GI^0} = \alpha$, où il ne peut y avoir aucune intersection de la courbe. Cela s'explique par la prépondérance de la force qui agit au centre G, soit à raison de l'intensité, soit à raison d'une moindre distance.

Cette propriété des deux cas V et VI qui les distingue de tous les autres, est fondée sur les valeurs $q = \frac{V\alpha}{\sin\zeta}$ et $q = \frac{V\alpha}{\cos\zeta}$, qui ne peuvent jamais se réduire à zéro. Ainsi, il n'y a aucune intersection entre les points E et F; et la moindre valeur de q^2 étant α, si l'on prend sur la droite de FG le point I^0 tel que $\frac{FI^0}{GI^0} = \alpha$, il ne pourra y avoir non plus aucune intersec-

tion entre F et I^0, puisque cette intersection supposerait une valeur de q^0 plus petite que a.

501. Nous avons déjà suffisamment expliqué la manière de trouver les diverses intersections de la courbe avec son axe. On sait que les points B^1, B^2, B^3, etc., situés sur la partie GL de l'axe, se trouvent en faisant $q = \infty$, ce qui donne successivement $\zeta = \pi$, 2π, 3π, etc. (On ne fait pas $\zeta = 0$, parce que la première valeur de ζ étant ϵ, la valeur $\zeta = 0$ se rapporterait à une époque antérieure à l'origine du mouvement.) Soit en général, γ^n la valeur de ψ qui répond à la valeur $\zeta = n\pi$, le point correspondant B^n se déterminera par l'équation $\frac{c^2 m' \sin^2 \gamma^n}{D - c^2 \sin^2 \gamma^n} = \frac{GB^n}{FB^n}$. A l'égard des points d'intersection I^1, I^2, I^3, etc., situés entre les centres F et G, ils font partie de la suite des apsides tant supérieures qu'inférieures S^1, I^1, S^2, I^2, S^3, I^3, etc., à laquelle répondent les valeurs $\psi = \frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, $\frac{5}{2}\pi$, 3π, etc. Appelant donc λ', λ'', λ''', etc., les valeurs correspondantes de ζ, et calculant ces valeurs comme dans l'art. 483, on connaîtra à la fois les points I^1, I^2, I^3, etc., qui sont censés les apsides inférieures de la courbe, et les apsides supérieures S^1, S^2, S^3, etc.

502. Pour que la courbe rentre sur elle-même après un certain nombre de révolutions, il faut qu'on ait à la fois $\psi = 2I\pi$, $\zeta = 2L\pi + \epsilon$, I et L étant des entiers, ce qui donnera $\frac{kF'c}{F'x} = \frac{L}{I}$. Ainsi, toutes les fois que $\frac{kF'c}{F'x}$ sera une quantité rationnelle, son expression la plus simple $\frac{L}{I}$ fera connaître les valeurs $\psi = 2I\pi$, $\zeta = 2L\pi + \epsilon$, qui ont lieu après l'achèvement de la première période, et cette période devra se renouveler à l'infini.

Par la valeur $\psi = 2I\pi$, on voit que le nombre des points d'intersection I est 2I; et par la valeur $\zeta = 2L\pi + \epsilon$, on voit que le nombre des points d'intersection B est 2L; et comme chaque intersection répond à une demi-révolution, il s'ensuit que la courbe rentrera sur elle-même après un nombre de révolutions égal à I + L.

503. Si le rapport $\frac{kF'c}{F'x}$ est irrationnel, l'orbite sera composée d'une infinité de révolutions inégales entre elles; et il n'est aucun point de l'axe, dans toute la partie IGL prise à compter du point I où l'on a $\frac{FI}{GI} = m$, qui puisse être regardé comme un point d'intersection de la courbe avec l'axe.

Au contraire, si la quantité $\frac{kF'c}{F'x}$ est rationnelle, il n'y aura qu'un cer-

tain nombre d'intersections, dont on a vu que le nombre est $2I + 2L$. Mais la question est de savoir si le centre G peut être un de ces points d'intersection.

Pour qu'il en soit un, il faut qu'on ait à la fois $\psi = i\pi$, $\zeta = l\pi$, i et l étant des entiers. Or, si d'après l'hypothèse $\frac{kF'c}{F'\varkappa} = \frac{L}{I}$, on fait $F'\varkappa = I\chi$, $kF'c = L\chi$, l'équation de la courbe $kF(c, \psi) = F(\varkappa, \zeta) - F(\varkappa, \varepsilon)$ donnera dans ce cas

$$F(\varkappa, \varepsilon) = 2\chi\,(Il - Li).$$

Et comme en vertu de l'indétermination des nombres i et l, on peut faire à volonté $Il - Li = 1, 2, 3$, etc., il s'ensuit que le cas dont il s'agit aura effectivement lieu, si la fonction $F(\varkappa, \varepsilon)$ est égale à 2χ, ou à un multiple de 2χ, moindre cependant que $2I\chi$, puisque ε doit toujours être moindre que π. Ces cas seront une exception à la loi générale de l'art. 502; car lorsque le corps parvient à l'un des centres des forces, la continuation de son mouvement ne peut se déterminer par les mêmes formules qu'en altérant infiniment peu les élémens ou l'un des élémens de l'orbite, de manière qu'elle ne passe pas tout-à-fait par le centre, mais qu'elle en approche jusqu'à une distance aussi petite qu'on voudra.

504. Si l'on veut avoir l'expression générale du temps dans le cas V, la première partie t' qui dépend de ψ se déterminera comme dans l'art. 488. Quant à la seconde partie t'', on la trouvera par la formule $\frac{dt''}{a\sqrt{2a}} = \frac{q^2}{(1+q^2)^2} \cdot \frac{dq}{\sqrt{Q}}$, dans laquelle il faut substituer les valeurs $q = \frac{\sqrt{a}}{\sin\zeta}$, $\frac{dq}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{\sqrt{(Ma - Aa)}} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2\zeta)}}$, ce qui donnera, en faisant, pour abréger, $D'' = \sqrt{\left(\frac{2a^3}{a^3} \cdot \frac{1 + mm'}{B - Amm'}\right)} = \frac{c}{ka}\sqrt{\left(\frac{2a^3}{m} \cdot \frac{1 + mm'}{A + B}\right)}$, $\nu = \frac{1}{a}$,

$$t'' = D'' \int \frac{d\zeta \sin^2\zeta}{(1 + \nu \sin^2\zeta)^2 \sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2\zeta)}}.$$

Soit $N = (\nu + 1)(\nu + \varkappa^2)$, on aura, par les réductions connues,

$$t'' = \frac{D''}{2N}\left[-\frac{\nu\Delta \sin\zeta \cos\zeta}{1 + \nu \sin^2\zeta} + \left(1 + \frac{\varkappa^2}{\nu}\right)F(\varkappa,\zeta) - E(\varkappa,\zeta) + \left(\nu - \frac{\varkappa^2}{\nu}\right)\Pi(\nu,\varkappa,\zeta)\right];$$

et si on appelle T'' la valeur de t'' lorsque $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, on aura

$$T'' = \frac{D''}{2N}\left[\left(1 + \frac{\varkappa^2}{\nu}\right)F'\varkappa - E'\varkappa + \left(\nu - \frac{\varkappa^2}{\nu}\right)\Pi'(\nu, \varkappa)\right].$$

D'ailleurs, en faisant $a = \tang^2 \delta$, ou $\nu = \cot^2 \delta$, et $\varkappa^2 = 1 - \varkappa^2$,

on a

$$\frac{\Delta(\zeta,\delta)}{\sin\delta\cos\delta}\left[\Pi'(\nu,\varkappa)-\sin^2\delta\,F'\varkappa\right]=\tfrac{1}{2}\pi+(F'\varkappa-E'\varkappa)F(\zeta,\delta)-F'\varkappa E(\zeta,\delta);$$

donc, en appelant K′ le second membre de cette équation, il viendra

$$T''=\frac{D''}{2N}\left[\left(1+\frac{\varkappa^2+\nu}{\nu+1}\right)F'\varkappa-E'\varkappa+\left(\nu-\frac{\varkappa^2}{\nu}\right)\frac{K'\sin\delta\cos\delta}{\Delta(\zeta,\delta)}\right].$$

D'après ces deux formules, il sera aisé de trouver le temps employé par le corps à parvenir à un point quelconque de son orbite, déterminé par les valeurs $\psi=I\pi+\psi'$, $\zeta=L\pi+\zeta'$, entre lesquelles on a l'équation

$$\frac{kF'c}{F'\varkappa}\left(2I+\frac{F(c,\psi')}{F'c}\right)=2L+\frac{F(\varkappa,\zeta')-F(\varkappa,\iota)}{F'\varkappa}.$$

Des courbes algébriques qui satisfont au cas V.

505. Soit d'abord $c=\varkappa$, et $k=\sqrt{\left(\frac{1-2c^2}{1+c^2}\right)}=\frac{i}{e}$, on aura

$$c^2=\varkappa^2=\frac{e^2-i^2}{2e^2+i^2}.$$

Ainsi, pourvu qu'on prenne $e>i$, on aura une valeur convenable du module c. Soit donné en outre le rapport $\frac{A}{B}$, on aura, pour déterminer mm', l'équation

$$\frac{mm'}{(1+mm')^2}=\frac{b^2(1+c^2)^2}{1+b^6}\cdot\frac{AB}{(A+B)^2},$$

ensuite m et m' seront connus par les valeurs $m=\frac{c}{b}\sqrt{mm'}$, $m'=\frac{b}{c}\sqrt{mm'}$.

Ces valeurs ayant lieu, ainsi que les deux équations de l'art. 492, entre les données m^0, μ et V, relatives à l'état initial, la courbe décrite aura pour équation $iF(\psi)=e(F\zeta-F\iota)$, c étant le module commun; on aura en même temps

$$p=\frac{c\sqrt{m'}.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}},\ q=\frac{\sqrt{a}}{\sin\zeta};$$

et ce système comprendra une infinité de courbes algébriques.

506. Soit, par exemple, $e=2$, $i=1$, on aura $c^2=\frac{1}{3}$, $b^2=\frac{8}{3}$, et la valeur de mm' devra être tirée de l'équation $\frac{mm'}{(1+mm')^2}=\frac{32}{35}\cdot\frac{AB}{(A+B)^2}$, ensuite on aura $m=\sqrt{(\frac{1}{2}mm')}$, $m'=2m$. Supposons de plus, que la position

initiale du point A est telle, qu'on a $F\epsilon = \frac{3}{2}F'c$, ce qui donne $\sin\epsilon = \frac{\ }{\sqrt{(1+b)}}$, $\cos\epsilon = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(1+b)}}$; voici comment on trouvera la figure de la courbe d'après son équation $\frac{1}{2}F\psi = F\zeta - \frac{3}{2}F'c$.

Fig. 27 Pour avoir le premier point d'intersection B', soit $\zeta = \pi$, on aura $\psi = \frac{1}{2}\pi$, et $p^2 = m$; donc ce point coïncide avec l'extrémité L du diamètre de l'ellipse $p^2 = m$, et il est en même temps une apside supérieure de la courbe.

Soit ensuite $\psi = \pi$, afin d'avoir le point d'intersection I', on aura $F\zeta = \frac{5}{2}F'c$, ou $\zeta = 2\pi - \epsilon$; ainsi le point I' coïncide avec le point A, ce qui, d'ailleurs, résulte de ce que la tangente en L est perpendiculaire à l'axe, et qu'ainsi les deux parties de la trajectoire situées des deux côtés de l'axe doivent être égales et semblables.

Pour avoir la seconde apside supérieure S², soit $\psi = \frac{3}{2}\pi$, on aura $F\zeta = 3F'c$, et par conséquent $\zeta = \frac{3}{2}\pi$; ainsi le point S² sera déterminé par les valeurs $p^2 = m$, $q^2 = a$.

Du point S², le corps reviendra vers l'axe, et le coupera au point où $\psi = 2\pi$; alors on aura $F\zeta = \frac{7}{2}F'c = F\pi + F\epsilon$, et par conséquent $\zeta = \pi + \epsilon$. Donc ce point d'intersection n'est autre que le point A.

507. On pourrait penser d'abord que le corps qui a suivi la route Am^2S^2 pour aller à l'apside supérieure S², revient par une autre route au point A, et qu'il décrit une foliole dont le sommet aboutit au point A; mais cette supposition ne s'accorderait pas avec le principe général (n° 435), que jamais plus de deux branches de courbe ne se rencontrent en un même point A. Il faut donc que la seconde branche de la foliole, si elle existe, ait au point A la même tangente que l'une ou l'autre des branches Am, Am'.

Mais en examinant la chose avec plus d'attention, on reconnaît bientôt que cette foliole n'est qu'un même arc de courbe $S^2m''A$, comme si sa largeur était infiniment petite dans toute son étendue.

Pour s'assurer de l'existence de cette singularité, soit m'' un point de l'orbite avant le point S² où l'on a $\psi = \frac{3}{2}\pi - \sigma$, $\zeta = \frac{3}{2}\pi - \theta$, et m''' un point de l'orbite passé le point S², où l'on a $\psi = \frac{3}{2}\pi + \sigma$, $\zeta = \frac{3}{2}\pi + \theta'$, on aura les deux équations

$$\frac{1}{2}F\left(\frac{1}{2}\pi - \sigma\right) = F\left(\frac{1}{2}\pi - \theta\right),$$
$$\frac{1}{2}F\left(\frac{1}{2}\pi + \sigma\right) = F\left(\frac{1}{2}\pi + \theta'\right);$$

d'où résulte $\theta' = \theta$. Donc les deux points m'', m''' répondent aux mêmes valeurs de p et q, et ainsi ils ne font qu'un seul et même point.

De là on voit que le corps, après être parvenu à l'apside supérieure S^a, doit revenir sur ses pas en décrivant précisément le même arc de courbe de S^a en A, qu'il avait décrit en allant de A à S^a.

508. Ce résultat ne peut avoir lieu à moins que la vitesse au point S^a ne soit nulle. En effet, la vitesse en un point quelconque étant nommée v, on aura, d'après l'équation (1),

$$\tfrac{1}{2}av^2 = \left(\frac{A}{p^2+q^2} + \frac{B}{1+p^2q^2}\right)(1-p^2)(1+q^2) + \tfrac{1}{2}aV^2 - \left(\frac{A}{m^2} + B\right)(1+m^2).$$

Faisant $p^2 = m$, $q^2 = \alpha$, et substituant pour $\frac{1}{2}aV^2$ la valeur trouvée art. 415, dans laquelle on fera $m' = 2m$, on aura au point S^a

$$\tfrac{1}{2}av^2 = \frac{(1-m)^2}{2m^2+1}\left[\frac{A(1-2m\alpha)}{m+\alpha} + \frac{B(\alpha-2m)}{1+\alpha m}\right].$$

Pour que v se réduise à zéro, il faut donc qu'on ait

$$\frac{A}{B} = \frac{2m^2 + m\alpha - \alpha^2}{1 - m\alpha - 2m^2\alpha^2}.$$

Mais puisque $x^2 = \frac{1}{3} = \frac{\alpha'}{\alpha}$, on a $\alpha' = \frac{1}{3}\alpha$ et $\alpha + \alpha'$ ou $\frac{4}{3}\alpha = \frac{m(A+B)}{B-2Am^2}$, de ces deux équations combinées résulte une nouvelle valeur de $\frac{A}{B}$, savoir, $\frac{A}{B} = \frac{6m^2+\alpha^2}{3+2m^2\alpha^2}$; donc $\alpha^2 = \frac{3A-6Bm^2}{B-2Am^2} = \frac{9}{16}m^2 \cdot \frac{(A+B)^2}{(B-2Am^2)^2}$; cette dernière se réduit à $\frac{2m^2}{(1+2m^2)^2} = \frac{32}{35} \cdot \frac{AB}{(A+B)^2}$, et s'accorde par conséquent avec l'équation qui sert à déterminer $mm' = 2m^2$. Il est démontré ainsi, d'une manière générale, que la vitesse au point S^a est nulle.

Cette vérification deviendrait plus facile dans les cas particuliers. Soit, par exemple, $\frac{A}{B} = \frac{8}{7}$, on aura $m = \frac{1}{2}$, $m' = 1$, $\alpha = 1$, ce qui donne immédiatement $v = 0$.

509. On voit dans cet exemple que le corps parti de A décrit d'abord la feuille $AmLm'A$; que, revenu au point A, avec une vitesse égale à la vitesse initiale, mais dirigée de manière que l'angle FAm'' est le supplément de FAm, il se meut dans la branche $Am''S^a$, jusqu'au point S^a, dans lequel cette branche rencontre l'ellipse terminatrice $p^2 = m$. Le corps ayant perdu toute sa vitesse au point S^a, il revient sur ses pas et décrit la même courbe $S^a m''Am'LmA$, qui le ramène de nouveau au point A; et enfin il décrit au-dessous de l'axe la branche AS^b, entièrement semblable à AS^a; il fait ainsi Fig. 27.

des oscillations dont le milieu est au point L, et qui se terminent alternativement aux points S^2 et S^4.

Au reste, une courbe algébrique ne pouvant pas être terminée brusquement en S^2 et S^4, les branches AS^2, AS^4 ont sans doute une continuation qui ne peut plus être représentée par les valeurs $p = \frac{c\sqrt{m'}\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \frac{\sqrt{a}}{\sin\zeta}$, mais qu'il serait facile de construire par d'autres moyens.

510. Pour avoir la durée d'une oscillation, il suffira de doubler le temps que le corps met à parcourir la partie $S^2Am'L$, ou la partie S^4AmL. Nous avons fixé l'origine du mouvement au point A; mais on peut supposer qu'avant d'arriver en A le corps était parti du point S^4; relativement au point A, où l'on a $\psi = 0$ et $\zeta = \epsilon$, le point S^4, qui appartient à une époque antérieure, est représenté par les valeurs $\psi = -\frac{1}{2}\pi$, $\zeta = -\frac{3}{2}\pi$, et le point L l'est par les valeurs $\psi = \frac{1}{2}\pi$, $\zeta = \pi$. Donc si l'on désigne par $t'(\psi)$ et $t''(\zeta)$, les parties du temps qui dépendent des variables ψ et ζ, ces parties étant prises de manière qu'elles s'évanouissent lorsque les variables sont nulles, et qu'on appelle T le temps d'une oscillation, on aura $\frac{1}{2}T = 2t'(\frac{1}{2}\pi) + 5t''(\frac{1}{2}\pi)$, ou, suivant les dénominations déjà usitées, $T = 4T' + 10T''$.

Dans le cas pris pour exemple, où l'on a $\frac{A}{B} = \frac{5}{7}$, $m = \frac{1}{2}$, $m' = 1$, $a = 1$, on trouvera, toutes réductions faites,

$$T = \frac{a\sqrt{2a}}{4\sqrt{(A+B)}}\left(21F'c - 3E'c + \frac{7K'}{b}\right),$$

formule où $K' = \frac{1}{2}\pi + (F'c - E'c)\,F(b, \frac{1}{4}\pi) - F'cE(b, \frac{1}{4}\pi)$.

511. Les courbes algébriques dont nous venons de donner un exemple, résultent de la supposition $x = c$; il serait facile d'obtenir d'autres séries infinies de courbes algébriques, en supposant $x = c^0$, $x = c^{00}$, etc. Mais nous n'entrerons pas dans ces détails, et nous préférons de traiter encore avec toute l'étendue nécessaire, un cas fort remarquable compris dans les formules précédentes.

Soit encore $e = 2$, $i = 1$, on aura $c^2 = \frac{1}{3}$, $b^2 = \frac{2}{3}$, $\frac{mm'}{(1+mm')^2} = \frac{32}{35}\cdot\frac{AB}{(A+B)^2}$, $m = \frac{1}{2}\sqrt{mm'}$, $m' = 2m$, $\frac{a^2+3}{4a} = \frac{1-2m^2}{m}$, $a' = \frac{1}{3}a$; ces quantités seront toutes connues, lorsqu'on donnera le rapport $\frac{A}{B}$.

Supposons, de plus, que la tangente en A est perpendiculaire à l'axe; on aura $\mu = \frac{1}{2}\pi$, et l'équation entre μ et m^0 de l'article 492, combinée avec l'équation précédente entre a et m, donnera $a^2 - 4am^0 + 3m^{02} = 0$;

d'où résultent deux valeurs de m^0, savoir, $m^0 = \alpha$ et $m^0 = \frac{1}{3}\alpha$. Enfin la vitesse initiale se déterminera par l'équation $\frac{\frac{1}{2}aV^2}{A+B} = \frac{(1+m^0)^2}{m^0} \cdot \frac{2m^2}{1+2m^2}$.

Au moyen de ces données, l'équation de la courbe décrite sera $F\psi = 2F\zeta$, et on aura en même temps $p = \frac{c\sqrt{2m}.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \sqrt{\alpha}.\frac{\sqrt{(1-c^2\sin^2\zeta)}}{\cos\zeta}$.

Soit, par exemple, $\frac{B}{A} = \frac{15}{7}$, on trouvera $mm' = \frac{3}{8}$, $m = \frac{1}{4}\sqrt{3}$, $m' = \sqrt{3}$, $\alpha = c$; $\alpha' = \frac{1}{3}c$; et si l'on prend $m^0 = c$, on aura $\frac{\frac{1}{2}aV^2}{A+B} = \frac{6}{11}(1+2c)$.

512. Voyons maintenant, d'après ces équations, quelle est la figure de la courbe. A partir du point A, le corps monte vers l'apside supérieure S^1, où l'on a $\psi = \frac{1}{2}\pi$, $F\zeta = \frac{1}{2}F^1c$, $\sin\zeta = \frac{1}{\sqrt{(1+b)}}$. Ce point est donc déterminé par les valeurs $p^2 = m$, $q^2 = \alpha(1+b)$. Fig. 28.

Pour avoir le premier point d'intersection B^1, il faut faire $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, ce qui donne $\psi = \pi$; donc on a à la fois $p = 0$, $q = \infty$, et par conséquent le point d'intersection B^1 se confond avec le centre G. Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin, puisque la continuation du mouvement au-delà de G ne paraît pas pouvoir être donnée par nos formules, ou du moins est l'objet d'une difficulté particulière.

513. Si l'on veut connaître l'angle que la courbe fait au point G avec l'axe, il faut considérer un point infiniment proche de G. Soit, dans ce point, $\zeta = \frac{1}{2}\pi - \delta$, et $\psi = \pi - \eta$; δ et η étant infiniment petits, on aura $F\zeta = F^1c - \frac{\delta}{b}$, $F\psi = 2F^1c - \eta$. Substituant ces valeurs dans l'équation de la courbe $F\psi = 2F\zeta$, on aura $\eta = \frac{2\delta}{b}$. Donc, au point m, infiniment proche de G, on a $p = c\sqrt{2m}.\eta$, $q = \frac{b\sqrt{\alpha}}{\delta}$, et par conséquent $pq = 2c\sqrt{(2m\alpha)}$. Soit θ l'angle de la tangente en G avec l'axe, θ sera la valeur de ω au point G, et on aura $\tang\frac{1}{2}\theta = pq = 2c\sqrt{(2m\alpha)}$.

Ainsi, dans l'exemple de l'art. 511, $\tang\frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{8}{3}} = b$, et $\tang\theta = \sqrt{24}$, ou $\theta = 78°27'.78$ à peu près.

514. Il y a un cas où l'on aurait $\theta = 90°$, c'est lorsque $m\alpha = \frac{1}{8c^2} = \frac{3}{8}$. Or, on a $\frac{4}{3}\alpha = \frac{m(A+B)}{B-2Am^2}$; ainsi, en faisant $\alpha m = \frac{3}{8}$, on aura l'équation $\frac{1}{2} = \frac{m^2(A+B)}{B-2Am^2}$, d'où résulte $2m^2 = \frac{B}{2A+B}$; substituant cette valeur dans

l'équation $\frac{4m^2}{(1+2m^2)^2} = \frac{20}{33} \cdot \frac{4AB}{(A+B)^2}$, on aura $\frac{B}{A} = \frac{29}{35}$. Tel est donc le rapport qu'il doit y avoir entre les forces A et B, pour que l'angle θ soit de 90°; dans ce cas on aurait $m = \frac{\sqrt{58}}{16}$, $a = \frac{6}{\sqrt{58}} = m^2$.

Par la valeur de m^2 égale au rapport $\frac{FA}{GA}$, on connaît la position du point A, et la vitesse initiale V dirigée perpendiculairement à FG, telles, que le corps, après une seule demi-révolution, tombera perpendiculairement sur l'axe au point G. Dans ce cas, il n'y a pas de raison pour que le corps ne continue son mouvement au-dessous de l'axe, en décrivant une courbe égale et semblable à celle qu'il a décrite au-dessus de l'axe. Il reviendra donc, après une autre demi-révolution, au point de départ A; et la période composée ainsi d'une seule révolution devra se répéter à l'infini. Ce mouvement est extrêmement simple, eu égard à la complication des causes qui le produisent; mais on ne peut douter qu'il n'ait lieu réellement, ce résultat étant fondé sur des calculs qui ne sont sujets à aucune difficulté. D'ailleurs, il est de principe, que si la vitesse avec laquelle le corps arrive au point G lui était restituée tout à coup en sens contraire, ce corps reviendrait sur ses pas en décrivant la même courbe, et retrouverait aux mêmes points les mêmes degrés de vitesse en sens contraire. Or, une pareille circonstance a lieu relativement à la partie de l'orbite qui sera décrite passé le point G, et qui devra être égale à l'autre partie.

515. Il n'en sera pas de même dans tout autre cas, et notamment dans l'exemple où nous avons supposé $\frac{B}{A} = \frac{15}{7}$. On ne voit plus alors comment le mouvement doit se continuer au-dessous de l'axe; car en supposant qu'il se continue ainsi, les quantités p et q ne seraient plus réelles, et les formules cesseraient d'être exactes. L'analyse donne cependant une solution de cette difficulté.

Suivant l'analyse, le corps, parvenu au point G, n'ira point au-delà, mais reviendra sur ses pas en décrivant la même courbe qu'il a déjà décrite. Le corps arrivera donc au point A avec une vitesse égale à la vitesse initiale, et dirigée en sens contraire. En vertu de cette vitesse il continuera son mouvement, en décrivant une courbe entièrement semblable de l'autre côté de l'axe; il reviendra donc encore au point G. Du point G, il retournera sur ses pas; et il décrira ainsi, par un mouvement d'oscillation, une courbe dont le point A sera le milieu, et dont les extrémités coïncideront avec le centre G.

516. Pour faire voir que cette solution est en effet donnée par l'analyse, je reprends l'équation $F\psi = 2F\zeta$; et faisant successivement $\psi = \pi - u$, $\psi = \pi + u$, je dis que les valeurs correspondantes de ζ seront $\zeta = \frac{1}{2}\pi - v$, $\zeta = \frac{1}{2}\pi + v$; de sorte qu'on aura à la fois

$$F(\pi - u) = 2F(\tfrac{1}{2}\pi - v),$$
$$F(\pi + u) = 2F(\tfrac{1}{2}\pi + v).$$

En effet, si l'on ajoute ces deux équations, on aura l'équation identique $2F\pi = 2F\pi$; donc la seconde équation est une suite nécessaire de la première. Soit M le lieu du corps correspondant aux valeurs $\psi = \pi - u$, $\zeta = \frac{1}{2}\pi - v$, on aura, dans ce point, $p = \frac{c\sqrt{2m}.\sin u}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2 u)}}$, $q = \sqrt{a}.\frac{\sqrt{(1 - c^2\cos^2 v)}}{\sin v}$. Ces valeurs ont lieu avant que le corps parvienne au centre G. Si ensuite on change les signes du u et de v, afin d'avoir la position du corps qui répond aux valeurs $\psi = \pi + u$, $\zeta = \frac{1}{2}\pi + v$, on voit que les variables p et q changent de signe l'une et l'autre, mais conservent les mêmes valeurs; d'où il suit que les angles ω et φ, déterminés par les valeurs $\tang \frac{1}{2}\omega = pq$, $\tang \frac{1}{2}\varphi = \frac{p}{q}$, restent les mêmes; donc le corps doit se retrouver encore au point M. Ainsi, le corps, après être parvenu au point G, revient sur ses pas en suivant la même route, comme si sa vitesse avait été changée tout à coup en une vitesse égale et directement opposée.

Nous ne dissimulons pas que cette explication est peu satisfaisante en elle-même, et qu'elle ne peut guère être admise que comme un résultat de pur calcul; cependant on verra bientôt qu'elle peut être justifiée, en altérant infiniment peu la vitesse initiale.

517. Pour avoir une idée de la figure complète de la courbe, dans l'exemple que nous avons choisi art. 511, nous observerons d'abord que l'expression des coordonnées en fonctions de p et q étant

$$GP = x = \frac{a(1 - p^2q^2)}{(1 - p^2)(1 + q^2)},\quad PM = y = \frac{2apq}{(1 - p^2)(1 + q^2)},$$

si on élimine ces deux variables d'après le rapport qui doit exister entre elles, le résultat sera indépendant de la supposition que p et q sont réels, et il servira à déterminer la courbe dans toute son étendue.

Or, l'équation $F\psi = 2F\zeta$ peut être remplacée par l'équation algébrique $\tang \frac{1}{2}\psi = \tang \zeta \sqrt{(1 - c^2\sin^2\zeta)}$; et puisqu'on a en même temps $p = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}c}.\sin\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \sqrt{c}.\frac{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\zeta)}}{\cos\zeta}$, si on élimine ψ et ζ de ces équa-

tions, la relation entre p et q sera donnée par l'équation

$$p^2 = \frac{2q^2(q^2-c)(3q^2-c)}{(3q^4-2cq^2+c^2)^2}.$$

Ayant ainsi exprimé p^2 par le moyen de q^2, la courbe sera facile à construire dans son entier, en employant toutes les valeurs, tant positives que négatives, de p^2 et q^2.

Fig. 28. 518. Les valeurs de q^2 depuis $q^2 = c$ jusqu'à $q^2 = \infty$, donnent la portion de courbe AS^1GS^2A, dans laquelle le corps fait ses oscillations, et qui se termine en G par deux branches faisant entre elles un angle double de $78^\circ\, 27'.78$.

Les valeurs de q^2, depuis $q^2 = 0$ jusqu'à $q^2 = c^3$, donneront naissance à une autre portion de courbe DNKF, terminée en F, dont les principaux points se déterminent comme il suit.

Soit $q^2 = c^3 z$, z étant < 1, on aura

$$p^2 = \frac{6cz(1-z)(3-z)}{(3-2z+z^2)^2}.$$

Au point D, où l'on a $FD = \frac{ac^3}{1+c^3} = \frac{a}{1+3\sqrt{3}}$, la courbe s'élève perpendiculairement à l'axe, et tourne sa concavité du côté de F; elle passe par le point N, où l'on a $p^2 = q^2$, $x = a$, $y = 0.354a$; puis par le point K, où l'ordonnée est tangente à la courbe, et où l'on a $FH = 0.529a$, $HK = 0.657a$; vient enfin au point F, où elle fait avec l'axe un angle dont la tangente $= \sqrt{\frac{24}{25}}$. Pareille branche doit être tracée de l'autre côté de l'axe.

Ces deux feuilles, qui offrent en F et en G des angles, l'un de près de 90°, l'autre d'environ 157°, sont les seules qu'on puisse obtenir en supposant p^2 et q^2 positifs. La nature des courbes algébriques exige que ces feuilles aient une continuation, mais cette continuation ne pourra répondre qu'à des valeurs négatives de p^2 et de q^2.

519. D'abord si l'on change à la fois le signe de z, p^2 et q^2, ce qui donne toujours $q^2 = c^3 z$, et

$$p^2 = \frac{6cz(1+z)(3+z)}{(3+2z+z^2)^2},$$

on aura

$$x = \frac{a(1-p^2q^2)}{(1+p^2)(1-q^2)}, \quad y = \frac{2apq}{(1+p^2)(1-q^2)}.$$

Si ensuite on fait varier z depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \frac{1}{c^3} = 3\sqrt{3}$, on aura

la continuation des deux branches qui se croisent en F sous un angle presque droit.

Soit $z = \frac{1-\delta}{c^3}$, δ étant infiniment petit, et $p^2 = M(1 + N\delta)$, on trouvera

$$M = \frac{120 + 9\sqrt{3}}{242}, \quad N = \frac{40 + 36\sqrt{3}}{143},$$

ou à peu près $M = 0.5603$, $N = 0.7157$. Or, il est aisé de conclure de ces valeurs, que la courbe a deux asymptotes qui se rencontrent en un point X de l'axe, où l'on a $GX = \frac{1}{2}a(1 - N) = a(0.14215)$, et qui font de part et d'autre avec l'axe, un angle X déterminé par la valeur $\tang \frac{1}{2}X = \sqrt{M}$, qui donne $X = 73^\circ\ 38'$.

De même si l'on fait varier z depuis $z = \frac{1}{c^3}$ jusqu'à $z = \infty$, on aura la continuation des branches qui se coupent en G, lesquelles s'étendront à l'infini, et auront dans un sens opposé les mêmes asymptotes que les branches qui se coupent en F.

520. Maintenant, pour connaître plus facilement la vraie courbe que doit décrire le corps d'après les données prises pour exemple dans l'article 511, nous conserverons les mêmes forces A et B, dont le rapport est de 7 à 15, le même point A où commence le mouvement et où l'on a $m^\circ = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{FA}{AG}$; nous supposerons également que la vitesse en A est perpendiculaire à l'axe, mais nous altérerons infiniment peu cette vitesse; et comme dans le cas de $\mu = \frac{1}{2}\pi$, on a $\frac{\frac{1}{2}aV^2}{A+B} = \frac{(1+m^\circ)^2}{m^\circ} \cdot \frac{mm'}{1+mm'}$, et dans l'exemple de l'art. 511, $\frac{mm'}{1+mm'} = \frac{2m^2}{1+2m^2} = \frac{3}{11}$, nous supposerons

$$\frac{mm'}{1+mm'} = \frac{3}{11}(1+\delta);$$

de manière que le carré de la vitesse sera augmenté dans le rapport de 1 à $1+\delta$, δ étant considéré comme infiniment petit.

Cela posé, les valeurs des élémens m, m', c, $\varkappa$, k, α, α' deviendront infiniment peu différentes de celles qui ont lieu dans l'exemple cité; et voici comment on trouvera ces nouvelles valeurs.

L'équation précédente donne d'abord $mm' = \frac{3+3\delta}{8-3\delta}$. Ensuite si, dans l'expression de $m - m'$, art. 415, on substitue la valeur..... $\frac{1}{2}aV^2 = \frac{(1+m^\circ)^2}{m^\circ}(A+B) \cdot \frac{3}{11}(1+\delta)$, et qu'on fasse en même temps les

substitutions $m^0 = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $\frac{A}{B} = \frac{7}{15}$, on aura

$$m' - m = \frac{(1-2\delta)2\sqrt{3}}{8-3\delta}.$$

De là résulte

$$m' = \left(\frac{1-2\delta+\sqrt{(9+\delta+\delta^2)}}{8-3\delta}\right)\sqrt{3},$$

$$m = \left(\frac{-1+2\delta+\sqrt{(9+\delta+\delta^2)}}{8-3\delta}\right)\sqrt{3},$$

$$c^2 = \frac{m}{m+m'} = \frac{\sqrt{(9+\delta+\delta^2)}-1+2\delta}{2\sqrt{(9+\delta+\delta^2)}}.$$

Substituant les valeurs de mm' et de $m'-m$ dans les formules générales du cas V qui servent à déterminer α et α', on en déduira

$$\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = m^0, \text{ et } \alpha' = \frac{1-6\delta}{3-2\delta}\sqrt{\tfrac{1}{3}};$$

donc

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{1-6\delta}{3-2\delta},$$

et enfin

$$k^2 = \frac{1-2c^2}{1+\varkappa^2} = \frac{3-2\delta}{4\sqrt{(9+\delta+\delta^2)}}.$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation de la courbe décrite sera $k\mathrm{F}(c, \psi) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta)$, et on aura en même temps $p = \frac{c\sqrt{m'}\,.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \sqrt{\alpha}\,.\frac{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}{\cos\zeta}$.

521. Pour faire une application numérique de ces formules, soit d'abord $\delta = 0.001$, en sorte que le quarré de la vitesse initiale soit plus grand d'un millième que celui qui fait passer la courbe par le centre G, on aura les valeurs approchées des constantes comme il suit :

$\log c = 9.761662$	$c = \sin 35^\circ\ 17', 11$	$\log \mathrm{F}'c = 0.239081$
$\log \varkappa = 9.760277$	$\varkappa = \sin 35.\ 9, 37$	$\log \mathrm{F}'\varkappa = 0.238754$
$\log k = 9.698813$		$\log m' = 9.937495$
		$\log m = 9.637134$

Pour avoir le premier point d'intersection de la courbe avec l'axe, il faut faire $q = \infty$, ou $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, et déterminer ψ par l'équation $k\mathrm{F}'(c, \psi) = \mathrm{F}'\varkappa$. Or, comme $k - \frac{1}{2}$ est très petit, ainsi que $c - \varkappa$, on voit que ψ diffère très peu de π; c'est pourquoi, faisant $\psi = \pi - \psi'$, on aura $\mathrm{F}\psi' = 2\mathrm{F}'c - \frac{1}{k}\mathrm{F}'\varkappa = 0.00136$. Cette quantité étant très petite, on aura, avec une exac-

titude suffisante, $\psi' = 0.00136$, et $p^2 = c^2 m'$. $\psi'^2 = 0.000000534 = \frac{GB^1}{FB^1}$. On voit, par conséquent, que le point d'intersection B^1 est à une distance de G qu'on peut regarder comme très petite de l'ordre δ^2.

522. Pour avoir le second point d'intersection I^1, il faudra faire $p = 0$, ou $\psi = \pi$, et on aura, pour déterminer ζ, l'équation $2kF^1c = F(x, \zeta)$; et comme $2kF^1c$ est très peu différent de F^1x, on pourra faire $\zeta = \frac{1}{2}\pi + \zeta'$, ζ' étant une quantité très petite, ce qui donnera $F(x, \zeta) = F^1x + \frac{\zeta'}{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E}$ étant $\sqrt{(1 - x^2)}$. Donc $\zeta' = \mathcal{E}(2kF^1c - F^1x) = \mathcal{E}k(0.00136) = 0.000556$; de là $\frac{1}{q^2} = \frac{\zeta'^2}{a\mathcal{E}^2} = 0.000000800 = \frac{GI^1}{FI^1}$. Le point I^1, situé de l'autre côté de G, est donc encore extrêmement près du centre G.

On remarquera que dans la demi-révolution que fait le corps en passant du point B^1 au point I^1, l'espace parcouru est très petit de l'ordre δ^2. Ce passage a pour effet, de changer, dans un temps excessivement petit, la direction de la vitesse, et de la rendre presque diamétralement opposée.

523. On peut aisément prévoir qu'à partir de I^1, le corps se trouvera, après une demi-révolution, très près du point de départ A. En effet, pour trouver le troisième point d'intersection I^2, soit $\psi = 2\pi$; il faudra déterminer ζ par l'équation $F(x, \zeta) = 4kF^1c$. Il en résulte à très peu près $\zeta = \pi + 2\zeta'$, ζ' étant la même quantité qu'on a déjà trouvée dans le cas de $\psi = \pi$. Cette valeur donne $q^2 - a = a\mathcal{E}^2 . 4\zeta'^2$; ainsi le point I^2 sera à une distance du point A, très petite de l'ordre δ^2; il sera d'ailleurs situé entre A et G.

On voit que le corps, après trois demi-révolutions, revient très près du point de départ A. Alors sa vitesse est très peu différente de la vitesse initiale en grandeur; mais sa direction est à très peu près diamétralement opposée.

524. Après le point I^2, où l'on a $\psi = 2\pi$, le corps, passant de l'autre côté de l'axe, parvient au quatrième point d'intersection B^2, où l'on a $\zeta = \frac{3}{2}\pi$, et $\psi = 3\pi - \psi''$, ψ'' étant une quantité très petite de l'ordre δ; de sorte que la distance GB^2, proportionnelle à ψ''^2, est encore une quantité très petite de l'ordre δ^2.

Du point B^2 le corps passe, par un circuit très petit, à l'intersection suivante I^3, où l'on a $\psi = 3\pi$ et ζ très peu différent de $\frac{3}{2}\pi$. De là le corps passe à un sixième point d'intersection I^3 très voisin de A, et les choses continuent de la même manière pendant un assez grand nombre de révo-

lutions. Cependant l'orbite finit par s'éloigner sensiblement, tant du point de départ A, que du centre G; mais elle y revient après des périodes presque égales, et les mêmes phénomènes se renouvellent.

525. Au reste, il est facile, par nos formules, de déterminer la situation du corps après un nombre quelconque de révolutions. Veut-on, par exemple, déterminer la 501ème des intersections B^1, B^2, etc.? il faudra faire $\zeta = 1001 . \frac{\pi}{2}$, et chercher la valeur correspondante de ψ. On trouvera d'une manière approchée, $\psi = 1001\,\pi - 73^\circ\,24'$; et de là, $p^2 = 0.3826 = \frac{GB}{FG}$, ou $GB = a(0.620)$. On connaît donc le point B, où se trouve le corps après 501 intersections à droite, et 1000 intersections à gauche de G, c'est-à-dire après 1501 demi-révolutions.

526. Ayant calculé l'orbite dans le cas de $\delta = 0.001$, il importe aussi de la calculer en supposant $\delta = -0.001$. Alors, en faisant la substitution dans les formules de l'art. 520, on aura les résultats suivans :

$$\log c = 9.761216, \quad \log F^1 c = 0.238975, \quad \log 2F^1 c = 0.540005,$$
$$\log \varkappa = 9.762593, \quad \log F^1 \varkappa = 0.239303, \quad \log \tfrac{1}{k} F^1 \varkappa = 0.540176,$$
$$\log k = 9.699127.$$

Puisque $2F^1 c$ est $< \frac{1}{k} F^1 \varkappa$, il s'ensuit que lorsque $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, on a $\psi > \pi$. Donc la première intersection a lieu en un point I^2 situé à gauche de G; c'est d'ailleurs ce qui s'accorde avec la supposition faite sur la vitesse initiale. En faisant $\delta = 0$, la première intersection tombe précisément au centre G; en faisant $\delta = 0.001$, ce qui augmente d'un millième le carré de la vitesse, nous avons vu que la première intersection avait lieu en un point B^1 à droite de G; maintenant que nous faisons $\delta = -0.001$, ce qui diminue d'un millième le carré de la vitesse, il est tout simple que la première intersection de l'orbite se fasse en un point I^1 situé à gauche de G.

Pour déterminer le point I^1, il faut faire $\psi = \pi$, et chercher ζ par l'équation $F(\varkappa, \zeta) = 2kF^1 c$; soit $\zeta = \frac{1}{2}\pi - \zeta'$, on pourra supposer $F(\varkappa, \zeta) = F^1 \varkappa - \frac{\zeta'}{\mathfrak{C}}$, ce qui donnera $\zeta' = \mathfrak{C}(F^1 \varkappa - 2kF^1 c) = 0.0005579$. De la $\frac{1}{q^2} = \frac{\zeta'^2}{a\mathfrak{C}^2} = 0.0000000811 = \frac{GI^1}{FI^1}$. Ainsi la distance GI^1 est très petite de l'ordre δ^2.

Pour avoir l'intersection suivante B^1, il faudra faire $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, $\psi = \pi + \psi'$,

ce qui donnera $\psi' = \frac{1}{k} F'\varkappa - 2F'c = 0.001368$, ensuite $p^2 = c^2 m' \psi'^2 = 0.000000540 = \frac{GB'}{FB'}$. Ainsi la distance GB' est encore très petite de l'ordre δ^2.

527. Ces résultats, trouvés dans les hypothèses $\delta = 0.001$, $\delta = -0.001$, servent à expliquer ce qui se passe lorsque $\delta = 0$. On voit que δ étant très petit, positif ou négatif, mais non pas nul, le corps parti de A s'approche à une distance extrêmement petite du centre G, et décrit au-dessous de l'axe une sorte de demi-ellipse très petite, au moyen de laquelle la vitesse change subitement de direction, et en prend une presque diamétralement opposée. Il revient donc sur ses pas par une route très peu différente de celle qu'il a suivie, et arrive, après une troisième demi-révolution, en un point de l'axe très voisin du point A. La vitesse en ce point étant très peu différente de la vitesse initiale, mais dirigée dans un sens à très peu près opposé, le corps vient de nouveau rencontrer l'axe en un point très voisin de G; là il décrit encore autour de G une sorte de demi-ellipse très petite qui change tout à coup sa direction et le reporte de nouveau vers un point de l'axe fort voisin du point de départ A. Les parties de courbe décrites autour du centre G, d'abord excessivement petites, s'agrandissent de plus en plus, et, au bout d'un certain temps, les demi-révolutions successives deviennent de moins en moins inégales en étendue comme en durée. Dans ce mouvement, le corps ne peut revenir au point de départ, à moins que la quantité $\frac{kF'c}{F'\varkappa}$ n'ait une valeur rationnelle; mais l'orbite est toujours limitée par le périmètre de l'ellipse $p^2 = m$, et elle touche ce périmètre dans une infinité de points qui sont ses apsides supérieures, et qu'on peut aisément déterminer.

Au reste, l'anomalie qui a lieu au commencement du mouvement, c'est-à-dire l'extrême inégalité de deux demi-révolutions successives, se renouvelle à des époques déterminées, dont les intervalles sont à peu près égaux ou tout-à-fait égaux, si la quantité $\frac{kF'c}{F'\varkappa}$ est rationnelle. Car si l'on fait à la fois $\psi = I\pi + \psi'$, $\zeta = L\pi + \zeta'$, l'équation $kF(c, \psi) = F(\varkappa, \zeta)$ deviendra $kF(c, \psi') = F(\varkappa, \zeta')$, pourvu qu'on ait $kIF'c = LF'\varkappa$; or, on peut prendre les entiers I et L assez grands pour que cette équation ait lieu, ou exactement, ou aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{L}$, lesquelles peuvent être supposées plus petites que le rapport $\frac{GM}{FM}$, M étant le point d'intersection le plus voisin de G.

Fig. 28. 528. On voit maintenant comment le calcul explique la possibilité que le corps parcoure l'orbite anguleuse AS^1G, dans l'exemple de l'art. 511, et dans les cas semblables où le corps, parti de A, doit parvenir au centre G. Il faut supposer que la vitesse initiale est infiniment peu différente de celle qui est nécessaire pour que le corps parvienne exactement au centre G; qu'en vertu de cette différence, le corps ne parvient pas précisément au centre G, mais qu'il en approche jusqu'à une distance infiniment petite du second ordre; que dans cette proximité, où le corps a une vitesse presque infinie, il décrit au-dessous de l'axe une sorte de demi-ellipse infiniment petite, au moyen de laquelle son mouvement acquiert dans un instant une direction opposée. Il revient donc sur ses pas, arrive à un point de l'axe infiniment près de A, continue sa route au-dessous de l'axe, s'approche de nouveau infiniment près de G; que là il éprouve de même, par sa circulation dans une demi-ellipse infiniment petite, un changement de direction, puis il revient à un point de l'axe infiniment près de A, et ainsi à l'infini. De là on voit que le mouvement du corps dans l'orbite anguleuse AS^1GS^2A est un mouvement d'oscillation par lequel il s'approche du centre G et s'en éloigne ensuite, en revenant sur ses pas, comme s'il y avait en G un obstacle inébranlable qui ne permît pas au corps de passer outre, et qui le fît rejaillir en sens contraire avec la même vitesse.

529. Avant de terminer l'examen du cas V, nous remarquerons que les formules pour le cas de $\mu = \frac{1}{2}\pi$ souffrent une exception lorsque $\alpha' = \alpha$; car alors on a $x = 1$, et la valeur de q devient $q = \sqrt{\alpha}$. Cette valeur étant constante, la courbe décrite est une hyperbole, et l'équation ordinaire $kF(c, \psi) = F(x, \zeta)$ n'a plus lieu. Cependant, comme la valeur de p ne peut surpasser $\sqrt{m}$, il est nécessaire que la partie de l'hyperbole décrite par le corps ne s'étende pas au-delà de l'ellipse $p^2 = m$. On doit donc présumer que, dans ce cas, la vitesse du corps devient nulle lorsqu'il est arrivé à son apside supérieure S^1 située sur l'ellipse terminatrice; alors il reviendra sur ses pas en décrivant toujours le même arc d'hyperbole, terminé de part et d'autre de l'axe par l'ellipse $p^2 = m$; et son mouvement sera un mouvement d'oscillation comme nous en avons déjà trouvé des exemples. C'est ce qu'il est facile de vérifier par nos formules.

530. En faisant $\alpha' = \alpha$, on a les deux équations $2\alpha = \frac{(m'-m)(A+B)}{B-Amm'}$, $\alpha^2 = \frac{A-Bmm'}{B-Amm'}$, d'où résulte la condition $\frac{m+m'}{1+mm'} = \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}$. Supposant α donné ainsi que A et B, on tirera de ces équations, $mm' = \frac{A-B\alpha^2}{B-A\alpha^2}$, ...

$$m'-m=\frac{2\alpha(B-A)}{B-A\alpha^2},\ m'+m=\frac{(1-\alpha^2).2\sqrt{AB}}{B-A\alpha^2},\ \text{d'où}$$

$$m=\frac{\sqrt{A}-\alpha\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\alpha\sqrt{A}},\ m'=\frac{\sqrt{A}+\alpha\sqrt{B}}{\sqrt{B}+\alpha\sqrt{A}}.$$

On a, au commencement du mouvement, $p=0$, $q^2=m^0=\alpha$; ainsi, l'équation qui donne la vitesse v en un point quelconque, sera

$$\tfrac{1}{2}av^2=\tfrac{1}{2}aV^2+\left(\frac{A}{p^2+\alpha}+\frac{B}{1+\alpha p^2}\right)(1-p^2)(1+\alpha)-\left(\frac{A}{\alpha}+B\right)(1+\alpha).$$

D'ailleurs on a $\frac{1}{2}aV^2=(A+B).\frac{mm'}{1+mm'}.\frac{(1+m^0)^2}{m^2}=\left(\frac{A}{\alpha}-B\alpha\right)\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$; donc

$$\tfrac{1}{2}av^2=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\left(A.\frac{1+\alpha p^2}{p^2+\alpha}-B.\frac{\alpha+p^2}{1+\alpha p^2}\right).$$

Maintenant, on voit que v sera nulle lorsqu'on aura $\frac{1+\alpha p^2}{p^2+\alpha}=\sqrt{\frac{B}{A}}$, ou $p^2=\frac{\sqrt{A}-\alpha\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\alpha\sqrt{A}}$; cette valeur étant la même que celle de m, il s'ensuit que la vitesse est nulle en effet au point S^1, et qu'ainsi le corps décrit librement l'arc d'hyperbole S^2AS^1 par un mouvement analogue à celui du pendule. Fig. 29.

531. Si l'on veut avoir le temps de l'oscillation, il faudra observer que puisque q est constant, la partie t'' due à la variable ζ sera nulle. Il ne restera donc à trouver que la partie t' due à la variable ψ; et comme au point A on a $\psi=0$, et au point S^1, $\psi=\frac{1}{2}\pi$, il est visible que le temps d'une oscillation sera $2t'(\frac{1}{2}\pi)$, ou $2T'$, T' étant déterminé par la formule du n° 488.

On voit immédiatement quelles sont les conditions pour que ce cas particulier ait lieu, c'est-à-dire pour que le corps décrive, par un mouvement d'oscillation, l'arc de l'hyperbole $q^2=\alpha$, terminé par l'ellipse $p^2=m$. Il faut, pour cela, que le point A, origine du mouvement, soit un sommet de l'hyperbole où l'on a $\frac{FA}{AG}=\alpha$, que la vitesse en A soit perpendiculaire à l'axe, et que cette vitesse satisfasse à l'équation $\frac{1}{2}aV^2=\left(\frac{A}{\alpha}-B\alpha\right).\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$.

Développement du cas VI.

532. Dans ce cas, la valeur de q a deux différentes formes, selon que l'angle μ, qui donne la direction de la vitesse initiale, est plus grand ou plus petit que $\frac{1}{2}\pi$. Mais ces valeurs s'accordent, en ce qu'elles ont également pour *minimum* $\sqrt{\alpha}$; de sorte qu'en prenant un point I situé entre F

et G, tel, qu'on ait $\frac{IF}{IG}=\alpha$, aucune intersection de la courbe avec l'axe ne peut avoir lieu à gauche du point I.

Le cas VI ayant beaucoup d'analogie avec le cas V, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, nous ne croyons pas devoir entrer dans de nouvelles explications sur la manière de déterminer les points d'intersection de la courbe avec l'axe, ainsi que ses apsides tant supérieures qu'inférieures; nous ferons voir seulement comment on trouve l'expression générale du temps.

533. La première partie t', qui est fonction de ψ, est toujours la même que dans le cas IV; quant à la seconde partie t'', qui est fonction de ζ, on la trouvera par la formule $\frac{dt''}{a\sqrt{2a}}=\frac{q^2}{(1+q^2)^2}\cdot\frac{dq}{\sqrt{Q}}$, dans laquelle il faut substituer les valeurs $q=\frac{\sqrt{\alpha}}{\cos\zeta}$, $\frac{dq}{\sqrt{Q}}=\frac{\varkappa}{\sqrt{(M\alpha'-A\alpha')}}\times\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}$. Soit donc

$$D''=a\sqrt{\left(\frac{2a\varkappa^2}{\alpha'}\cdot\frac{1+mm'}{B-Amm'}\right)}=\frac{a}{k}\sqrt{\left(\frac{2a}{A+B}\cdot\frac{1+mm'}{m+m'}\right)},\ \nu=-\frac{1}{\alpha+1},$$

on aura

$$t''=\frac{D\alpha''}{(\alpha+1)^2}.Z,\ Z=\int\frac{d\zeta\cos^2\zeta}{(1+\nu\sin^2\zeta)^2\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}.$$

J'observe sur cette formule, que le paramètre ν se rapporte toujours à la forme $\nu=-1+\mathfrak{C}^2\sin^2\eta$; car de là résulte $\sin^2\eta=\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha+1}$, $\cos^2\eta=\frac{1-\alpha'}{\alpha+1}$. Or, par les valeurs de $\alpha-\alpha'$ et $\alpha\alpha'$, on a $(1+\alpha)(1-\alpha')=(1-m)(1+m').\frac{A+B}{B-Amm'}$; donc $\alpha''<1$, donc l'angle η est toujours réel.

Or, par les réductions ordinaires, on trouve

$$Z=\frac{\nu}{\nu+\varkappa^2}\cdot\frac{\Delta\sin\zeta\cos\zeta}{1+\nu\sin^2\zeta}-F(\varkappa,\zeta)+\frac{\nu}{\nu+\varkappa^2}E(\varkappa,\zeta)+\frac{\varkappa^2(1+\nu)}{\nu+\varkappa^2}.\Pi(\nu,\varkappa,\zeta);$$

et en appellant Z^1 la valeur de Z, lorsque $\zeta=\frac{1}{2}\pi$, on aura

$$Z^1=\frac{\nu}{\nu+\varkappa^2}E^1\varkappa-F^1\varkappa+\frac{\varkappa^2(1+\nu)}{\nu+\varkappa^2}\Pi^1(\nu,\eta).$$

D'un autre côté, si l'on fait $K'=\frac{1}{2}\pi+(F^1\varkappa-E^1\varkappa)F(\mathfrak{C},\eta)-F^1\varkappa E.(\mathfrak{C},\eta)$, on aura

$$\Pi^1(\nu,\varkappa)=\frac{\Delta(\mathfrak{C},\eta)}{\mathfrak{C}^2\sin\eta\cos\eta}K'+F^1\varkappa;$$

donc

$$Z^1=\frac{1-\mathfrak{C}^2\sin^2\eta}{\mathfrak{C}^2\cos^2\eta}(E^1\varkappa-\mathfrak{C}^2F^1\varkappa)-\frac{\varkappa^2\tang\eta.\Delta(\mathfrak{C},\eta)}{\mathfrak{C}^2\cos^2\eta}K'.$$

Ces valeurs étant connues, on aura, en général, $t'' = \frac{D''\alpha}{(\alpha+1)^2} Z$, et $T'' = \frac{D''\alpha}{(\alpha+1)^2} Z^1$, T'' étant la valeur de t'' qui répond à $\zeta = \frac{1}{2}\pi$.

534. La valeur de t'', qu'on vient de trouver, suppose $\mu > \frac{1}{2}\pi$. Si l'on a $\mu < \frac{1}{2}\pi$, il faudra se servir des secondes formules du cas VI; alors, dans la formule $\frac{dt''}{a\sqrt{2a}} = \frac{q^2}{(1+q^2)^2} \cdot \frac{dq}{\sqrt{Q}}$, il faudra substituer les valeurs $q^2 = \frac{\alpha'(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}{\varkappa^2\sin^2\zeta}$, $\frac{dq}{\sqrt{Q}} = \frac{\varkappa}{\sqrt{(M\alpha'-A\alpha')}} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}$, ce qui donnera en faisant $D'' = \frac{a}{k}\sqrt{\left(\frac{2a}{A+B} \cdot \frac{1+mm'}{m+m'}\right)}$, $\sin^2\eta = \frac{\alpha+\alpha'}{\alpha+1}$, et $\nu = \cot^2\eta$,

$$t'' = \frac{D''}{\alpha+\alpha'} \int \frac{d\zeta \sin^2\zeta \sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}{(1+\nu\sin^2\zeta)^2}.$$

Or, l'intégrale comprise dans cette expression étant semblable à celle du n° 488, on aura, d'après la même formule,

$$t'' = \frac{\frac{1}{2}D''}{\alpha+1}\left[-\frac{\Delta\sin\zeta\cos\zeta}{1+\nu\sin^2\zeta} + \frac{\varkappa^2+\nu}{\nu^2}F(\varkappa,\zeta) - \frac{1}{\nu}E(\varkappa,\zeta) + \left(1-\frac{\varkappa^2}{\nu^2}\right)\Pi(\nu,\varkappa,\zeta)\right],$$

et en faisant $\zeta = \frac{1}{2}\pi$,

$$T'' = \frac{\frac{1}{2}D''}{\alpha+1}\left[\frac{\varkappa^2+\nu}{\nu^2}F^1\varkappa - \frac{1}{\nu}E^1\varkappa + \left(1-\frac{\varkappa^2}{\nu^2}\right)\Pi^1(\nu,\varkappa)\right].$$

Mais puisque $\nu = \cot^2\eta$, on a, en faisant $K' = \frac{1}{2}\pi + (F^1\varkappa - E^1\varkappa)F(\mathcal{E},\eta) - F^1\varkappa E(\mathcal{E},\eta)$, $\Pi^1(\nu,\varkappa) = \sin^2\eta F^1\varkappa + \frac{\sin\eta\cos\eta}{\Delta(\mathcal{E},\eta)}K'$; donc

$$T'' = \frac{\frac{1}{2}D''\tang^2\eta}{\alpha+1}\left(\frac{1-\mathcal{E}^2\sin^4\eta}{\sin^2\eta}F^1\varkappa - E^1\varkappa + \frac{\cos^4\eta - \varkappa^2\sin^4\eta}{\sin\eta\cos\eta\,\Delta(\mathcal{E},\eta)}K'\right).$$

Du cas particulier où l'on a $m' = m$.

535. Dans ce cas on a $c^2 = \varkappa^2 = \frac{1}{2}$, mais alors la valeur de k reste indéterminée; pour obvier à cet inconvénient, soit $m' = m(1+\omega)$, ω étant infiniment petit, on aura $c^2 = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}\omega)$, $\alpha - \alpha' = \frac{m\omega(A+B)}{B-Am^2}$, $1-2c^2 = \frac{1}{2}\omega$, $1-2\varkappa^2 = \frac{\alpha-\alpha'}{\alpha+\alpha'} = \frac{m\omega(A+B)}{2\alpha(B-Am^2)}$; donc $k^2 = \frac{\alpha}{m} \cdot \frac{B-Am^2}{A+B}$. Et comme on a en même temps $\alpha^2 = \frac{Bm^2-A}{B-Am^2}$, il en résulte

$$k^2 = \frac{\alpha}{m} \cdot \frac{1-m^2}{1-\alpha^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{AB}{(A+B)^2} \cdot \frac{(1+m^2)^2}{m^2}\right)};$$

d'ailleurs les conditions propres au cas VI exigent qu'on ait à la fois $m^2 < \frac{B}{A}$, $m^2 > \frac{A}{B}$.

Cela posé, l'équation de la courbe sera $kF\psi = F\zeta - F\epsilon$, le module commun à ces fonctions étant $c = \sqrt{\frac{1}{2}}$. On aura en même temps..... $p = \frac{c\sqrt{m}\,.\sin\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \frac{\sqrt{\alpha}}{\cos\zeta}$, $\cos\epsilon = \sqrt{\frac{\alpha}{m^0}}$. Toutes ces valeurs sont relatives aux formules du cas VI, qui supposent dans l'état initial du mouvement $\mu > \frac{1}{2}\pi$, ou $\mu = \frac{1}{2}\pi$; dans ce dernier cas on aurait, de plus, $\alpha = m^0$ et $\epsilon = 0$.

536. Si l'on veut que la courbe décrite soit une courbe algébrique, il faudra faire $k = \frac{i}{e}$, $\frac{i}{e}$ étant une fraction rationnelle plus petite que l'unité. Cette fraction étant prise à volonté, ainsi que le rapport $\frac{B}{A}$ moindre aussi que l'unité, on aura, pour déterminer m, l'équation

$$\frac{m^2}{(1 + m^2)^2} = \frac{AB}{(A + B)^2} \cdot \frac{i^4}{e^4 - i^4};$$

ensuite on aura $\alpha = \sqrt{\left(\frac{Bm^2 - A}{B - Am^2}\right)}$. Quant aux données m^0 et μ relatives à l'état initial, on voit, comme dans l'article 419, qu'il doit exister entre elles la relation

$$\cos^2\mu = \frac{m^{0^2}(B - Am^2) - (Bm^2 - A)}{2m^2m^0(A + B) + (1 + m^2)(A + Bm^{0^2})}.$$

Le numérateur de cette expression est la même chose que $(m^{0^2} - \alpha^2)(B - Am^2)$, ainsi on devra avoir $m^0 > \alpha$; ce qui s'accorde avec la valeur $\cos\epsilon = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{m^0}\right)}$, qui a lieu en général sans supposer $m' = m$. Il faut en outre que la vitesse initiale V soit telle, qu'on ait $\frac{1}{2}aV^2 = (A + B).\frac{m^2}{1 + m^2}.\frac{(1 + m^0)^2}{m^0\sin^2\mu}$.

Ces conditions ayant lieu, l'équation de la courbe décrite sera $iF\psi = e(F\zeta - F\epsilon)$; on aura en même temps $p = \frac{c\sqrt{m}.\sin\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \frac{\sqrt{\alpha}}{\cos\zeta}$.

Ces formules supposent l'angle $\mu > \frac{1}{2}\pi$; elles s'appliqueront de même au cas de $\mu = \frac{1}{2}\pi$, en faisant $\epsilon = 0$.

Si l'on a $\mu < \frac{1}{2}\pi$, le seul changement à faire dans les formules, sera de prendre $\cos\epsilon = \sqrt{\left(\frac{m^0 - \alpha}{m^0 + \alpha}\right)}$, et $q = \frac{\sqrt{\alpha}}{c}.\frac{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\zeta)}}{\sin\zeta}$.

537. Dans tous les cas, le corps reviendra au point de départ lorsqu'on aura $\zeta = i\pi + \epsilon$ et $\psi = e\pi$; alors le nombre des points d'intersection I

situés entre F et G, sera e; celui des points d'intersection B situés au-delà de G, sera i; le corps reviendra donc au point de départ A après un nombre $i+e$ de demi-révolutions; ainsi la période qui doit se répéter sans cesse comprendra $\frac{1}{2}(i+e)$ ou $i+e$ révolutions, selon que $i+e$ est pair ou impair.

Ce résultat souffrira néanmoins une exception si la courbe passe par le centre G, ce qui peut avoir lieu dans deux cas :

1°. Si l'on a $\mu > \frac{1}{2}\pi$, ou $q = \frac{\sqrt{a}}{\cos\zeta}$, il faudra qu'on ait à la fois $\psi = \mathrm{I}\pi$, $\zeta = (2\mathrm{L}+1)\frac{\pi}{2}$, I et L étant des entiers; et de là résulte la condition $2\mathrm{L}i\mathrm{F}'c = (2\mathrm{L}+1)e\mathrm{F}'c - e\mathrm{F}'\epsilon$, ou

$$i\mathrm{I} - \mathrm{L}e = \frac{e}{2}\left(1 - \frac{\mathrm{F}'\epsilon}{\mathrm{F}'c}\right).$$

Donc il faut que $\frac{\mathrm{F}'\epsilon}{\mathrm{F}'c}$ soit une fraction rationnelle $\frac{n}{n'}$ telle que $\left(1 - \frac{n}{n'}\right) \cdot \frac{2}{e}$ soit un entier. Dans le cas de $\mu = \frac{1}{2}\pi$, on a $\epsilon = 0$, et il suffira que e soit un nombre pair.

2°. Si l'on a $\mu < \frac{1}{2}\pi$, et par conséquent $q = \frac{\sqrt{a}}{c} \cdot \frac{\sqrt{(1-c^2\sin^2\zeta)}}{\sin\zeta}$, il faudra qu'on ait à la fois $\psi = \mathrm{I}\pi$, $\zeta = \mathrm{L}\pi$, ce qui donnera la condition

$$e\mathrm{L} - i\mathrm{I} = \frac{e}{2} \cdot \frac{\mathrm{F}'\epsilon}{\mathrm{F}'c};$$

ainsi il faut que $\frac{\mathrm{F}'\epsilon}{\mathrm{F}'c}$ soit une quantité rationnelle, et que son produit par $\frac{1}{2}e$ soit un nombre entier.

538. Si l'on fait par exemple, $i = 1$, $e = 2$, $\epsilon = 0$ ou $\mu = \frac{1}{2}\pi$, l'équation de la courbe sera $\mathrm{F}\psi = 2\mathrm{F}\zeta$, et il en résulte que le corps parti de A suivant une direction perpendiculaire à l'axe, tombe au centre G après une demi-révolution ; ce cas est donc analogue à celui que nous avons traité fort au long, art. 515 et suivans, et il est susceptible d'une semblable solution.

Un cas plus simple, ou moins sujet à difficulté, s'obtiendra en faisant $i = 1$, $e = 3$, $\epsilon = 0$; alors l'équation de la courbe sera $\mathrm{F}\psi = 3\mathrm{F}\zeta$, et on trouvera que la courbe rentre sur elle-même après deux révolutions, comme l'indique le nombre $\frac{1}{2}(i+e) = 2$.

539. Les courbes algébriques que nous venons d'obtenir, jointes à celles que nous avons déjà trouvées dans le développement du cas III, art. 489 et suivans, sont les seules que donne l'hypothèse $\mathrm{C} + \mathrm{C}' = 0$ de l'art. 402 ;

ce sont aussi les seules qu'Euler ait indiquées dans les Mémoires de Berlin, année 1760. Elles sont toutes représentées par l'équation $iF\psi = e(F\zeta - F\epsilon)$, dans laquelle le module des fonctions est $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou sin 45°. Mais on a déjà fait voir qu'il y a une infinité d'autres systèmes de courbes algébriques qui peuvent également satisfaire à la question; c'est ce dont on va donner de nouveaux exemples.

Des courbes algébriques qui satisfont au cas VI.

540. On ne peut faire $c = \varkappa$, parce qu'il en résulterait, ou $c^2 = \varkappa^2 = \frac{1}{2}$, ou $AB = 0$, cas qu'il est maintenant inutile d'examiner. Soit donc $\varkappa = c^0$, et $k\left(\frac{1+c}{c}\right) = \frac{i}{e}$; on aura

$$\varkappa = c^0 = \frac{3e^2 - 2\sqrt{(2e^4 - e^2i^2 + 8i^4)}}{e^2 + 8i^2},$$

et l'équation de la courbe sera $iF\psi^0 = e(F\zeta - F\epsilon)$, $\varkappa$ étant le module commun; on aura en même temps $\sin(2\psi - \psi^0) = c^0 \sin\psi^0$, $p = \frac{c\sqrt{m'}\sin\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \frac{\sqrt{\alpha}}{\cos\zeta}$; cette dernière valeur suppose $\mu > \frac{1}{2}\pi$.

Si l'on prend la fraction rationnelle $\frac{i}{e}$ à volonté $< \frac{1}{2}$, on aura une valeur convenable de $\varkappa = c^0$, ensuite on aura $c = \frac{2\sqrt{c^0}}{1 + c^0}$. Connaissant ces modules ainsi que le rapport $\frac{B}{A}$, on déterminera mm' par l'équation

$$\frac{mm'}{(1 + mm')^2} = \frac{AB}{(A + B)^2} \cdot \frac{b^2c^2\varkappa^2\mathcal{C}^2}{b^2c^2 - \varkappa^2\mathcal{C}^2};$$

où l'on a $\mathcal{C}^2 = 1 - \varkappa^2$, $b^2 = 1 - c^2$. Connaissant mm', on aura, à l'ordinaire, $m = \frac{b}{c}\sqrt{mm'}$ et $m' = \frac{b}{c}\sqrt{mm'}$.

Les valeurs de α et α' sont connues par celles de m et m', puisqu'on a $\alpha - \alpha' = \alpha\left(\frac{1 - 2\varkappa^2}{1 - \varkappa^2}\right) = \frac{(m' - m)(A + B)}{B - Amm'}$. Enfin, ayant supposé $\mu > \frac{1}{2}\pi$, on a entre μ et m^0 une équation qui laisse une de ces quantités à volonté; et on en déduit la valeur de la vitesse initiale, par les formules de l'art. 492. C'est avec toutes ces données qu'on aura l'équation de la courbe et les équations accessoires, comme nous les avons rapportées ci-dessus. Cette solution a encore une assez grande généralité, puisqu'elle laisse arbitraires la quantité m^0 et les rapports $\frac{A}{B} < 1$, $\frac{i}{e} < \frac{1}{2}$, ce dernier devant être rationnel.

541. Pour savoir combien le corps doit faire de révolutions pour revenir au point de départ, il faudra faire $\psi = I\pi$, $\zeta = L\pi + \varepsilon$, L et I étant des entiers; alors on aura $\psi^\circ = 2I\pi$, et la substitution de ces valeurs donnera $\frac{I}{L} = \frac{e}{2i}$. Donc les moindres nombres à prendre pour I et L sont $I = \frac{1}{2}e$, $L = i$, si e est pair; et ils seront $I = e$, $L = 2i$, si e est impair. Le nombre des demi-révolutions qui ramènent le corps au point de départ, est $\frac{1}{2}e + i$ dans un cas, et $e + 2i$ dans l'autre. Donc le nombre des révolutions qui composent une période sera $\frac{1}{2}e + i$, ou $e + 2i$, selon que e sera pair ou impair.

542. Soit, par exemple, $i = 1$, $e = 4$, $\varepsilon = 0$, on aura $x = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{14}$, $c = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$; et l'équation de la courbe sera $F\psi^\circ = 4F\zeta$, x étant le module commun; on aura en même temps $\sin(2\psi - \psi^\circ) = (x)\sin\psi^\circ$, $p = \frac{c\sqrt{m'}\sin\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \frac{\sqrt{a}}{\cos\zeta}$. Soit $\psi = \pi$, on aura $\psi^\circ = 2\pi$, $\zeta = \frac{1}{2}\pi$; donc $p = 0$, et $q = \infty$; c'est-à-dire que le corps parti du point A tombe sur le centre G après une demi-révolution, ce qui est encore un cas analogue à celui que nous avons traité art. 515 et suivans.

543. Soit encore $i = 1$, $e = 3$, $\varepsilon = 0$, on aura $x = \frac{27 - 2\sqrt{161}}{17}$, et l'équation de la courbe sera $F\psi^\circ = 3F\zeta$, x étant le module commun. Soit $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, on aura $\psi^\circ = \frac{3}{2}\pi$, $\psi = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}\pi - \gamma)$, γ étant le plus petit arc dont le sinus est x. Ces valeurs déterminent le point d'intersection B^1. Soit $\zeta = \frac{3}{2}\pi$, on aura $\psi^\circ = \frac{9}{2}\pi$, $\psi = \frac{1}{2}(\frac{9}{2}\pi + \gamma)$; cette seconde valeur de ψ détermine un point d'intersection B^2 qui ne diffère pas de B^1; il en sera de même du point B^3.

Pour avoir les points d'intersection I, soit $\psi = \pi$, on aura $\psi^\circ = 2\pi$, $F\zeta = \frac{4}{3}F'c$, ce qui détermine le premier point I^1. Soit $\psi = 2\pi$, on aura $F\zeta = \frac{8}{3}F'c$, ce qui détermine le second point d'intersection I^2, différent de I^1. Enfin, soit $\psi = 3\pi$, on aura $F\zeta = 4F'c$, ce qui donne $\zeta = 2\pi$; donc le troisième point I^3 se confond avec le point A.

On voit maintenant, par les différentes valeurs de ζ, qu'à partir du point A, les demi-révolutions successives se terminent aux points B^1, I^1, I^2, B^1, A. Après ces cinq demi-révolutions, le corps revient au point A, mais avec une vitesse diamétralement opposée à celle du point de départ; donc il n'a achevé que la moitié de la période, et il faut encore cinq demi-révolutions pour que le corps revienne au point A avec la même vitesse dirigée dans

le même sens. Ce nombre 5, qui exprime combien il y a de révolutions dans une période, serait donné immédiatement par la formule $e + 2i$.

Solution du problème général, lorsque la courbe décrite est à double courbure.

544. Ayant fait voir comment, par l'application de la théorie des fonctions elliptiques, on détermine avec tel degré d'exactitude qu'on voudra, toutes les circonstances du mouvement d'un corps attiré vers deux centres fixes, lorsque la courbe décrite est située dans un plan, il ne sera pas inutile d'indiquer, au moins sommairement, comment on pourrait appliquer les mêmes méthodes au problème considéré dans toute sa généralité, lorsque la courbe décrite est à double courbure. Nous donnerons d'abord, d'après Euler (*Novi Com. Petrop.*, tom. XI), l'analyse par laquelle le problème se réduit immédiatement aux quadratures.

Fig. 30. Soient toujours F et G les centres des forces, M le lieu du corps au bout du temps t; nous imaginerons que le plan FMG était, au commencement du mouvement, confondu avec le plan fixe EFG, et que pendant le temps t il a décrit autour de l'intersection commune FG, l'angle $MPQ = \rho$. Il est évident que pour déterminer le lieu du corps au bout d'un temps quelconque, il suffira de connaître sa position dans le plan mobile FMG, avec l'angle ρ que fait ce plan mobile avec le plan fixe EGF.

Remarquons, avant tout, que si la vitesse du corps, à l'origine du mouvement, était dirigée toute entière dans le plan EFG, il n'y aurait aucune raison pour que le corps sortît de ce plan, et ce cas serait celui que nous avons déjà traité. Le seul élément auquel est dû le mouvement du plan FMG, est donc la partie de la vitesse initiale qui est perpendiculaire au plan EFG; mais cet élément n'a pas seulement pour effet de produire le mouvement du plan FMG; on verra qu'il a encore celui de rendre d'une nature toute différente la courbe décrite dans ce plan.

545. Nous conserverons les mêmes dénominations que dans l'art. 370, pour toutes les quantités, lignes et angles qui appartiennent au plan FMG; nous ferons, de plus, $QP = y'$, $QM = z'$; MQ étant une perpendiculaire abaissée de M sur le plan fixe EFG; et comme on a déjà fait l'angle $MPQ = \rho$, il est clair qu'on aura $y' = y \cos \rho$, $z' = y \sin \rho$.

Cela posé, nous avons les forces $\frac{A}{r^2}$, $\frac{B}{s^2}$, dirigées suivant MF et MG; ces forces étant décomposées suivant les trois coordonnées rectangles x, y', z',

il en résultera les trois équations différentielles du mouvement, savoir :

$$\frac{ddx}{dt^2} = -\frac{A(x-a)}{r^3} - \frac{Bx}{s^3},$$
$$\frac{ddy'}{dt^2} = -\frac{Ay'}{r^3} - \frac{By'}{s^3},$$
$$\frac{ddz'}{dt^2} = -\frac{Az'}{r^3} - \frac{Bz'}{s^3};$$

et voici comment on les réduira au premier ordre :

1°. Multipliant la première par dx, la seconde par dy', la troisième par dz'; ajoutant les produits et intégrant, on aura

$$\frac{dx^2 + dy'^2 + dz'^2}{2dt^2} = \frac{A}{r} + \frac{B}{s} + \frac{C}{a}. \qquad (a')$$

C'est l'équation connue des forces vives, dans laquelle le premier membre, qu'on peut aussi représenter par $\frac{dx^2 + dy^2 + y^2 d\rho^2}{2dt^2}$, est la moitié du quarré de la vitesse.

2°. De la seconde et de la troisième, on déduit immédiatement $y'dz' - z'dy' = Hdt$, ou

$$y^2 d\rho = Hdt. \qquad (b')$$

Cette seconde équation prouve que les aires décrites dans le plan mobile MPQ, perpendiculaire à FG, sont proportionnelles aux temps. En effet, le mouvement du corps dans ce plan, considéré comme fixe, n'est troublé que par la force $\frac{Ay}{r^3} + \frac{By}{s^3}$ dirigée vers le centre P.

3°. La troisième intégrale se déduira, comme dans l'art. 371, de la considération des aires élémentaires da, $d\mathcal{C}$, et de leurs différentielles

$$dda = (x-a)ddy - yddx,$$
$$dd\mathcal{C} = xddy - yddx.$$

Or, les valeurs $y' = y\cos\rho$, $z' = y\sin\rho$, donnent $ddy'\cos\rho + ddz'\sin\rho = ddy - yd\rho^2$; donc en substituant les valeurs de ddy' et ddz' données par les équations du mouvement, on aura

$$ddy - yd\rho^2 = -\left(\frac{A}{r^3} + \frac{B}{s^3}\right)ydt^2,$$

ou

$$\frac{ddy}{dt^2} = \frac{H^2}{y^3} - \frac{Ay}{r^3} - \frac{By}{s^3};$$

d'où l'on déduira

$$\frac{dd\alpha}{dt^2} = \frac{H^2(x-a)}{y^3} + \frac{aBy}{s^3},$$
$$\frac{dd\mathcal{C}}{dt^2} = \frac{H^2 x}{y^3} - \frac{aAy}{r^3}.$$

D'ailleurs on a $da = r^2 d\varphi$, $d\mathcal{C} = s^2 d\omega$, $y = r\sin\varphi = s\sin\omega$, $x = s\cos\omega$, $a - x = r\cos\varphi$. Faisant donc ces diverses substitutions, on parviendra à l'équation différentielle

$$\frac{d\alpha dd\mathcal{C} + d\mathcal{C} dd\alpha}{dt^2} = -Aad\varphi\sin\varphi + Bad\omega\cos\omega + H^2\left(\frac{d\varphi\cos\omega\sin\omega + d\omega\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2\omega\sin^2\varphi}\right),$$

qui peut s'intégrer immédiatement, et dont l'intégrale est

$$\frac{d\alpha d\mathcal{C}}{dt^2} = C'a + Aa\cos\varphi - Ba\cos\omega - H^2\cot\omega\cot\varphi,$$

ou

$$\frac{r^2 s^2 d\alpha d\varphi}{dt^2} = C'a + Aa\cos\varphi - Ba\cos\omega - H^2\cot\omega\cot\varphi; \qquad (c')$$

c'est la troisième intégrale cherchée.

546. Il reste à faire voir comment on peut parvenir à la séparation des variables. Pour cela nous ferons les mêmes substitutions que dans l'art. 372; et observant que les équations (a') et (b') donnent pour le mouvement dans le plan mobile FMG, l'équation

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{C}{a} + \frac{A}{r} + \frac{B}{s} - \frac{H^2}{2y^2}; \qquad (d')$$

si l'on fait encore, pour abréger, $M = C + \frac{Aa}{r} + \frac{Ba}{s} - \frac{aH^2}{2y^2}$, $N = \frac{1}{2}A\cos\varphi - \frac{1}{2}B\cos\omega + \frac{1}{2}C' - \frac{H^2}{2a}\cot\omega\cot\varphi$, on aura

$$\frac{r^2 s^2 d\alpha d\varphi}{a^2(dx^2 + dy^2)} = \frac{-p^2 dq^2 - q^2 dp^2}{(1+q^2)^2 dp^2 + (1-p^2)^2 dq^2} = \frac{N}{M}.$$

De là résulte l'équation $Pdq^2 = Qdp^2$, dans laquelle on a

$$P = Mp^2 - N(1+p^2)^2,$$
$$Q = Mq^2 + N(1+q^2)^2;$$

et substituant dans ces expressions les valeurs de M et N, après les avoir réduites en fonctions de p et q, on obtient le résultat suivant, très remarquable en ce que P se réduit à une fonction de p seule, de même que Q à une fonction de q seule, comme dans le cas de $H = 0$:

$$P = Cp^2 + \tfrac{1}{2}(A+B)(1-p^4) - \tfrac{1}{2}C'(1-p^2)^2 - \frac{H^2}{2a}\left(\frac{1+p^4}{2p}\right)^2,$$
$$Q = Cq^2 + \tfrac{1}{2}(A-B)(1-q^4) + \tfrac{1}{2}C'(1+q^2)^2 - \frac{H^2}{2a}\left(\frac{1-q^4}{2q}\right)^2.$$

On aura donc enfin l'équation à différentielles séparées $\pm\frac{dp}{\sqrt{P}} = \frac{dq}{\sqrt{Q}}$, dont chaque membre est intégrable par une fonction elliptique de première espèce, comme on le voit immédiatement en faisant $p^2 = u$, $q^2 = z$.

547. Les valeurs de P et Q exprimées en fonctions de M et N donnent, en faisant $dR^2 = \frac{dp^2}{P} = \frac{dq^2}{Q}$,

$$p^2dq^2 - q^2dp^2 = NdR^2(p^2+q^2)(1+p^2q^2);$$

substituant cette valeur dans l'expression de $r^2s^2d\varphi d\omega$ de l'art. 372, et ensuite mettant à la place de $r^2s^2d\varphi d\omega$ sa valeur $2aNdt^2$, on aura, comme dans l'art. 373,

$$\frac{dt}{a\sqrt{2a}} = \frac{(p^2+q^2)(1+p^2q^2)}{(1-p^2)^2(1+q^2)^2}dR = \frac{p^2dR}{(1-p^2)^2} + \frac{q^2dR}{(1+q^2)^2},$$

ce qui donne, en séparant les variables,

$$\frac{dt}{a\sqrt{2a}} = \pm\frac{p^2}{(1-p^2)^2}\cdot\frac{dp}{\sqrt{P}} + \frac{q^2}{(1+q^2)^2}\cdot\frac{dq}{\sqrt{Q}}. \qquad (e')$$

Remarquez que les deux parties de cette formule doivent toujours être positives, parce que dR est essentiellement positif, et qu'elles ne peuvent devenir nulles, ni l'une ni l'autre, parce que, d'après l'équation (d'), l'ordonnée y ne peut jamais se réduire à zéro.

548. De la valeur de dt résulte celle de $d\rho = \frac{Hdt}{y^2}$; et comme $y = r\sin\varphi = \frac{2apq}{(1-p^2)(1+q^2)}$, on aura $d\rho = \frac{HdR}{2\sqrt{2a}}\cdot\frac{(p^2+q^2)(1+p^2q^2)}{p^2q^2} = \ldots\ldots \frac{HdR}{2\sqrt{2a}}\left(\frac{(1-p^2)^2}{p^2} + \frac{(1+q^2)^2}{q^2}\right)$, ou enfin

$$d\rho = \frac{H}{2\sqrt{2a}}\left(\pm\frac{(1-p^2)^2}{p^2}\cdot\frac{dp}{\sqrt{P}} + \frac{(1+q^2)^2}{q^2}\cdot\frac{dq}{\sqrt{Q}}\right).$$

On voit que cette valeur est composée, comme celle de dt, de deux parties qui doivent toujours être prises positivement. Elles sont écrites l'une et l'autre dans la supposition que la première valeur de $\frac{dq}{dt}$ est positive ; il faudrait changer les signes, si cette première valeur était négative.

549. On peut donner une forme plus simple aux polynomes qui entrent dans l'équation fondamentale $\pm \frac{dp}{\sqrt{P}} = \frac{dq}{\sqrt{Q}}$. Pour cela on fera $p^2 = \frac{u-1}{u+1}$, $q^2 = \frac{1-z}{1+z}$, ce qui revient à supposer $r+s = au$, $s-r = az$; alors u sera toujours positif et > 1; mais z, qui pourra être positif ou négatif, sera toujours < 1. Cela se voit par le triangle FMG, dont un côté doit toujours être plus petit que la somme des deux autres. Faisant donc ces substitutions, on aura les nouveaux polynomes

$$U = \tfrac{1}{2}C(u^2-1)^2 + (A+B)u(u^2-1) - C'(u^2-1) - H'u^2,$$
$$Z = \tfrac{1}{2}C(1-z^2)^2 + (A-B)z(1-z^2) + C'(1-z^2) - H'z^2,$$

où l'on a fait $H' = \frac{H^2}{a}$, et qui donnent l'équation

$$\pm \frac{du}{\sqrt{U}} = \frac{dz}{\sqrt{Z}}. \qquad (f')$$

On voit que chaque membre est intégrable par une fonction elliptique de première espèce; d'ailleurs on peut remarquer qu'en changeant le signe de A dans l'un des polynomes U et Z, ils deviennent des fonctions semblables de u et de z.

En vertu des mêmes transformations, les valeurs de dt et de $d\rho$ seront données par les formules

$$\frac{dt}{a\sqrt{a}} = \pm \frac{u^2-1}{4} \cdot \frac{du}{\sqrt{U}} + \frac{1-z^2}{4} \cdot \frac{dz}{\sqrt{Z}}, \qquad (g')$$
$$d\rho = \pm \frac{H'}{u^2-1} \cdot \frac{du}{\sqrt{U}} + \frac{H'}{1-z^2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{Z}}, \qquad (h')$$

où il faut observer que les deux parties, considérées dans leur valeur absolue, sont toujours positives et ne peuvent jamais être nulles.

550. Si l'on se borne, comme dans les recherches précédentes, à ne considérer que les mouvemens permanens, c'est-à-dire ceux dans lesquels le corps reste toujours à une distance finie des centres des forces, alors la valeur de u sera toujours finie; quant à celle de z, elle est plus petite que l'unité, dans toutes les hypothèses; elle ne peut être égale à l'unité que dans le cas où l'orbite couperait l'axe FG, ce qui n'a jamais lieu lorsque l'orbite est à double courbure.

Cela posé, soit m la plus grande et m' la plus petite valeur de u; cette valeur m' ne peut jamais être zéro, car alors y serait zéro, ce qui ne peut jamais avoir lieu d'après l'équation (d'). On pourra donc supposer le poly-

nome U ainsi décomposé en facteurs, où l'on a fait $D = -\frac{1}{2}C$,

$$U = D(m-u)(u-m')(u^2+2fu+f'),$$

et il faudra que $u^2+2fu+f'$ soit positif dans toute l'étendue de la courbe décrite, depuis $u=m'$ jusqu'à $u=m$.

Supposons qu'à l'origine du mouvement, on désigne par F le foyer le plus proche du corps; alors la première valeur de z sera positive. Dans cette hypothèse, les différentes valeurs de z seront ou toutes positives, ou les unes positives, les autres négatives. Soit n la plus grande valeur positive de z, n' la plus petite valeur, laquelle pourra même être négative; dans les deux cas, $n-n'$ sera positif. Et en faisant semblablement

$$Z = D(n-z)(z-n')(z^2+2gz+g'),$$

il faudra que le facteur $z^2+2gz+g'$ soit positif pour toutes les valeurs de z comprises entre les limites $z=n'$, $z=n$.

551. D'après l'état initial du mouvement, on connaîtra les valeurs des constantes C, C', H ou $H' = \frac{H^2}{a}$; on pourrait donc décomposer les polynomes U et Z en facteurs, par les règles ordinaires de l'analyse; mais il est préférable de suivre les formes que nous venons d'indiquer, lesquelles se rapportent d'ailleurs spécialement à l'hypothèse que les distances r et s ne peuvent devenir infinies.

Si l'on fait successivement $u=m$ et $u=m'$, dans l'expression du polynome U, on aura les équations

$$\tfrac{1}{2}C(m^2-1)^2+(A+B)m(m^2-1)-C'(m^2-1)=H'm^2,$$
$$\tfrac{1}{2}C(m'^2-1)^2+(A+B)m'(m'^2-1)-C'(m'^2-1)=H'm'^2,$$

d'où résulte

$$D=-\tfrac{1}{2}C=\frac{A+B}{m+m'}+\frac{H'}{(m^2-1)(m'^2-1)},$$
$$C'=(A+B)\left(\frac{1+mm'}{m+m'}\right)-\frac{H'(m^2m'^2-1)}{(m^2-1)(m'^2-1)}.$$

Ces valeurs sont exprimées en fonctions de m et m'; mais dans le problème à résoudre, il faut au contraire déduire m et m' des données D, C', A + B, H'. Pour cela, soit $1+mm'=y$, $m+m'=xy$ (les quantités x et y ne devant pas être confondues avec celles qui représentent les coordonnées du point M), on aura les deux équations

$$D = \frac{A+B}{xy} + \frac{H'}{y^2(1-x^2)},$$

$$C' = \frac{A+B}{x} - \frac{H'}{1-x^2}\left(1-\frac{2}{y}\right).$$

La première donne

$$\frac{2H'x}{y} + (A+B)(1-x^2) = \sqrt{[(A+B)^2(1-x^2)^2 + 4DH'x^2(1-x^2)]};$$

la seconde étant mise sous la forme

$$H'x + C'x(1-x^2) = (A+B)(1-x^2) + \frac{2H'x}{y},$$

puis combinée avec la précédente, on en déduit

$$(H' + C' - C'x^2)^2 x^2 = (A+B)^2(1-x^2)^2 + 4DH'x^2(1-x^2),$$

équation qui est du troisième degré relativement à l'inconnue x^2, et d'où l'on tirera une valeur de x plus petite que l'unité.

Connaissant x, on trouvera y par la valeur

$$y = \frac{(A+B)(1-x^2) + \sqrt{[(A+B)^2(1-x^2)^2 + 4DH'x^2(1-x^2)]}}{2Dx(1-x^2)},$$

ou par la formule entièrement rationnelle $y = \frac{2H'x}{H'x-(A+B-C'x)(1-x^2)}$. Enfin, on aura m et m' par les équations $m+m' = xy$, $mm' = y-1$.

552. Il reste à déterminer les coefficiens du facteur $u^2 + 2fu + f'$; pour cela, je fais successivement $u = 1$, $u = -1$, dans les deux expressions du polynome U, et j'ai les deux équations

$$H' = D(m-1)(m'-1)(1+2f+f'),$$
$$H' = D(m+1)(m'+1)(1-2f+f'),$$

d'où résulte

$$2f = \frac{H'(1+m')}{D(m^2-1)(m'^2-1)},$$

$$1+f' = \frac{H'(1+mm')}{D(m^2-1)(m'^2-1)}.$$

Ces formules font voir que f et $1+f'$ sont toujours positifs; d'où il suit que le facteur $u^2+2fu+f'$ est positif pour toute valeur de u plus grande que l'unité, et à plus forte raison pour toute valeur comprise entre m et m'.

553. Il suffira de changer le signe de A dans les formules du n° 551, et on en déduira semblablement les valeurs de n et n'. Quant au facteur $z^2+2gz+g'$ qui entre dans l'expression de Z, on trouvera ses coefficiens, comme dans l'art. 552, par les formules

$$2g = \frac{H'(n+n')}{D(1-n^2)(1-n'^2)},$$

$$1+g' = \frac{H'(1+nn')}{D(1-n^2)(1-n'^2)}.$$

Au reste, l'équation $Udz^2 = Zdu^2$ fait voir que comme U est positif dans toute l'étendue de la courbe décrite, de même Z sera toujours positif, ainsi que le facteur $z^2 + 2gz + g'$, pour toute valeur de z comprise entre les limites $z = n$, $z = n'$.

554. Puisque les valeurs de u sont toujours comprises entre les limites m et m', et celles de z entre les limites n et n', il s'ensuit que la courbe décrite dans le plan mobile FMG est toujours renfermée dans une espèce de trapèze hyperbolico-elliptique TVYZ, dont deux côtés opposés TV, XY, appartiennent aux ellipses tracées d'après les équations $r+s=am$, $r+s=am'$, et les deux autres côtés TX, VY, appartiennent aux hyperboles dont les équations sont $s-r=an$, $s-r=an'$, F et G étant les foyers communs de ces quatre courbes. Il faut, de plus, que ce trapèze soit situé tout entier d'un même côté de l'axe FG. Fig. 30.

Et puisque la courbe que décrit le corps dans le plan mobile FMG est ainsi circonscrite par le trapèze TVYX, dont elle doit toucher tous les côtés, on voit que la détermination de cette courbe est, en quelque sorte, plus simple que dans le cas où le plan est fixe, et qu'il y aura beaucoup moins de variété dans les formes qu'elle doit prendre suivant les différens cas.

D'ailleurs, la position du corps dans le plan mobile FMG étant connue au bout du temps t, ainsi que l'angle ρ décrit par ce plan autour du plan fixe EFG, il est clair que le mouvement du corps et son orbite tracée dans l'espace seront parfaitement connus et déterminés.

555. Venons maintenant à l'intégration de l'équation (f'). Comme on peut prendre pour origine du mouvement tout autre point de l'orbite que celui qui dans l'état initial a servi à déterminer les constantes C, C', H, nous supposerons, pour plus de simplicité, que le mouvement commence à compter d'une apside supérieure S^0 où l'on a $r+s=am$; nous supposerons en même temps, que le corps parti de S^0 suivant la tangente de l'ellipse en ce point, se meut dans le sens S^0V, de manière qu'il se rapproche du foyer G, et qu'ainsi la valeur de $\frac{dz}{dt}$ au point S^0 est négative. Par ce moyen, l'équation (f'), où les premières valeurs de u et de z vont en diminuant, devra être écrite ainsi, $\frac{du}{\sqrt{U}} = \frac{dz}{\sqrt{Z}}$, et les équations (g'), (h') deviendront, en prenant convenablement les signes,

$$\frac{dt}{a\sqrt{\alpha}} = -\left(\frac{u^2-1}{4}\right)\frac{du}{\sqrt{U}} - \left(\frac{1-z^2}{4}\right)\frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

$$d\rho = -\frac{H}{u^2-1}\cdot\frac{du}{\sqrt{U}} - \frac{H'}{1-z^2}\cdot\frac{dz}{\sqrt{Z}}.$$

556. Cela posé, pour exprimer que u est contenu entre les limites m et m', je fais $u = m\cos^2\sigma + m'\sin^2\sigma$, ce qui donne

$$-\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{D}}\cdot\frac{2d\sigma}{\sqrt{(u^2+2fu+f')}}.$$

Pour simplifier ultérieurement ce résultat, il faut considérer différens cas, selon que $u^2+2fu+f'$ est de l'une des trois formes

$$u^2+2\mu u\cos\theta+\mu^2,$$
$$(u+\mu)(u+u'),$$
$$(u+\mu)(u-\mu'),$$

μ et μ' étant des quantités réelles et positives.

Nous nous bornerons ici au second cas; et supposant $\mu > \mu'$, nous ferons $\tang\sigma = h\tang\psi$, ensuite $h = \sqrt{\left(\frac{m+\mu}{m'+\mu}\right)}$, et $c^2 = \frac{m-m'}{m+\mu'}\cdot\frac{\mu-\mu'}{\mu+m'}$, ce qui donnera la transformée

$$-\frac{du}{\sqrt{U}} = \frac{2D^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(m+\mu')}\cdot\sqrt{(m'+\mu)}}\cdot\frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}.$$

On parviendrait immédiatement à ce résultat par la substitution

$$u = \frac{(mm'+m\mu)\cos^2\psi+(mm'+m'\mu)\sin^2\psi}{(m'+\mu)\cos^2\psi+(m+\mu)\sin^2\psi}.$$

557. Si l'on fait pareillement $z = n\cos^2\chi + n'\sin^2\chi$, on aura d'abord

$$-\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{1}{\sqrt{D}}\cdot\frac{2d\chi}{\sqrt{(z^2+2gz+g')}};$$

ensuite il faudra distinguer de même trois cas, selon que la quantité $z^2+2gz+g'$ sera de l'une des trois formes,

$$z^2+2\nu z\cos\lambda+\nu^2,$$
$$(z+\nu)(z+\nu'),$$
$$(z+\nu)(z-\nu'),$$

ν et ν' étant des quantités réelles et positives.

Ces trois cas combinés avec les trois de la première formule, offrent neuf cas différens à considérer, et pour lesquels on pourra former un tableau

analogue à celui que nous avons donné pour le cas où le corps se meut dans un plan fixe.

Supposons de nouveau que $z^2 + 2gz + g' = (z+\nu)(z+\nu')$, et qu'on a $\nu > \nu'$; nous ferons $\tang \chi = h' \tang \zeta$, ensuite $h' = \sqrt{\left(\frac{n+\nu}{n'+\nu}\right)}$ et $\varkappa^2 = \frac{n-n'}{n+\nu'} \cdot \frac{\nu-\nu'}{n'+\nu}$, ce qui donnera la transformée

$$-\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{2D^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(n+\nu')}.\sqrt{(n'+\nu)}} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\varkappa^2 \sin^2\zeta)}};$$

elle résulterait directement de la substitution

$$z = \frac{(nn'+n\nu)\cos^2\zeta + (nn'+n'\nu)\sin^2\zeta}{(n'+\nu)\cos^2\zeta + (n+\nu)\sin^2\zeta}.$$

Ces formules auraient lieu quand même n' serait négatif; en effet, soit $n' = -n''$; pour que la quantité $z^2 + 2gz + g'$ ou son égale $(z+\nu)(z+\nu')$ conserve le même signe, conformément à ce qui a été démontré, depuis $z = -n''$ jusqu'à $z = n$, il faut que $\nu' - n''$ soit positive, et à plus forte raison $\nu - n''$; donc ayant fait

$$\varkappa^2 = \frac{n+n''}{n+\nu'} \cdot \frac{\nu-\nu'}{\nu-n''}, \quad \mathfrak{C}^2 = 1 - \varkappa^2 = \frac{n+\nu}{n+\nu'} \cdot \frac{\nu'-n''}{\nu-n''},$$

on voit que $\varkappa^2$ et $\mathfrak{C}^2$ seront positifs, et qu'ainsi $\varkappa^2$ sera plus petit que l'unité.

558. Cela posé, si l'on fait en général $k = \sqrt{\left(\frac{n+\nu'}{m+\mu'} \cdot \frac{n'+\nu}{m'+\mu}\right)}$, l'équation de la courbe décrite dans le plan mobile sera

$$k\mathrm{F}(c, \psi) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta) + \text{const.}$$

Au commencement du mouvement, c'est-à-dire lorsque le corps est dans l'apside supérieure S^0, on a $\psi = 0$; soit en même temps $\zeta = \epsilon$, et on aura

$$k\mathrm{F}(c, \psi) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta) - \mathrm{F}(\varkappa, \epsilon).$$

Il serait d'ailleurs facile de réduire le second membre au seul terme $\mathrm{F}(\varkappa, \xi)$, au moyen de l'équation algébrique qui représente l'équation transcendante $\mathrm{F}(\zeta) - \mathrm{F}(\epsilon) = \mathrm{F}(\xi)$, $\varkappa$ étant le module commun.

Au reste, la valeur de ϵ peut se déterminer par l'état initial du mouvement qui a servi à déterminer les constantes C, C', H. Pour cela, soient ψ^0 et ζ^0 les valeurs de ψ et ζ qui conviendraient à cet état initial, on peut supposer ψ^0 et ζ^0 positifs ou négatifs, mais moindres que $\frac{1}{2}\pi$; or, quand, de l'époque où le corps est au point S^0, on remonte à une époque antérieure,

telle que son état initial, il faut supposer que les valeurs de ψ et ζ qui répondent à un point déterminé du plan FMG, sont diminuées chacune d'un certain nombre de demi-circonférences, c'est-à-dire qu'on devra faire dans l'équation de la courbe $\psi = \psi^\circ - I\pi$, $\zeta = \zeta^\circ - L\pi$, I et L étant des entiers, et alors de cette équation on déduira

$$2L + \frac{F(\varkappa, \iota)}{F'\varkappa} = \frac{2kIF'c - kF(c, \psi^\circ) + F(\varkappa, \zeta^\circ)}{F'\varkappa}.$$

Et quoiqu'on ait trois inconnues I, L, ι, à déterminer par cette équation, il n'y aura jamais qu'une manière d'y satisfaire exactement; car si, ι restant le même, ainsi que ψ° et ζ°, on supposait que les entiers I et L fussent remplacés par d'autres entiers I' et L', il faudrait qu'on eût $\frac{L' - L}{I' - I} = \frac{kF'c}{F'\varkappa}$; ainsi il faudrait que la quantité $\frac{kF'c}{F'\varkappa}$ fût rationnelle, ou que la courbe fût rentrante sur elle-même, ce qui n'indiquerait toujours qu'un seul point où les valeurs de ψ et ζ seraient ψ° et ζ°.

559. On voit maintenant qu'il est facile de trouver une infinité de courbes algébriques qui satisfassent à la question. On peut pour cela faire $c = \varkappa$ et $k = \frac{i}{e}$, i et e étant des entiers, ce qui donnera les deux conditions

$$\frac{n + \nu'}{m + \mu'} \cdot \frac{n' + \nu}{m' + \mu} = \frac{i^2}{e^2},$$

$$\frac{m + \mu}{m + \mu'} \cdot \frac{m' + \mu'}{m' + \mu} = \frac{n + \nu}{n + \nu'} \cdot \frac{n' + \nu'}{n' + \nu}.$$

Ces conditions ayant lieu, l'équation de la courbe sera $iF\psi = eF\xi$, c étant le module commun.

On obtiendra encore des courbes algébriques en satisfaisant aux conditions $k\left(\frac{1 + c^\circ}{2}\right) = \frac{i}{e}$, $\varkappa = c^\circ$, et ainsi de suite, chaque système représentant toujours une infinité de courbes algébriques.

Nous ne parlons ici que de la courbe tracée dans le plan mobile FMG, et circonscrite par le quadrilatère TVYX; car si l'on voulait que la véritable orbite à double courbure, décrite dans l'espace, fût une courbe algébrique, il faudrait satisfaire à beaucoup d'autres conditions qui rendraient ce problème plus épineux qu'intéressant.

560. Un cas fort remarquable est celui où l'on aurait $m = m'$; alors la courbe décrite dans le plan mobile serait l'arc d'ellipse TV, qui, dans ce cas, se confondrait avec XY. Ainsi le corps ne pourrait faire que des oscil-

lations dans cet arc, en allant alternativement de T en V et de V en T. Combinant ce mouvement d'oscillation avec le mouvement du plan qui se détermine toujours de la même manière par l'angle ρ, on aurait le mouvement absolu du corps. Ce mouvement s'exécute dans la surface du sphéroïde elliptique décrit par la rotation de l'arc TV autour de l'axe FG; et il est visible qu'à cause du mouvement de rotation, l'orbite comprise dans cette surface est composée de diverses sinuosités qui touchent alternativement les deux circonférences décrites par les points T et V, sans que la vitesse du corps en ces points soit jamais nulle. Ce cas, au reste, donne lieu à des simplifications de calcul assez remarquables.

Alors l'équation à l'ellipse $u = m$, tient lieu de l'équation $k\mathrm{F}(c, \psi) = \mathrm{F}(x, \xi)$, et on aura pour déterminer t et ρ les formules

$$\frac{dt}{a\sqrt{a}} = -\left(\frac{m^2 - z^2}{4}\right)\frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

$$d\rho = -\left(\frac{1}{1 - z^2} + \frac{1}{m^2 - 1}\right)\frac{\mathrm{H}'dz}{\sqrt{Z}},$$

où il faudra substituer les valeurs trouvées ci-dessus,

$$z = \frac{n(n' + \nu)\cos^2\zeta + n'(n + \nu)\sin^2\zeta}{(n' + \nu)\cos^2\zeta + (n + \nu)\sin^2\zeta},$$

$$-\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{2\mathrm{D}^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(n + \nu')}.\sqrt{(n' + \nu)}} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2\zeta)}}.$$

Le temps d'une oscillation se trouverait en prenant l'intégrale depuis $\zeta = 0$ jusqu'à $\zeta = \frac{1}{2}\pi$.

561. Un second cas non moins remarquable, est celui où l'on aurait $n = n'$; alors la courbe décrite dans le plan mobile serait l'arc d'hyperbole TX, qui, dans ce cas, se confondrait avec VY. Ainsi le mouvement du corps dans ce plan serait un simple mouvement d'oscillation suivant l'arc TX, et sa vitesse serait nulle dans le plan aux deux extrémités de cet arc. Les formules qui satisfont à ce cas sont semblables à celles que nous venons de rapporter.

562. Enfin un troisième cas qui dérive des deux autres est celui où l'on aurait à la fois $m = m'$ et $n = n'$; alors le quadrilatère TVYX se réduirait à un point; le corps n'aurait aucun mouvement dans le plan FMG, et sa vitesse serait toute entière perpendiculaire à ce plan, de sorte qu'il décrirait nécessairement une circonférence dont le centre est au point P.

Les simptômes de ce troisième cas sont faciles à établir immédiatement. Fig. 31.
En effet, soit M le lieu du corps qui doit rester fixe dans le plan FMG;

si l'on emploie les dénominations de l'art. 370, les quantités φ, ω, r, s, y seront constantes, et on aura entr'elles les relations $r = \frac{a \sin \omega}{\sin(\varphi - \omega)}$, $s = \frac{a \sin \varphi}{\sin(\varphi - \omega)}$, $y = r \sin \varphi = s \sin \omega$, $x = s \cos \omega$, $a - x = - r \cos \varphi$. Or, en vertu des forces A et B, dirigées vers les centres F et G, le corps M est sollicité parallèlement à GF par la force $\frac{A(a-x)}{r^3} - \frac{Bx}{s^3}$, et dans le sens MP par la force $\frac{Ay}{r^3} + \frac{By}{s^3}$; la première doit être nulle, pour que le corps n'ait aucun mouvement dans le sens de l'axe FG; ainsi on aura la condition

$$0 = A \cos \varphi \sin^2 \varphi + B \cos \omega \sin^2 \omega,$$

qui servira à déterminer φ par ω, ou réciproquement.

Ensuite, pour que la force $\frac{Ay}{r^3} + \frac{By}{s^3}$ dirigée vers P, n'ait d'autre effet que de faire mouvoir le corps dans le cercle dont le rayon est MP, il faut, en appelant V sa vitesse, qu'on ait

$$\frac{Ay}{r^3} + \frac{By}{s^3} = \frac{V^2}{y};$$

substituant dans cette équation les valeurs de r, s, y en fonctions de a, φ, ω, et observant que d'après l'équation (b') on a $H = Vy$ et $V^2 = \frac{H^2}{y^2} = \frac{aH'}{y^2}$, il en résultera

$$H' = A \sin^3 \varphi \operatorname{tang} \omega,$$

ou $V = \sin(\varphi - \omega) \sqrt{\left(\frac{A \sin \omega}{a \sin \omega \cos \omega}\right)}$. Ainsi on connaît la position du corps et la vitesse primitive dont il doit être animé, pour que ce cas particulier ait lieu.

En terminant ces recherches sur le problème des deux centres d'attraction, nous ferons observer que sans le secours de la théorie des fonctions elliptiques, il eût été impossible de discuter, comme nous l'avons fait, les différens cas de ce problème, de déterminer dans chacun d'eux la figure de l'orbite, et d'assigner avec toute la précision désirable, le lieu du corps au bout d'un temps quelconque et après tant de révolutions qu'on voudra. Les cas où l'orbite est une courbe algébrique sont remarquables en ce que la courbe rentre sur elle-même après une période composée d'un nombre déterminé de révolutions, de sorte qu'il suffit de déterminer le mouvement du corps dans la durée de cette période qui se renouvelle sans cesse. Quelques-uns de ces cas avaient été indiqués par Euler, mais notre analyse en

a fait découvrir une infinité d'autres, et nous aurions pu les multiplier encore à l'infini, en faisant usage de la seconde échelle des modules qui était demeurée jusqu'ici inconnue et dont nous avons fait connaître les propriétés dans le chap. XXXI.

Du mouvement rectiligne d'un corps attiré vers deux centres fixes.

563. Quoique ce problème ne soit sujet à aucune difficulté, cependant comme il n'a point été traité jusqu'ici d'une manière complète, j'ai cru qu'il serait convenable d'en donner ici la solution, laquelle pourra être regardée d'ailleurs comme une application nouvelle de la théorie des fonctions elliptiques.

Supposons que le point A, où commence le mouvement, soit situé sur le prolongement de la ligne des centres FG, du côté de F; soit V la vitesse initiale que nous supposons dirigée suivant AM, et soit M le lieu du corps au bout du temps t. Si l'on fait $FG = a$, $AF = h$, $AG = a + h = h'$, $FM = x$, on aura l'équation différentielle Fig. 32.

$$\frac{ddx}{dt^2} = -\frac{A}{x^2} - \frac{B}{(a+x)^2},$$

dont l'intégrale est, en déterminant convenablement la constante,

$$\frac{dx^2}{2dt^2} = \frac{1}{2}V^2 + \frac{A}{x} + \frac{B}{a+x} - \frac{A}{h} - \frac{B}{a+h}.$$

On voit déjà par cette intégrale que si l'on a $V^2 =$ ou $> \frac{2A}{h} + \frac{2B}{h'}$, le corps s'éloignera à l'infini; et qu'au contraire si l'on a $V^2 < \frac{2A}{h} + \frac{2B}{h'}$, le corps ne pourra s'éloigner que jusqu'à une distance $FD = k$ déterminée par l'équation

$$\frac{A}{k} + \frac{B}{a+k} = \frac{A}{h} + \frac{B}{a+h} - \frac{V^2}{2};$$

or, cette équation étant du genre de celles que j'ai appelées *équations omales* (*), elle aura toujours une racine réelle positive.

564. Le corps, parvenu au point D, revient sur ses pas en vertu de l'action des forces centrales, et il descend de D vers F, d'un mouvement continuellement accéléré. Sa vitesse en un point quelconque M, que nous désignerons par v, se déterminera toujours par la même équation, qu'on

(*) Supplément à l'Essai sur la Théorie des Nombres, page 29.

peut mettre sous la forme

$$\frac{v^2}{2} = \frac{A}{x} + \frac{A}{a+x} - \frac{A}{k} - \frac{B}{a+k};$$

d'où il suit que la vitesse en A est égale à la vitesse initiale V, mais dirigée en sens contraire, et que la vitesse finale au point F est infinie.

En vertu de cette vitesse, le corps passe au-delà du centre F, et sa vitesse redevient aussitôt finie. Mais comme la force A change de signe en même temps que x, il s'ensuit qu'au point M', où l'on a $FM' = x$, la vitesse du corps sera déterminée par l'équation

$$\frac{v^2}{2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a-x} - \frac{A}{k} - \frac{B}{a+k}.$$

J'observe maintenant que la quantité $\frac{A}{x} + \frac{B}{a-x}$ ayant pour *minimum* $\frac{1}{a}(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2$, il y aura deux cas à considérer, selon que $\frac{Aa}{k} + \frac{Ba}{a+k}$ est $<$ ou $>$ $(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2$.

565. *Premier cas.* Si l'on a $\frac{Aa}{k} + \frac{Ba}{a+k} > (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2$, le corps ne pourra s'éloigner de F que jusqu'à une certaine distance $FE = k'$, moindre que FG, même moindre que $\frac{a\sqrt{A}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$, et déterminée par l'équation

$$\frac{A}{k'} + \frac{B}{a-k'} = \frac{A}{k} + \frac{B}{a+k}.$$

Parvenu au point E, le corps reviendra sur ses pas; sa vitesse, d'abord nulle en E, deviendra infinie en F, elle redeviendra finie passé le point F et diminuera continuellement jusqu'au point D, où elle sera nulle. En général, le mouvement du corps sera un mouvement d'oscillation par lequel il passera alternativement du point D au point E et du point E au point D; et sa vitesse dans un même point de la droite DE sera toujours la même dans un sens ou dans l'autre.

Ce premier cas comprend celui où l'on aurait l'égalité $\frac{Aa}{k} + \frac{Ba}{a+k} = (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2$; alors le corps s'éloignera le plus qu'il est possible du centre F, dans le sens FG, et cette plus grande distance serait $k' = \frac{a\sqrt{A}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$.

566. *Second cas.* Si l'on a $\frac{Aa}{k} + \frac{Ba}{a+k} < (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2$, la vitesse du corps sera dans son *minimum* au point où l'on a $x = \frac{a\sqrt{A}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$; mais elle

augmentera ensuite, et le corps se portera d'un mouvement accéléré vers le centre G, où sa vitesse sera infinie.

En vertu de cette vitesse, le corps continuera son mouvement au-delà du centre G. Soit $GM'' = x$, et on aura, au point M'',

$$\frac{v^2}{2} = \frac{A}{a+x} + \frac{B}{x} - \frac{A}{k} - \frac{B}{a+k}.$$

Le corps s'éloigne donc du centre G jusqu'à une distance $GD' = k'$ déterminée par l'équation

$$\frac{A}{a+k'} + \frac{B}{k'} = \frac{A}{k} + \frac{B}{a+k}.$$

Le point D' ainsi déterminé sera le second terme de l'oscillation; ensuite on voit que le corps reviendra du point D' au point D, et que sa vitesse, dans un même point de la ligne DD', sera la même en allant et en revenant. Il s'agit maintenant de trouver dans ces deux hypothèses le temps de chaque oscillation.

567. Supposons donc que le corps parte du point D, où sa vitesse est nulle, et qu'au bout du temps t il se trouve au point M, situé entre D et F; si l'on fait $FD = k$, $FM = x$, on aura l'équation

$$\frac{dx^2}{2dt^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a+x} - \frac{A}{k} - \frac{B}{a+k},$$

d'où résulte

$$dt\sqrt{2A} = \frac{-dx\sqrt{[Ak(a+k)x(a+x)]}}{\sqrt{(k-x)}\cdot\sqrt{[A(a+k)(a+x)+Bkx]}}.$$

Soit d'abord $x = \frac{k}{1+y^2}$, ensuite $y = \sqrt{\left(\frac{a+k}{a}\right)}\tang\varphi$ et $c^2 = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{Bk^2}{A(a+k)^2+Bk^2}$, on aura la transformée

$$dt = bk\sqrt{\left(\frac{2k}{A}\cdot\frac{a+k}{a}\right)}\cdot\frac{d\varphi\cos^2\varphi}{\left(1+\frac{k}{a}\sin^2\varphi\right)^2\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}.$$

Pour avoir le temps de la descente de D en F, il faut intégrer la formule précédente depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Soit dans ces limites $Z^1 = \int\frac{d\varphi\cos^2\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^2\Delta}$, n étant $= \frac{k}{a}$ on aura par les réductions connues

$$2(n+c^2)Z^1 = E^1c - \left(1+\frac{c^2}{n}\right)F^1c + \left(n+2c^2+\frac{c^2}{n}\right)\Pi^1(n,c).$$

Quant à la fonction $\Pi^1(n,c)$, elle se trouve par la formule du n° 107; connaissant donc Z^1 et appelant T' le temps employé à parcourir DF, on aura

$$T' = bkZ^1 . \sqrt{\left[\frac{2k(1+n)}{A}\right]}.$$

568. Pour avoir maintenant le temps du mouvement sur la droite FG, il faudra intégrer l'équation

$$dt\sqrt{2} = \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{a-x} - \frac{C}{a}\right)}},$$

dans laquelle $\frac{C}{a} = \frac{A}{k} + \frac{B}{a+k}$. Pour cela il faut, comme ci-dessus, distinguer deux cas.

Soit 1°. $C > (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2$; le corps ne pourra s'éloigner de F que jusqu'à une distance $FE = k'$, moindre que FG, déterminée par l'équation

$$\frac{A}{k'} + \frac{B}{a-k'} - \frac{C}{a} = 0.$$

Soit donc $x = k' \sin^2 \psi$, on aura

$$dt = \frac{\sqrt{2k'} . d\psi \sin^2 \psi}{\sqrt{\left[\frac{A}{k'^2} - \frac{B \sin^2 \psi}{(a-k')(a-k' \sin^2 \psi)}\right]}}.$$

Soit ensuite $\tang \psi = \sqrt{\left(\frac{a}{a-k'}\right)} \tang \zeta$; si l'on fait $\nu = \frac{k'}{a-k'}$, et $\varkappa^2 = \frac{B\nu^2}{A}$, on aura la transformée

$$dt = \frac{\nu a \sqrt{(2\nu a)}}{\sqrt{A}} . \frac{d\zeta \sin^2 \zeta}{(1+\nu \sin^2 \zeta)^2 \sqrt{(1-\varkappa^2 \sin^2 \zeta)}}.$$

Cette formule devra être intégrée depuis $\zeta = 0$ jusqu'à $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, afin d'avoir le temps employé à parcourir FE ; soit donc dans ces limites $Z'' = \ldots\ldots \int \frac{d\zeta \sin^2 \zeta}{(1+\nu \sin^2 \zeta)^2 \sqrt{(1-\varkappa^2 \sin^2 \zeta)}}$, on aura, par les formules connues,

$$2(1+\nu)(\nu+c^2) Z'' = \left(1 + \frac{\varkappa^2}{\nu}\right) F^1 c - E^1 c + \left(\nu - \frac{\varkappa^2}{\nu}\right) \Pi^1 (\nu, \varkappa),$$

et on en déduira le temps cherché

$$T'' = \frac{\nu a \sqrt{(2\nu a)}}{\sqrt{A}} Z'',$$

de sorte que le temps total de l'oscillation de D en E sera $T' + T''$.

Si l'on a $C = (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2$, il s'ensuivra $k' = \frac{a\sqrt{A}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$, $\nu = \sqrt{\frac{A}{B}}$ et $\varkappa = 1$; d'où il suit que T'' sera infini. Ainsi le corps qui a une vitesse infinie en F, mettra cependant un temps infini à parcourir l'espace FE.

Pour expliquer ce paradoxe, il faut considérer que la vitesse devient tout-à-coup finie, à une très petite distance de F; qu'ensuite cette vitesse diminue progressivement, à mesure que le corps s'approche du point E, et qu'à une petite distance de E elle est proportionnelle à l'espace qui reste à parcourir; d'où il suit qu'il faut un temps infini pour que le corps arrive au point E. Parvenu à ce point, il sera également attiré des deux côtés par les forces A et B, et restera en repos.

569. Si l'on a $C < (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2$, le corps éprouvera un *minimum* de vitesse en un point de l'espace FG; mais ensuite la vitesse augmentera et deviendra infinie au point G.

Pour avoir le temps du mouvement, soit $x = a \sin^2 \psi$, on aura

$$\frac{dt}{a\sqrt{2a}} = \frac{d\psi \sin^2\psi \cos^2\psi}{\sqrt{(A\cos^4\psi + B\sin^4\psi - C\sin^2\psi\cos^2\psi)}},$$

et cette formule devra être intégrée depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = \frac{1}{2}\pi$, pour donner le temps T″ employé à parcourir FG.

Il faut observer avant tout que la quantité P sous le radical étant mise sous la forme

$$P = A\cos^4\psi + (A + B - C)\sin^2\psi\cos^2\psi + B\sin^4\psi,$$

offre deux cas à distinguer, selon que C est plus grand ou plus petit que $(\sqrt{A} - \sqrt{B})^2$ parce que les deux facteurs de cette quantité seront imaginaires dans le premier cas, et réels dans l'autre.

570. Soit, 1°. $C > (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2$, on pourra faire

$$P = A(\cos^4\psi + 2\alpha\cos\theta\cos^2\psi\sin^2\psi + \alpha^2\sin^4\psi),$$

ce qui donnera

$$\alpha = \sqrt{\frac{B}{A}}, \qquad \cos\theta = \frac{A + B - C}{2\sqrt{AB}};$$

et comme dans ce cas, C est compris entre les limites $(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2$, $(\sqrt{A} - \sqrt{B})^2$, on voit que $\cos\theta$ sera toujours compris entre les limites $+1$ et -1, et qu'ainsi θ sera réel. Cela posé, soit $\tang\psi = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tang\frac{1}{2}\zeta$, $\varkappa = \sin\frac{1}{2}\theta$, $m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$, on aura

$$t = \frac{a\sqrt{2a\alpha}}{2\sqrt{A}} \cdot \int \frac{\left(\frac{1-m}{2}\right)^2 d\zeta \sin^2\zeta}{(1 + m\cos\zeta)^2\sqrt{(1 - \varkappa^2\sin^2\zeta)}}.$$

Cette intégrale doit être prise depuis $\zeta = 0$ jusqu'à $\zeta = \pi$, afin d'avoir le

temps entier T″ employé à parcourir FG; et comme on a

$$\frac{1}{(1+m\cos\zeta)^2}+\frac{1}{(1-m\cos\zeta)^2}=\frac{2(1+m^2\cos^2\zeta)}{(1-m^2\cos^2\zeta)^2},$$

si l'on fait $\nu=\frac{m^2}{1-m^2}=\frac{(\alpha-1)^2}{4\alpha}$, il suffira de prendre depuis $\zeta=0$ jusqu'à $\zeta=\frac{1}{2}\pi$, l'intégrale $Z''=\int\frac{(1+2\nu-\nu\sin^2\zeta)\,d\zeta\sin^2\zeta}{(1+\nu\sin^2\zeta)^2\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}$, et on aura le temps cherché

$$T''=\sqrt{\left(\frac{a^3}{2\sqrt{AB}}\right)}\cdot\frac{1}{2}Z''.$$

Voyez ci-dessus, n° 443, les formules qui servent à trouver l'intégrale Z″ représentée par U^1.

571. Soit, 2°. $C<(\sqrt{A}-\sqrt{B})^2$, on pourra faire

$$P=A(\cos^2\psi+\alpha\sin^2\psi)(\cos^2\psi+\alpha'\sin^2\psi),$$

α et α' étant des quantités réelles et positives données par les équations

$$\alpha+\alpha'=\frac{A+B-C}{A},\qquad \alpha\alpha'=\frac{B}{A}.$$

Soit $\alpha>\alpha'$, $\tang\psi=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tang\zeta$, $\varkappa^2=1-\frac{\alpha'}{\alpha}$, $\nu=\frac{1}{\alpha}-1$, on aura

$$t=\frac{a\sqrt{2a}}{\alpha\sqrt{(A\alpha)}}\cdot\int\frac{d\zeta\sin^2\zeta\cos^2\zeta}{(1+\nu\sin^2\zeta)^2\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}.$$

Ainsi prenant l'intégrale $Z''=\int\frac{d\zeta\cos^2\zeta\sin^2\zeta}{(1+\nu\sin^2\zeta)^2\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}$ depuis $\zeta=0$ jusqu'à $\zeta=\frac{1}{2}\pi$, on aura le temps cherché

$$T''=\frac{a\sqrt{2a}}{\alpha\sqrt{(A\alpha)}}\cdot Z''.$$

572. Un cas qui tient le milieu entre les deux précédens, est celui où l'on aurait $C=(\sqrt{A}-\sqrt{B})^2$; alors $P=A(\cos^2\psi+\alpha\sin^2\psi)^2$ et $\alpha=\sqrt{\frac{B}{A}}$, ce qui donne directement

$$t=\frac{a\sqrt{2a}}{\sqrt{A}}\int\frac{d\psi\sin^2\psi\cos^2\psi}{\cos^2\psi+\alpha\sin^2\psi};$$

intégrant dans les limites requises, on aura

$$T''=\frac{a\sqrt{2a}}{\sqrt{A}}\cdot\frac{\pi}{4(\sqrt{\alpha}+1)^2}.$$

573. Dans les trois cas qui précèdent, le corps continue son mouvement au-delà du point G jusqu'à une distance $GD'=k'$, que nous avons déter-

minée n° 566. Quant au temps T''' employé à parcourir cette troisième partie de l'oscillation, il se détermine par la même formule qui a servi à déterminer le temps T' de la première partie; il suffit pour cela de changer dans cette formule les quantités A, B, k en B, A, k', respectivement. Ainsi les différens cas du mouvement rectiligne d'un corps attiré vers deux centres fixes sont résolus d'une manière générale, toutes les fois que la vitesse initiale est telle, que le corps ne peut s'éloigner à l'infini, ce qui réduit son mouvement à un simple mouvement d'oscillation.

574. Les formules précédentes supposent les forces A et B attractives; mais il serait facile d'en trouver de semblables pour le cas où ces forces seraient l'une attractive, l'autre répulsive, ou toutes les deux répulsives, ce qui pourrait alors s'appliquer à quelques phénomènes d'électricité ou de magnétisme.

Pour en montrer un exemple, supposons que les deux forces A et B, situées aux centres F et G, soient répulsives, il y aura sur la droite FG un point I déterminé par le rapport $\frac{FI}{GI} = \sqrt{\frac{A}{B}}$, où un corps placé sans vitesse initiale, resterait en repos. Mais si l'on place ce corps en tout autre point, par exemple en D, l'action prépondérante de la force A fera mouvoir le corps dans le sens DG; par ce mouvement il dépassera le point I, mais il ne pourra s'approcher du centre G que jusqu'à un certain point E, où sa vitesse sera de nouveau anéantie. Du point E le corps reviendra vers D, et ainsi alternativement. Fig. 33.

575. Pour déterminer le temps de chaque oscillation, soit M le lieu du corps au bout du temps t, et soit $FG = a$, $FD = a\sin^2\alpha$, $FM = x = a\sin^2\varphi$, $FE = a\sin^2\beta$, on aura d'abord l'équation différentielle

$$\frac{ddx}{dt^2} = \frac{A}{x^2} - \frac{B}{(a-x)^2},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{dx^2}{2dt^2} = \frac{C}{a} - \frac{A}{x} - \frac{B}{a-x};$$

et parce que la vitesse est nulle au point D, on aura $C = \frac{A}{\sin^2\alpha} + \frac{B}{\cos^2\alpha}$. Mettant au lieu de x sa valeur $a\sin^2\varphi$, on tirera de cette équation, après avoir substitué la valeur de C,

$$\frac{dt}{a\sqrt{2a}} = \frac{d\varphi \sin^2\varphi \cos^2\varphi}{\sqrt{(\sin^2\varphi - \sin^2\alpha)} \cdot \sqrt{\left(\frac{A\cos^2\varphi}{\sin^2\alpha} - \frac{B\sin^2\varphi}{\cos^2\alpha}\right)}}.$$

Le point E, limite de l'oscillation, se déterminera en faisant à la fois $\varphi = \beta$ et $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, ce qui donnera

$$\tang \alpha \tang \beta = \sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)};$$

c'est la relation entre les deux angles α et β qui détermine la limite de chaque oscillation; ils seraient complémens l'un de l'autre si l'on avait $A = B$.

576. L'équation précédente peut être mise sous la forme

$$\frac{dt\sqrt{A}}{a\sqrt{2a}} = \sin\alpha \sin\beta . \frac{d\varphi \sin^2\varphi \cos^2\varphi}{\sqrt{(\sin^2\varphi - \sin^2\alpha)} . \sqrt{(\sin^2\beta - \sin^2\varphi)}}.$$

Ainsi en faisant $Z' = \int \frac{d\varphi \sin^2\varphi \cos^2\varphi}{\sqrt{(\sin^2\varphi - \sin^2\alpha)} . \sqrt{(\sin^2\beta - \sin^2\varphi)}}$, et prenant cette intégrale depuis $\varphi = \alpha$ jusqu'à $\varphi = \beta$, on aura le temps T d'une oscillation par la formule

$$T = \frac{a\sqrt{2a}}{\sqrt{A}} . Z' \sin\alpha \sin\beta.$$

L'intégrale Z' peut se trouver au moyen des formules de la case VI, p. 312.

577. Dans le cas de $A = B$, qui donne $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, et où il faut supposer $\alpha < \frac{1}{4}\pi$, les formules se simplifient par la substitution $\sin^2\varphi = \sin^2\alpha \cos^2\psi + \cos^2\alpha \sin^2\psi$, il en résulte

$$Z = \int d\psi \sqrt{[(\sin^2\alpha \cos^2\psi + \cos^2\alpha \sin^2\psi)(\cos^2\alpha \cos^2\psi + \sin^2\alpha \sin^2\psi)]};$$

soit de plus $\tang\psi = \tang\alpha \tang\zeta$, et on aura, en faisant $c^2 = 1 - \tang^4\alpha$, $b = \tang^2\alpha$,

$$Z = \sin^2\alpha \int \frac{d\zeta \sqrt{(1 - c^2 \sin^2\zeta)}}{[1 - (1 - b)\sin^2\zeta]^2}.$$

Pour simplifier encore cette intégrale, nous ferons usage des formules de l'art. 63, suivant lesquelles on aura

$$c^0 = \frac{1-b}{1+b} = \cos 2\alpha,\ \Delta = \sqrt{(1 - c^2 \sin^2\zeta)},\ \Delta^0 = \sqrt{(1 - c^{02} \sin^2\zeta^0)},$$

$$\tang(\zeta^0 - \zeta) = b \tang\zeta,\ \frac{d\zeta}{\Delta} = \frac{1 + c^0}{2} . \frac{d\zeta^0}{\Delta^0},\ 1 - (1 - b)\sin^2\zeta = \Delta\Delta^0.$$

Par ces substitutions, on trouve

$$dZ = \sin^2\alpha \cos^2\alpha . \frac{d\zeta^0}{\Delta^{03}} = \frac{1}{4} b^{02} . \frac{d\zeta^0}{\Delta^{03}};$$

donc par les formules du n° 207, on a

$$Z = \tfrac{1}{4} E(c^0, \zeta^0) - \tfrac{1}{4} \cdot \frac{c^{0*} \sin\zeta^0 \cos\zeta^0}{\Delta^0}.$$

Faisant $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, et par conséquent $\zeta^0 = \pi$, on aura l'intégrale $Z^1 = \frac{1}{2} E^1 c^0$, qui donne pour le temps de l'oscillation cette expression très simple

$$T = \sqrt{\left(\frac{a^3}{2A}\right)} \cdot \tfrac{1}{2} b^0 E^1(c^0),$$

où il faut se rappeler qu'on a $c^0 = \cos 2\alpha$ et $b^0 = \sin 2\alpha$.

Lorsque α diffère peu de $\frac{1}{4}\pi$, les oscillations sont très petites; alors on a $c^0 = 0$, $b^0 = 1$, $E^1(c^0) = \frac{1}{2}\pi$; donc $T = \frac{\pi}{4}\sqrt{\left(\frac{a^3}{2A}\right)}$.

SECTION III.

Sur l'attraction des ellipsoïdes homogènes.

578. Nous donnons ici la théorie de l'attraction des ellipsoïdes homogènes, considérablement simplifiée par M. Ivory, et telle que nous l'avons déjà publiée dans les Mémoires de l'Institut, an 1812. Les formules de l'attraction, qui, dans les cas ordinaires, sont développées en séries infinies, s'expriment toujours exactement par des fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce; elles offrent ainsi une application importante de ces fonctions, soit pour conduire a des théorèmes nouveaux sur l'attraction des ellipsoïdes, soit pour faire connaître, avec tel degré d'exactitude qu'on voudra, les valeurs des forces, dans les cas, rares à la vérité, où elles ne pourraient être exprimées par des séries suffisamment convergentes.

Formules pour la solution générale du problème.

579. Soient f, g, h, les trois coordonnées du point attiré S, soient x, y, z celles d'une molécule quelconque dM du corps attirant, et r sa distance au point S, en sorte qu'on ait

$$r^2 = (f - x)^2 + (g - y)^2 + (h - z)^2.$$

L'attraction que la molécule dM exerce sur le point S est exprimée par $\frac{dM}{r^2}$; elle se décompose en trois forces parallèles aux axes des coordonnées, lesquelles sont

$$\frac{(f-x)\,dM}{r^3},\ \frac{(g-y)\,dM}{r^3},\ \frac{(h-z)\,dM}{r^3};$$

si donc on désigne par A, B, C, les attractions totales exercées dans le sens des coordonnées x, y, z, respectivement, on aura

$$A=\int\frac{f-x}{r^3}\,dM,$$
$$B=\int\frac{g-y}{r^3}\,dM,$$
$$C=\int\frac{h-z}{r^3}\,dM,$$

ces intégrales étant étendues à toutes les molécules du corps attirant.

580. Supposons le corps homogène, et soit sa densité $=1$, on pourra faire $dM=dxdydz$, et alors on aura

$$A=\iiint\frac{f-x}{r^3}\,dxdydz;$$

les deux autres forces seront semblablement exprimées; mais il suffira de nous occuper de la force A.

Il est facile d'abord d'exécuter l'intégration par rapport à x; car, puisqu'en regardant x seule comme variable, on a $rdr=-(f-x)dx$, il s'ensuit qu'on a $\int\frac{f-x}{r^3}\,dx=\int-\frac{dr}{r^2}=\frac{1}{r}+$ const. Soient donc r_0 et r_1 les deux valeurs de r qui répondent aux deux limites de l'intégrale, c'est-à-dire aux deux points de la surface du solide qui sont situés sur une même parallèle à l'axe des x, on aura

$$A=\iint dydz\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_0}\right).$$

581. Supposons que le corps attirant soit un ellipsoïde dont la surface ait pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1;$$

il faudra tirer la valeur de x de cette équation, puis la substituer dans les valeurs de r_0 et r_1, lesquelles sont

$$r_0=\sqrt{[(f+x)^2+(g-y)^2+(h-z)^2]},$$
$$r'=\sqrt{[(f-x)^2+(g-y)^2+(h-z)^2]};$$

alors il ne s'agira plus que d'exécuter les deux intégrations par rapport à y et à z, dans toute l'étendue de l'ellipsoïde. Mais ces intégrations ne peuvent être effectuées, ni l'une ni l'autre, par les méthodes connues, et il faut recourir à d'autres moyens, pour achever la solution du problème, ou du moins pour la ramener aux simples quadratures.

Comparaison des forces exercées dans le même sens par deux ellipsoïdes, dont l'un agit sur un point extérieur, et l'autre sur un point intérieur correspondant.

582. Jusqu'ici nous n'avons fait aucune hypothèse sur la position du point S. Il convient maintenant de distinguer deux cas; celui où le point attiré S est situé dans l'intérieur ou sur la surface de l'ellipsoïde M, et celui où il est situé hors de cet ellipsoïde. Le premier cas suppose qu'on a $\frac{f^2}{\alpha^2}+\frac{g^2}{\beta^2}+\frac{h^2}{\gamma^2}<$ ou $=1$; et le second qu'on a $\frac{f^2}{\alpha^2}+\frac{g^2}{\beta^2}+\frac{h^2}{\gamma^2}>1$. Ce dernier cas étant le plus difficile, on aura fait un grand pas vers la solution du problème, si on parvient à le ramener au premier.

Pour cet effet, considérons un second ellipsoïde M′, dans lequel les quantités analogues à α, β, γ, x, y, z soient désignées par les mêmes lettres accentuées; supposons que cet ellipsoïde, dont la densité est encore $=1$, exerce son attraction sur un nouveau point S′ déterminé par les trois coordonnées f', g', h'. Ces deux ellipsoïdes sont d'ailleurs concentriques, et les axes désignés semblablement ont la même direction.

Si l'on désigne par ρ_1 et ρ_0 les quantités analogues à r_1 et r_0, on aura semblablement

$$A'=\iint dy'dz'\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_0}\right);$$

A′ étant l'attraction exercée dans le sens des x, sur le point S′, par l'ellipsoïde M′.

583. Faisons maintenant ensorte que les quantités ρ_1 et r_1 soient égales dans les deux solides, il s'ensuivra que ρ_0 et r_0 doivent être aussi égales entre elles, et cette circonstance permettra de trouver, d'une manière très simple, le rapport des quantités A et A′.

Puisque nous avons à la fois

$$r_1=\sqrt{[(f-x)^2+(g-y)^2+(h-z)^2]},$$
$$\rho_1=\sqrt{[(f'-x')^2+(g'-y')^2+(h'-z')^2]},$$

pour rendre ces expressions identiques, faisons d'abord

$$fx = f'x',\ gy = g'y',\ hz = h'z',$$

ou, ce qui revient au même, prenons trois indéterminées λ, μ, ν, au moyen desquelles on ait simultanément,

$$f = \lambda f',\ g = \mu g',\ h = \nu h',$$
$$x' = \lambda x,\ y' = \mu y,\ z' = \nu z,$$

les trois conditions dont il s'agit seront satisfaites, et il restera à satisfaire à l'équation

$$f^2 + g^2 + h^2 + x^2 + y^2 + z^2 = f'^2 + g'^2 + h'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Substituant dans celle-ci les valeurs de f', g', h', en f, g, h, et celles de x', y', z', en x, y, z, ou aura l'équation

$$(\lambda^2-1)x^2+(\mu^2-1)y^2+(\nu^2-1)z^2=\frac{f^2}{\lambda^2}(\lambda^2-1)+\frac{g^2}{\mu^2}(\mu^2-1)+\frac{h^2}{\nu^2}(\nu^2-1);$$

laquelle doit s'accorder avec l'équation de l'ellipsoïde donné $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$. Pour cela soit $\lambda^2-1=\frac{\xi}{a^2}$, il faudra qu'on ait $\mu^2-1=\frac{\xi}{c^2}$, $\nu^2-1=\frac{\xi}{\gamma^2}$, et on aura, pour déterminer ξ, l'équation

$$\frac{f^2}{a^2+\xi}+\frac{g^2}{c^2+\xi}+\frac{h^2}{\gamma^2+\xi}=1. \qquad (a)$$

Nous avons supposé que le point attiré S était situé hors de l'ellipsoïde M, et qu'ainsi on a $\frac{f^2}{a^2}+\frac{g^2}{c^2}+\frac{h^2}{\gamma^2}>1$; de là on voit qu'en faisant successivement $\xi=0$ et $\xi=\infty$, dans la fonction qui forme le premier membre de l'équation (a), cette fonction devient >1 dans le premier cas, et $=0$ dans le second cas. Donc il y a une valeur réelle et positive de ξ qui satisfait à l'équation (a); et comme d'ailleurs le premier membre décroît continuellement à mesure que ξ augmente, depuis $\xi=0$ jusqu'à $\xi=\infty$, il s'ensuit que cette équation n'a qu'une racine réelle.

584. Connaissant la valeur de ξ, on aura celles de λ, μ, ν, par les équations $\lambda^2=1+\frac{\xi}{a^2}$, $\mu^2=1+\frac{\xi}{c^2}$, $\nu^2=1+\frac{\xi}{\gamma^2}$; ensuite le point S' sera déterminé par les coordonnées.

$$f'=\frac{f}{\lambda},\quad g'=\frac{g}{\mu},\quad h'=\frac{h}{\nu}.$$

De plus, puisqu'on a $x=\frac{x'}{\lambda}$, $y=\frac{y'}{\mu}$, $z=\frac{z'}{\nu}$; si l'on substitue ces valeurs

dans l'équation de l'ellipsoïde donné M, on aura

$$\frac{x'^2}{\lambda^2\alpha^2}+\frac{y'^2}{\mu^2\beta^2}+\frac{z'^2}{\nu^2\gamma^2}=1;$$

c'est l'équation du second ellipsoïde M', dont les demi-axes sont α', β', γ'; on aura donc

$$\alpha'=\alpha\lambda,\quad \beta'=\beta\mu,\quad \gamma'=\gamma\nu.$$

De ces équations on tire

$$\alpha'^2-\alpha^2=\xi,\quad \beta'^2-\beta^2=\xi,\quad \gamma'^2-\gamma^2=\xi;$$

donc on a aussi

$$\alpha'^2-\beta'^2=\alpha^2-\beta^2,\quad \beta'^2-\gamma'^2=\beta^2-\gamma^2,\quad \gamma'^2-\alpha'^2=\gamma^2-\alpha^2;$$

d'où l'on voit que les deux ellipsoïdes dont il s'agit se correspondent de telle sorte, que les sections principales situées dans le même plan sont décrites des mêmes foyers.

Remarquons maintenant que puisqu'on a $\alpha'^2=\alpha^2+\xi$, $\beta'^2=\beta^2+\xi$, $\gamma'^2=\gamma^2+\xi$, l'équation (a) donne

$$\frac{f^2}{\alpha'^2}+\frac{g^2}{\beta'^2}+\frac{h^2}{\gamma'^2}=1,$$

et qu'ainsi le point S, dont les coordonnées sont f, g, h, est situé sur la surface de l'ellipsoïde M'.

Réciproquement, puisqu'on a aussi l'équation

$$\frac{f'^2}{\alpha^2}+\frac{g'^2}{\beta^2}+\frac{h'^2}{\gamma^2}=1,$$

il s'ensuit que le point S', dont les coordonnées sont f', g', h', est situé sur la surface de l'ellipsoïde M.

Ces deux points S et S' se correspondent mutuellement de telle sorte qu'on a

$$f:f'::\alpha':\alpha,\quad g:g'::\beta':\beta,\quad h:h'::\gamma':\gamma,$$

c'est-à-dire que les coordonnées homologues, ou parallèles à un même axe, divisent proportionnellement les axes sur lesquels elles sont situées.

585. Ayant fait voir qu'on a généralement $\rho_1=r_1$, et par une suite nécessaire $\rho_0=r_0$; si l'on observe d'ailleurs que les équations $y'=\mu y$, $z'=\nu z$ donnent $dy'=\mu dy$, $dz'=\nu dz$, et par conséquent $dy'dz'=\mu\nu dydz=\frac{\beta'\gamma'}{\beta\gamma}dydz$, on en conclura que les forces A et A' sont ainsi exprimées,

$$A = \iint dy\,dz \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right),$$
$$A' = \frac{\beta'\gamma'}{\beta\gamma} \iint dy\,dz \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right);$$

et comme ces intégrales sont prises de part et d'autre entre les mêmes limites, il s'ensuit qu'on a

$$A : A' :: \beta\gamma : \beta'\gamma',$$

c'est-à-dire que les attractions A et A', dans le sens des demi-axes α et α' sont entre elles comme les produits $\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$ des deux autres demi-axes.

On aurait donc semblablement

$$B : B' :: \alpha\gamma : \alpha'\gamma',$$
$$C : C' :: \alpha\beta : \alpha'\beta'.$$

Ainsi étant proposé de déterminer l'attraction d'un ellipsoïde M sur un point S situé hors de ce solide, on imaginera un second ellipsoïde M', dont la surface passe par le point donné S, et dont les sections principales soient situées dans les mêmes plans et décrites des mêmes foyers que les sections correspondantes de l'ellipsoïde donné, conditions qui suffisent pour déterminer entièrement la grandeur et la position des axes α', β', γ' du second ellipsoïde; on prendra ensuite sur la surface de l'ellipsoïde donné M un point S', de manière que chaque coordonnée du point S' soit à la coordonnée correspondante du point S, dans le même rapport que les demi-axes des ellipsoïdes M et M', situés dans la direction de ces coordonnées. Cela posé, si on désigne par A', B', C' les trois forces parallèles aux axes des coordonnées qui résultent de l'attraction de l'ellipsoïde M' sur le point intérieur S', et par A, B, C les forces exercées semblablement par l'ellipsoïde M sur le point extérieur S, on aura, d'après ce que nous avons démontré,

$$A = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'} A', \quad B = \frac{\alpha\gamma}{\alpha'\gamma'} B', \quad C = \frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'} C'.$$

On voit donc que le second cas du problème général, regardé jusqu'à présent comme sujet à de grandes difficultés, se ramène immédiatement au premier cas, où il s'agit de déterminer l'attraction d'un ellipsoïde donné sur un point intérieur quelconque : or on sait que ce premier cas a été résolu il y a long-temps avec beaucoup de simplicité et d'élégance, et il ne nous reste qu'à exposer cette solution pour compléter entièrement la théorie de l'attraction des ellipsoïdes homogènes.

Solution du cas où le point attiré est situé dans l'intérieur de l'ellipsoïde ou à sa surface.

586. Soit toujours M l'ellipsoïde donné, dont la surface a pour équation

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1,$$

et soit S le point attiré, dont les coordonnées sont f, g, h; ce point est maintenant situé dans l'intérieur de l'ellipsoïde, de sorte qu'on a

$$\frac{f^2}{\alpha^2}+\frac{g^2}{\beta^2}+\frac{h^2}{\gamma^2}<1.$$

Soit dM une molécule quelconque du corps attirant, le lieu de cette molécule sera déterminé en général par les trois coordonnées rectangles x, y, z, prises dans le sens des demi-axes α, β, γ; mais il convient d'exprimer ces coordonnées par d'autres variables.

Soit R la distance de la molécule au point S; soit p l'angle que fait la droite R avec la parallèle à l'axe des x, menée par le point S; soit enfin q l'angle que fait le plan de ces deux droites avec le plan des x, y. Si l'origine des coordonnées était au point S, le lieu de la molécule dM serait déterminé par les valeurs $x=\mathrm{R}\cos p$, $y=\mathrm{R}\sin p\cos q$, $z=\mathrm{R}\sin p\sin q$; mais comme on doit supposer que l'origine des coordonnées est placée au centre de l'ellipsoïde, on aura

$$\begin{aligned} x&=f+\mathrm{R}\cos p,\\ y&=g+\mathrm{R}\sin p\cos q,\\ z&=h+\mathrm{R}\sin p\sin q. \end{aligned}$$

Concevons maintenant que la molécule dM prenne la forme d'un parallélepipède rectangle dont les côtés relatifs aux variations des quantités R, p, q, sont dR, Rdp, R$dq\sin p$; puisqu'on suppose la densité $=1$, on pourra faire $d\mathrm{M}=\mathrm{R}^2 d\mathrm{R}\,dp\,dq\sin p$. Donc, l'attraction de la molécule dM sur le point S sera exprimée par $d\mathrm{R}\,dp\,dq\sin p$; et les trois forces qui en résultent, suivant les axes des x, des y et des z, seront respectivement $d\mathrm{R}\,dp\,dq\sin p\cos p$, $d\mathrm{R}\,dp\,dq\sin^2 p\cos q$, $d\mathrm{R}\,dp\,dq\sin^2 p\sin q$; si donc on désigne, comme ci-dessus, par A, B, C, les attractions totales parallèlement à ces axes, on aura

$$\begin{aligned} \mathrm{A}&=\iiint d\mathrm{R}\,dp\,dq\sin p\cos p,\\ \mathrm{B}&=\iiint d\mathrm{R}\,dp\,dq\sin^2 p\cos q,\\ \mathrm{C}&=\iiint d\mathrm{R}\,dp\,dq\sin^2 p\sin q, \end{aligned}$$

ces intégrales étant étendues à toutes les molécules du corps attirant.

58). Considérons d'abord la valeur de A : si on effectue l'intégration par rapport à R, et qu'on appelle R′ et R″ les deux valeurs de R qui répondent aux deux points de la surface du solide, situés sur la droite déterminée par les deux angles p et q, on aura

$$A = \iint (R' - R'')\, dp\, dq \sin p \cos p.$$

Dans cette formule, $R' dp dq \sin p \cos p$ représente l'attraction dans le sens des x, de la pyramide infiniment aiguë qui a pour longueur R′, et pour base, perpendiculaire à R′, l'élément $R'^2 dp dq \sin p$; de même $R'' dp dq \sin p \cos p$ représente l'attraction dans le sens des x, de la pyramide opposée à la précédente. Ces deux pyramides, terminées l'une et l'autre à la surface du solide, attirent évidemment le point S en sens contraires; ainsi nous avons dû prendre la différence des deux forces qu'elles exercent sur ce point.

Maintenant, si dans l'équation de la surface $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$, on substitue pour x, y, z, leurs valeurs en fonctions de R, p, q, on aura l'équation

$$\delta R^2 + 2\varepsilon R - \zeta = 0,$$

dans laquelle on a fait, pour abréger,

$$\delta = \cos^2 p + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \sin^2 p \cos^2 q + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \sin^2 p \sin^2 q,$$

$$\varepsilon = f \cos p + \frac{\alpha^2}{\beta^2} g \sin p \cos q + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} h \sin p \sin q,$$

$$\zeta = \alpha^2 - f^2 - \frac{\alpha^4}{\beta^2} g^2 - \frac{\alpha^4}{\gamma^2} h^2.$$

Les deux valeurs de R que donne cette équation ont été désignées par R et $-R''$; on aura donc

$$R' = \frac{-\varepsilon + \sqrt{(\varepsilon^2 + \delta\zeta)}}{\delta},$$

$$R'' = \frac{\varepsilon + \sqrt{(\varepsilon^2 + \delta\zeta)}}{\delta},$$

d'où résulte $R' - R'' = -\frac{2\varepsilon}{\delta}$. Substituant cette valeur dans l'expression de A, et faisant abstraction du signe dont toute l'expression est affectée, on aura

$$A = \iint \frac{2\varepsilon}{\delta}\, dp\, dq \sin p \cos p;$$

intégrale qui doit être prise depuis $p = 0$ jusqu'à $p = \pi$, et depuis $q = 0$ jusqu'à $q = \pi$.

588. Substituant d'abord la valeur de ε, on aura

$$A = 2f\iint \frac{dpdq \sin p \cos^2 p}{\delta} + \frac{2\alpha^2 g}{\beta^2}\iint \frac{dpdq \sin^2 p \cos p \cos q}{\delta} + \frac{2\alpha^2 h}{\gamma^2}\iint \frac{dpdq \sin^2 p \cos p \sin q}{\delta}.$$

or, j'observe que lorsque p devient $\varpi = \pi$, δ reste le même, mais qu'alors $\sin^2 p \cos p$ change de signe. Donc, puisque les intégrales doivent être prises depuis $p = 0$ jusqu'à $p = \varpi$, les deux dernières parties de la valeur de A se réduisent à zéro, et on a simplement

$$A = 2f\iint \frac{dpdq \sin p \cos^2 p}{\cos^2 p + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\sin^2 p \cos^2 q + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\sin^2 p \sin^2 q}.$$

Par des considérations semblables on trouverait que les valeurs des forces B et C s'expriment ainsi :

$$B = \frac{2\alpha^2 g}{\beta^2}\iint \frac{dpdq \sin^3 p \cos^2 q}{\cos^2 p + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\sin^2 p \cos^2 q + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\sin^2 p \sin^2 q},$$

$$C = \frac{2\alpha^2 h}{\gamma^2}\iint \frac{dpdq \sin^3 p \sin^2 q}{\cos^2 p + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\sin^2 p \cos^2 q + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\sin^2 p \sin^2 q}.$$

589. Maintenant, sans effectuer les deux intégrations par rapport à p et à q, on voit qu'en faisant $A = 2fX$, la quantité X ne dépendra que des rapports $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$, $\frac{\alpha^2}{\gamma^2}$. Donc le point S sera attiré également dans le sens des x, par tous les ellipsoïdes semblables et situés semblablement, qui enveloppent le point S. Il en sera de même de l'attraction dans le sens des y et de l'attraction dans le sens des z; d'où il suit que tous ces ellipsoïdes exerceront la même attraction absolue sur le point S situé dans leur intérieur.

Ce résultat ne peut avoir lieu, à moins que la couche solide comprise entre deux quelconques des ellipsoïdes qui environnent le point S, n'exerce aucune attraction sur ce point. Et c'est ce qu'on démontre aisément par une construction fondée sur les propriétés des surfaces du second ordre.

590. La valeur $A = 2fX$, où X ne dépend que des deux quantités $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$, $\frac{\alpha^2}{\gamma^2}$, prouve encore que tous les points situés dans un même plan perpendiculaire à l'axe des x, sont également attirés par l'ellipsoïde dans le sens de cet axe, et qu'en général l'attraction parallèle à un axe, pour un point

quelconque, est proportionnelle à la coordonnée de ce point parallèle au même axe.

Soient donc A_1, B_1, C_1 les attractions exercées par l'ellipsoïde M sur les points situés aux extrémités des demi-axes α, β, γ; les attractions exercées dans le sens des mêmes axes sur le point S, auront pour valeurs

$$A = \frac{f}{\alpha} A_1, \quad B = \frac{g}{\beta} B_1, \quad C = \frac{h}{\gamma} C_1.$$

Toutes ces propriétés ont été démontrées, il y a long-temps, par Maclaurin; mais on voit qu'elles se déduisent très simplement de nos formules avant même d'avoir effectué les intégrations.

591. Revenons à l'expression de A trouvée dans l'art. 588, et proposons-nous d'abord d'intégrer la différentielle

$$\frac{dq}{\cos^2 p + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\sin^2 p \cos^2 q + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\sin^2 p \sin^2 q},$$

depuis $q = 0$ jusqu'à $q = \pi$. On sait que dans ces limites on a la formule $\int \frac{dq}{m^2\cos^2 q + n^2 \sin^2 q} = \frac{\pi}{mn}$; ainsi nous aurons, pour l'intégrale dont il s'agit,

$$\frac{\pi}{\sqrt{(\cos^2 p + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\sin^2 p)} \cdot \sqrt{(\cos^2 p + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\sin^2 p)}},$$

et la valeur de A deviendra

$$A = 2f\pi \int \frac{dp \sin p \cos^2 p}{\sqrt{(\cos^2 p + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\sin^2 p)} \cdot \sqrt{(\cos^2 p + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\sin^2 p)}}.$$

Cette dernière intégrale doit être prise depuis $p = 0$ jusqu'à $p = \pi$, ce qui revient à la prendre depuis $p = 0$ jusqu'à $p = \frac{1}{2}\pi$, et à doubler le résultat. Soit donc $\cos p = x$, et on aura

$$A = 4\pi\beta\gamma f \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{[\alpha^2 + (\beta^2 - \alpha^2)x^2]} \cdot \sqrt{[\alpha^2 + (\gamma^2 - \alpha^2)x^2]}},$$

nouvelle intégrale qui doit être prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Si dans cette expression on introduit la masse M de l'ellipsoïde à la place de son volume $\frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma$, on aura

$$A = \frac{3Mf}{\alpha} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(\alpha^2 + \overline{\beta^2 - \alpha^2} \cdot x^2)} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \overline{\gamma^2 - \alpha^2} \cdot x^2)}}.$$

Il est clair qu'on déduira de cette expression les valeurs des forces B et C

par une simple permutation de lettres ; on aura ainsi

$$B = \frac{3Mg}{\beta}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(\beta^2+\overline{\gamma^2-\beta^2}.x^2)}.\sqrt{(\beta^2+\overline{\alpha^2-\beta^2}.x^2)}},$$

$$C = \frac{3Mh}{\gamma}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(\gamma^2+\overline{\alpha^2-\gamma^2}.x^2)}.\sqrt{(\gamma^2+\overline{\beta^2-\gamma^2}.x^2)}}.$$

J'observerai cependant que si on eût calculé directement les valeurs de B et C par les formules de l'art. 588, en intégrant d'abord par rapport à q, on aurait trouvé ces valeurs sous la forme suivante :

$$B = \frac{3Mg}{\alpha(\gamma^2-\beta^2)}\left(\frac{\gamma}{\beta}-\int\frac{dx\sqrt{(\alpha^2+\overline{\gamma^2-\alpha^2}.x^2)}}{\sqrt{(\alpha^2+\overline{\beta^2-\alpha^2}.x^2)}}\right),$$

$$C = \frac{3Mh}{\alpha(\gamma^2-\beta^2)}\left(-\frac{\beta}{\gamma}+\int\frac{dx\sqrt{(\alpha^2+\overline{\beta^2-\alpha^2}.x^2)}}{\sqrt{(\alpha^2+\overline{\gamma^2-\alpha^2}.x^2)}}\right);$$

mais d'ailleurs il est facile de s'assurer que ces diverses formules, où les intégrales doivent toujours être prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, s'accordent parfaitement entre elles.

592. Le problème étant ainsi réduit aux quadratures, on achèvera la solution dans les différens cas par les méthodes d'approximation connues.

Si l'ellipsoïde est peu différent d'une sphère, en sorte que les quantités $\alpha^2-\beta^2$, $\alpha^2-\gamma^2$ soient très petites par rapport à α^2, on fera $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2} = \mu$, $\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2} = \nu$, et on aura

$$A = \frac{3Mf}{\alpha^3}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-\mu x^2)}.\sqrt{(1-\nu x^2)}},$$

expression qu'il est facile de développer en suite convergente.

Pour cela, soit

$$(1-\mu x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-\nu x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + P'x^2 + P''x^4 + P'''x^6 + \text{etc.},$$

on aura

$$A = \frac{3Mf}{\alpha^3}\int x^2dx\,(1 + P'x^2 + P''x^4 + \text{etc.})$$

Effectuant l'intégration entre les limites $x = 0$, $x = 1$, il viendra

$$A = \frac{Mf}{\alpha^3}(1 + \tfrac{3}{5}P' + \tfrac{3}{7}P'' + \tfrac{3}{9}P''' + \text{etc.})$$

Quant aux valeurs des coefficiens P', P'', etc. elles sont :

$$P' = \frac{1}{2}(\mu + \nu),$$

$$P'' = \frac{1.3}{2.4}(\mu^2 + \nu^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\mu\nu,$$

$$P''' = \frac{1.3.5}{2.4.6}(\mu^3 + \nu^3) + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{2}\mu\nu(\mu + \nu),$$

$$P^{\text{IV}} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}(\mu^4 + \nu^4) + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{2}\mu\nu(\mu^2 + \nu^2) + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1.3}{2.4}\mu^2\nu^2,$$

etc.

La loi de ces expressions est facile à saisir; et on voit que si μ et ν sont, comme on le suppose, des quantités très petites, la suite qui donne la valeur de A sera très convergente. Des suites semblables exprimeront les attractions B et C dans le sens des deux autres axes.

593. Si l'on ne veut pas avoir recours aux séries, ou si les excentricités des sections principales de l'ellipsoïde sont trop grandes pour que les séries soient convergentes, alors il conviendra d'exprimer les attractions A, B, C, au moyen des fonctions elliptiques.

Pour cet effet, il faut établir un ordre de grandeur entre les demi-axes α, β, γ. Supposons que cet ordre est α, β, γ, ensorte qu'on ait $\alpha < \beta$ et $\beta < \gamma$; soit en conséquence $\beta^2 - \alpha^2 = m^2$ et $\gamma^2 - \alpha^2 = n^2$, on aura d'abord

$$A = \frac{3Mf}{\alpha}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(\alpha^2 + m^2x^2)} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + n^2x^2)}}.$$

Soit $x = \frac{\alpha}{n}\operatorname{tang}\varphi$ et $c^2 = 1 - \frac{m^2}{n^2}$, on aura la transformée

$$A = \frac{3Mf}{n^3}\int \frac{d\varphi \operatorname{tang}^2\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}},$$

intégrale qui devra être prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à la valeur de φ pour laquelle on a $\operatorname{tang}\varphi = \frac{n}{\alpha}$, $\sin\varphi = \frac{n}{\gamma}$, $\cos\varphi = \frac{\alpha}{\gamma}$.

De même, puisqu'on a

$$B = \frac{3Mg}{\beta}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(\beta^2 - m^2x^2)} \cdot \sqrt{[\beta^2 + (n^2 - m^2)x^2]}},$$

si l'on fait $x = \frac{\beta\sin\varphi}{n\sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}}$, on aura la transformée

$$B = \frac{3Mg}{n^3}\int \frac{d\varphi \sin^2\varphi}{(1 - c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

intégrale qui doit toujours être prise entre les mêmes limites.

Enfin, si dans la formule

$$C = \frac{3Mh}{\gamma}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(\gamma^2-n^2x^2)}\,\sqrt{(\gamma^2-m^2x^2)}},$$

on fait $x = \frac{\gamma\sin\varphi}{n}$, on aura

$$C = \frac{3Mh}{n^3}\cdot\int\frac{d\varphi\sin^2\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}},$$

intégrale qui doit encore être prise entre les mêmes limites que les précédentes.

594. De là on voit que si on fait $\Delta = \sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}$, et qu'on prenne les trois intégrales suivantes, depuis $\varphi = 0$ jusqu'à une valeur de $\varphi < \frac{1}{2}\pi$, telle que $\tang\varphi = \frac{n}{\alpha}$, $\sin\varphi = \frac{n}{\gamma}$, $\cos\varphi = \frac{\alpha}{\gamma}$,

$$X = \int\frac{d\varphi\tang^2\varphi}{\Delta},\quad Y = \int\frac{d\varphi\sin^2\varphi}{\Delta^3},\quad Z = \int\frac{d\varphi\sin^2\varphi}{\Delta},$$

les trois forces A, B, C seront ainsi exprimées:

$$A = \frac{3Mf}{n^3}X,\quad B = \frac{3Mg}{n^3}Y,\quad C = \frac{3Mh}{n^3}Z.$$

Les intégrales X, Y, Z se rapportent immédiatement aux fonctions elliptiques, et d'après les formules données art. 207, on trouve

$$X = \frac{1}{b^2}\left[\Delta\tang\varphi - E(c,\varphi)\right],$$

$$Y = \frac{1}{b^2c^2}\left[E(c,\varphi) - \frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right] - \frac{1}{c^2}F(c,\varphi),$$

$$Z = \frac{1}{c^2}\left[F(c,\varphi) - E(c,\varphi)\right],$$

formules où il faudra substituer la valeur de φ pour laquelle on a $\sin\varphi = \frac{n}{\gamma}$, $\cos\varphi = \frac{\alpha}{\gamma}$, $\Delta = \frac{c}{\gamma}$.

Nous avons donné des méthodes pour évaluer, avec toute la précision nécessaire, les fonctions E et F, quels que soient le module c et l'amplitude φ; ainsi nous n'avons rien à ajouter sur la détermination absolue des quantités A, B, C.

595. Mais comme les deux fonctions E et F suffisent pour exprimer les trois quantités X, Y, Z, on voit qu'il est possible d'éliminer ces deux transcendantes, et qu'on obtiendra par ce moyen une équation algébrique entre X, Y, Z; cette équation est

$$X + Y + Z = \frac{\sin^3\varphi}{\Delta\cos\varphi} = \frac{n^3}{\alpha\beta\gamma}.$$

On a donc aussi entre les forces A, B, C, cette équation algébrique

$$\frac{A}{f} + \frac{B}{g} + \frac{C}{h} = \frac{3M}{\alpha\beta\gamma} = 4\pi;$$

équation qui ne paraît pas avoir été remarquée jusqu'à présent, et qui doit être regardée comme un théorème nouveau.

Au surplus, ce théorème se déduirait immédiatement des expressions en doubles intégrales de l'art. 588, lesquelles donnent

$$\frac{A}{f} + \frac{B}{g} + \frac{C}{h} = \iint dp\,dq \sin p = 2\pi \int dp \sin p = 4\pi.$$

On peut encore déduire des formules de l'art. 594 cette équation

$$\alpha^2 X + \beta^2 Y + \gamma^2 Z = n^2 F(c, \varphi),$$

d'où résulte

$$\frac{A\alpha^2}{f} + \frac{B\beta^2}{g} + \frac{C\gamma^2}{h} = \frac{3M}{n} F(c, \varphi),$$

équation digne de remarque, parce que la fonction F est la plus simple des fonctions elliptiques.

596. Les formules de l'attraction se simplifient beaucoup lorsque l'ellipsoïde a deux axes égaux, ou lorsqu'il devient un solide de révolution, ce qui offre deux cas à distinguer.

Premier cas. S'il s'agit d'un sphéroïde aplati, on aura $\beta = \gamma$, $m = n = \sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)}$, $c = 0$, $\Delta = 1$, et les formules de l'art. 594 deviendront

$$X = \int d\varphi \tang^2 \varphi = \tang \varphi - \varphi,$$
$$Y = Z = \int d\varphi \sin^2 \varphi = \tfrac{1}{2}(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi);$$

donc en faisant $\varphi = \theta$, θ étant le plus petit arc qui satisfait à l'équation $\tang\theta = \frac{n}{\alpha}$, on aura

$$A = \frac{3Mf}{n^3}(\tang\theta - \theta),$$
$$B = \frac{3Mg}{2n^3}(\theta - \sin\theta\cos\theta),$$
$$C = \frac{3Mh}{2n^3}(\theta - \sin\theta\cos\theta).$$

Dans ce cas on peut, sans rien diminuer de la généralité de la solution, faire $h = 0$, et par conséquent $C = 0$, car on peut prendre pour plan des x et y le méridien qui passe par le point attiré.

Second cas. S'il s'agit du sphéroïde alongé, on aura $\beta = \alpha$, $c = 1$, $\Delta = \cos\varphi$, ce qui donne

$$X = Y = \int \frac{d\varphi \sin^2\varphi}{\cos^3\varphi}, \quad Z = \int \frac{d\varphi \sin^2\varphi}{\cos\varphi} :$$

effectuant les intégrations depuis $\varphi = 0$, jusqu'à $\varphi = \theta$, et supposant toujours $\tang\theta = \frac{n}{\alpha}$, on aura

$$A = \frac{3Mf}{2n^3}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \log\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right),$$
$$B = \frac{3Mg}{2n^3}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \log\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right),$$
$$C = \frac{3Mh}{n^3}\left[\log\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right) - \sin\theta\right].$$

Substituant les valeurs connues de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, et supposant $g = 0$, ou $B = 0$, ce qui ne diminue en rien la généralité de la solution, on aura

$$A = \frac{3Mf}{2n^3}\left(\frac{\gamma n}{\alpha^2} - \log\frac{\gamma+n}{\alpha}\right),$$
$$C = \frac{3Mh}{n^3}\left(\log\frac{\gamma+n}{\alpha} - \frac{n}{\gamma}\right),$$

formules où l'on a $n = \sqrt{(\gamma^2 - \alpha^2)}$.

Remarque. Dans ces deux cas où l'expression des forces est donnée par les fonctions circulaires et logarithmiques, les formules qui contiennent cette expression sont sujettes à un inconvénient assez grand; c'est que si le sphéroïde était très peu différent d'une sphère, auquel cas n^3 serait une quantité très petite par rapport à β^3, il faudrait calculer avec une extrême précision les numérateurs des fractions qui ont n^3 pour dénominateurs, afin d'en déduire des valeurs suffisamment exactes des forces A, B, C. Ce même inconvénient se fait remarquer dans les formules du n° 594, exprimées par les fonctions elliptiques; mais on voit qu'on ne peut pas en faire une objection contre ces dernières expressions, et que c'est la nature des choses qui comporte cette complication apparente, dans un cas qui au surplus se résoud facilement par le développement en séries.

Solution du cas où le point attiré est situé hors de l'ellipsoïde.

597. Lorsque le point attiré S est situé hors de l'ellipsoïde, ses trois coordonnées f, g, h, prises dans le sens des demi-axes α, β, γ, doivent satisfaire à la condition

$$\frac{f^2}{\alpha^2}+\frac{g^2}{\beta^2}+\frac{h^2}{\gamma^2}>1.$$

Cela posé, il faut d'abord, suivant la théorie précédente, déterminer la quantité ξ d'après l'équation

$$\frac{f^2}{\alpha^2+\xi}+\frac{g^2}{\beta^2+\xi}+\frac{h^2}{\gamma^2+\xi}=1.$$

Connaissant la valeur réelle et positive de ξ, on aura les demi-axes α', β', γ', du second ellipsoïde M′ par les équations

$$\alpha'^2=\alpha^2+\xi,\quad \beta'^2=\beta^2+\xi,\quad \gamma'^2=\gamma^2+\xi;$$

et l'ellipsoïde M′ passera par le point donné S. On déterminera ensuite, sur la surface de l'ellipsoïde donné M, un point S′ correspondant au point S, de sorte que ses coordonnées soient

$$f'=\frac{\alpha}{\alpha'}f,\quad g'=\frac{\beta}{\beta'}g,\quad h'=\frac{\gamma}{\gamma'}h.$$

Soient maintenant A′, B′, C′ les trois forces, parallèles aux demi-axes α', β', γ', qui résultent de l'attraction de l'ellipsoïde M′ sur le point intérieur S′. Ces forces étant trouvées par les formules du premier cas, on en déduira les forces A, B, C, qu'exerce l'ellipsoïde M sur le point extérieur S, lesquelles seront ainsi exprimées :

$$A=\frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}A',\quad B=\frac{\alpha\gamma}{\alpha'\gamma'}B',\quad C=\frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'}C'.$$

Or, on a par les formules du n° 591,

$$A'=\frac{3M'f'}{\alpha'}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{[\alpha'^2+(\beta'^2-\alpha'^2)x^2]}.\sqrt{[\alpha'^2+(\gamma'^2-\alpha'^2)x^2]}},$$

$$B'=\frac{3M'g'}{\beta'}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{[\beta'^2+(\alpha'^2-\beta'^2)x^2]}.\sqrt{[\beta'^2+(\gamma'^2-\beta'^2)x^2]}},$$

$$C'=\frac{3M'h'}{\gamma'}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{[\gamma'^2+(\alpha'^2-\gamma'^2)x^2]}.\sqrt{[\gamma'^2+(\beta'^2-\gamma'^2)x^2]}};$$

donc en faisant les substitutions, et observant qu'on a $\frac{M'}{M}=\frac{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha\beta\gamma}$, $\beta'^2-\alpha'^2=\beta^2-\alpha^2$, $\gamma'^2-\alpha'^2=\gamma^2-\alpha^2$, on trouve pour les forces cherchées A, B, C, ces expressions

$$A=\frac{3Mf}{\alpha'}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{[\alpha'^2+(\beta^2-\alpha^2)x^2]}.\sqrt{[\alpha'^2+(\gamma^2-\alpha^2)x^2]}},$$

$$B=\frac{3Mg}{\beta'}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{[\beta'^2+(\alpha^2-\beta^2)x^2]}.\sqrt{[\beta'^2+(\gamma^2-\beta^2)x^2]}},$$

$$C=\frac{3Mh}{\gamma'}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{[\gamma'^2+(\alpha^2-\gamma^2)x^2]}.\sqrt{[\gamma'^2+(\beta^2-\gamma^2)x^2]}},$$

dans lesquelles les intégrales doivent toujours être prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

Ces intégrales pourront être réduites en séries, comme dans l'art. 592, et les séries seront d'autant plus convergentes, que les quantités α', β', γ', qui dépendent de la distance du point attiré, seront plus grandes.

598. Les mêmes intégrales peuvent aussi être exprimées en fonctions elliptiques : pour cela, on supposera, comme ci-dessus, $\alpha < \beta$ et $\beta < \gamma$, ce qui donnera pareillement $\alpha' < \beta'$ et $\beta' < \gamma'$; puis faisant de même $\beta^2 - \alpha^2 = m^2$, $\gamma^2 - \alpha^2 = n^2$, $1 - \frac{m^2}{n^2} = c^2$, et déterminant l'amplitude φ à sa dernière limite par les valeurs $\tang \varphi = \frac{n}{\alpha'}$, $\sin \varphi = \frac{n}{\gamma'}$, $\cos \varphi = \frac{\alpha'}{\gamma'}$, on aura d'abord

$$A = \frac{3Mf}{n^3} X', \quad B = \frac{3Mg}{n^3} Y', \quad C = \frac{3Mh}{n^3} Z',$$

ensuite

$$X' = \frac{1}{b^2} [\Delta \tang \varphi - E(c, \varphi)],$$

$$Y' = \frac{1}{b^2 c^2} \left[E(c, \varphi) - \frac{c^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\Delta} \right] - \frac{1}{c^2} F(c, \varphi),$$

$$Z' = \frac{1}{c^2} [F(c, \varphi) - E(c, \varphi)].$$

599. Il est très remarquable que les forces A, B, C sont exprimées absolument de la même manière en fonctions elliptiques, soit que le point attiré S soit situé au dedans de l'ellipsoïde, ou qu'il soit situé au dehors. La seule différence des résultats est dans la valeur de φ, qui mesure l'amplitude des fonctions elliptiques; lorsque le point S est situé au dedans de l'ellipsoïde ou sur sa surface, on a $\tang \varphi = \frac{n}{\alpha}$; lorsqu'il est situé au dehors, on a $\tang \varphi = \frac{n}{\alpha'}$, α' étant une quantité qu'on peut déduire immédiatement de l'équation

$$\frac{f^2}{\alpha'^2} + \frac{g^2}{\alpha'^2 + m^2} + \frac{h^2}{\alpha'^2 + n^2} = 1.$$

Le second cas, considéré analytiquement, est même plus simple que le premier, parce que la valeur de φ est plus petite, et qu'ainsi les approximations sont plus faciles à obtenir. On a d'ailleurs, comme dans l'art. 595, les deux équations

$$\frac{A}{f} + \frac{B}{g} + \frac{C}{h} = \frac{3M}{\alpha'\beta'\gamma'} = 4\pi \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'};$$

$$\frac{A\alpha'^2}{f} + \frac{B\beta'^2}{g} + \frac{C\gamma'^2}{h} = \frac{3M}{n} F(c, \varphi).$$

Enfin on doit observer que les quantités X′, Y′, Z′, par lesquelles s'expriment les forces A, B, C, ne dépendent que des deux seules données c et φ, tandis que la question offre en général six élémens, savoir : les demi-axes de l'ellipsoïde α, β, γ, et les coordonnées f, g, h du point attiré; on pourrait donc déduire de là un grand nombre de théorèmes au moyen desquels l'attraction d'un ellipsoïde donné servirait à déterminer celle d'une infinité d'autres ellipsoïdes; nouvelle preuve de l'avantage que présentent toujours les fonctions elliptiques dans leurs applications, en exprimant les résultats sous la forme la plus simple dont ils sont susceptibles.

600. Les formules générales se simplifient, lorsque l'ellipsoïde devient un solide de révolution, ce qui offre deux cas à distinguer.

Premier cas. Si le sphéroïde est aplati, on aura $\beta = \gamma$, $\beta^2 - \alpha^2 = m^2$, $n = m$, $c = 0$; et comme on peut prendre pour plan des x et y celui qui passe par le point S, on aura $h = 0$, de sorte que l'équation qui détermine α' sera

$$\frac{f^2}{\alpha'^2} + \frac{g^2}{\alpha'^2 + n^2} = 1,$$

d'où l'on tire

$$\alpha'^2 = \tfrac{1}{2}(f^2 + g^2 - n^2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{[(f^2 + g^2 - n^2)^2 + 4f^2n^2]}.$$

Cela posé, ayant déterminé l'arc θ par la valeur $\tang\theta = \frac{n}{\alpha'}$, les deux forces A et B auxquelles se réduit l'attraction du sphéroïde sur le point S, seront ainsi exprimées :

$$A = \frac{3Mf}{n^3}(\tang\theta - \theta),$$

$$B = \frac{3Mg}{2n^3}(\theta - \sin\theta\cos\theta).$$

Second cas. Si le sphéroïde est alongé, on aura $\beta = \alpha$, $n = 0$, $\gamma^2 - \alpha^2 = n^2$, $c = 1$, et comme on peut prendre pour plan des x et z, celui qui passe par le point attiré S, on pourra faire $g = 0$, ce qui donnera

$$\alpha'^2 = \tfrac{1}{2}(f^2 + h^2 - n^2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{[(f^2 + h^2 - n^2)^2 + 4f^2n^2]}.$$

Connaissant α' et ensuite θ par l'équation $\tang\theta = \frac{n}{\alpha'}$, les deux forces A et C, auxquelles se réduit l'attraction du sphéroïde, seront ainsi exprimées :

$$A = \frac{3Mf}{2n^3}\left[\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \log\left(\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}\right)\right],$$

$$C = \frac{3Mh}{n^3}\left[\log\left(\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}\right) - \sin\theta\right].$$

SECTION IV.

De l'orbite décrite en vertu d'une force centrale donnée.

601. Nous supposerons, comme on le fait ordinairement, que la force centrale est fonction de la distance seulement, et ne dépend point de l'angle que fait le rayon vecteur avec une ligne fixe menée par le centre. Cela posé, nous nous proposons d'examiner un grand nombre de cas dans lesquels on peut déterminer exactement le mouvement d'un corps qui a reçu une vitesse initiale dans une direction quelconque et qui est soumis à l'action d'une force centrale donnée; mais nous nous attacherons surtout aux cas où le rayon vecteur ne peut devenir ni nul ni infini. Alors le corps circule dans une orbite qui est toujours renfermée entre deux circonférences décrites autour du centre des forces, de manière qu'elle touche alternativement l'une et l'autre, et la question se réduit à déterminer le mouvement du corps dans le passage d'une circonférence à l'autre; ou, ce qui revient au même, d'une apside à l'apside suivante; car ce mouvement étant connu, le secteur parcouru par le rayon vecteur, se répète à l'infini, dans des positions alternatives, et on peut au bout d'un temps quelconque assigner la position du corps.

On verra que les fonctions elliptiques permettent de donner la solution exacte du problème dans un grand nombre de cas qui seraient inaccessibles aux méthodes ordinaires; quant à ceux qui ne peuvent se résoudre que par les quadratures, nous ferons voir, par un exemple, que la *méthode des ordonnées moyennes* s'y applique avec beaucoup d'avantage et ne laisse rien à désirer pour l'exactitude de la solution.

Ce problème est sans doute un des plus simples qu'offre la Mécanique appliquée au mouvement des corps célestes; mais la solution générale que nous en donnons est un premier pas qui permet d'espérer que d'autres cas moins simples et plus conformes à l'état réel des choses, pourront être résolus par des méthodes analogues, et conduiront à des conséquences plus importantes pour le véritable système du monde.

Équations du mouvement.

602. Supposons qu'à l'origine du mouvement, le corps soit dans l'une des apsides de son orbite, en sorte que la vitesse initiale V soit dirigée perpendiculairement au rayon vecteur a; soit v la vitesse au bout du temps t, r le rayon vecteur et φ l'angle que fait ce rayon avec le rayon vecteur initial a; soit enfin R la force qui agit dans le sens du rayon vecteur pour rapprocher le corps du centre; R étant une fonction donnée de r, si on prend l'intégrale $\int R dr$, de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $r = a$, on aura d'abord le quarré de la vitesse

$$v^2 = V^2 - 2\int R dr.$$

Ensuite l'équation de la courbe et le temps employé à parcourir un secteur quelconque, se trouveront en intégrant les deux équations différentielles

$$d\varphi = \frac{\pm \frac{aV dr}{r^2}}{\sqrt{\left[V^2\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - 2\int R dr\right]}},$$

$$dt = \frac{a}{V} \cdot \frac{r^2 d\varphi}{a^2},$$

où l'on doit observer que l'ambiguïté de signe qui affecte la valeur de $d\varphi$ sera déterminée dans les différens cas particuliers, de manière que $d\varphi$ soit toujours positif, ce qui exige que le signe de dr soit le même que celui de la constante $\frac{V^2}{a} - R^0$, R^0 étant la valeur de R lorsque $r = a$.

Nous allons maintenant déterminer l'orbite dans différentes hypothèses sur la valeur de la force centrale R.

Exemple I. $R = \frac{A}{r^2}$.

603. Alors on aura $\int R dr = A\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)$, et si l'on fait $\frac{A}{aV^2} = m$, l'équation différentielle de l'orbite pourra s'écrire ainsi :

$$d\varphi = \frac{\pm \frac{a dr}{r^2}}{\sqrt{\left[(1-m)^2 - \left(\frac{a}{r} - m\right)^2\right]}}.$$

Les apsides se détermineront en égalant à zéro la quantité sous le radical, ce

qui donne $\frac{a}{r} - m = \pm(1-m)$, savoir, $r = a$ et $r = \frac{a}{2m-1}$. Ainsi le corps passe de l'apside $r = a$ à l'apside $r = \frac{a}{2m-1}$; celle-ci étant l'apside supérieure si m est < 1, et l'inférieure dans le cas contraire.

Soit en général $\frac{a}{r} - m = (1-m)\cos\theta$, on aura sans ambiguité $d\varphi = d\theta$, et par conséquent $\varphi = \theta +$ const. Mais à l'origine du mouvement on a $\varphi = 0$ et $r = a$; on aura donc en même temps $\theta = 0$ et $\varphi = 0$, ce qui donne en général $\theta = \varphi$. Donc l'équation finie de l'orbite est

$$\frac{a}{r} = m + (1-m)\cos\varphi.$$

Cette équation appartient en général à une section conique dont le centre des forces est un foyer; elle appartient en particulier à l'ellipse si l'on a $m > \frac{1}{2}$ ou $V^2 < \frac{2A}{a}$, à la parabole si $m = \frac{1}{2}$ et à l'hyperbole si $m < \frac{1}{2}$ ou $V^2 > \frac{2A}{a}$.

Si l'on a $m = 1$, l'orbite sera un cercle; en effet, dans ce cas la force centrifuge initiale $\frac{V^2}{a}$ est égale à la force centrale $\frac{A}{a^2}$, et cette égalité continue d'avoir lieu à l'infini.

604. Pour avoir le temps du mouvement, il faut intégrer la formule

$$dt = \frac{a}{V}\cdot\frac{r^2 d\varphi}{a^2} = \frac{a}{V}\cdot\frac{d\varphi}{\left[\cos^2\frac{1}{2}\varphi + (2m-1)\sin^2\frac{1}{2}\varphi\right]^2}.$$

Dans le cas de l'orbite elliptique où $2m-1$ est positif, soit $\tang\frac{1}{2}\varphi = (2m-1)^{-\frac{1}{2}}\tang\frac{1}{2}\psi$, on aura

$$dt = \frac{a}{V}(2m-1)^{-\frac{1}{2}}\,d\psi\left(\cos^2\tfrac{1}{2}\psi + \frac{1}{2m-1}\sin^2\tfrac{1}{2}\psi\right);$$

d'où résulte en intégrant

$$t = \frac{a}{V}(2m-1)^{-\frac{3}{2}}(m\psi - (1-m)\sin\psi).$$

Soit f le demi-grand axe de l'ellipse, g son excentricité, on aura $f = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2m-1}\right) = \frac{ma}{2m-1}$, $g = f - a = \frac{(1-m)a}{2m-1}$; d'ailleurs $m = \frac{A}{aV^2}$ ou $V = \sqrt{\left(\frac{A}{am}\right)}$; donc

$$t = \frac{f^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{A}}\left(\psi - \frac{g}{f}\sin\psi\right).$$

Pour l'usage de cette formule on se rappellera que l'angle ψ se déduit de l'anomalie φ au moyen de l'équation $\tang\frac{1}{2}\psi = (2m-1)^{\frac{1}{2}}\tang\frac{1}{2}\varphi = \frac{f-g}{f+g}\tang\frac{1}{2}\varphi$.

Dans le cas dont nous nous occupons, les deux apsides sont fixées invariablement aux deux extrémités du grand axe; appelons t_1 le temps nécessaire pour passer d'une apside à la suivante; ce temps se déduira de la formule précédente en faisant $\varphi = \pi$, ce qui donne $\psi = \pi$, et par conséquent

$$t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{A}} f^{\frac{3}{2}}.$$

Le double de cette quantité sera le temps d'une révolution.

605. Considérons maintenant une valeur de φ aussi grande qu'on voudra, on pourra toujours supposer $\varphi = 2n\pi \pm \varphi'$, n étant un nombre entier et φ' un angle plus petit que 180°; cette valeur de φ déterminera le rayon vecteur r par la formule

$$\frac{a}{r} = m + (1-m)\cos\varphi';$$

Ensuite pour avoir le temps correspondant t, il faudra supposer $\psi = 2n\pi \pm \psi'$, puis déterminer ψ' par φ' comme ψ l'est par φ, et on aura $t = 2nt_1 \pm t'$, t' plus petit que t_1 étant déterminé par ψ' au moyen de l'équation

$$t' = \frac{t_1}{\pi}\left(\psi' - \frac{g}{f}\sin\psi'\right).$$

Par une opération inverse on déterminerait la position du corps au bout d'un temps donné quelconque t qu'il faudrait mettre sous la forme $t = 2nt_1 \pm t'$.

Exemple II. $R = Br$.

606. Alors on aura $\int R dr = \frac{1}{2}B(r^2 - a^2)$, et l'équation différentielle de l'orbite sera, en faisant $m = \frac{Ba^2}{V^2}$:

$$d\varphi = \frac{\pm\frac{a^2 dr}{r^3}}{\sqrt{\left[\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left(\frac{a^2}{r^2}-m\right)\right]}}.$$

On voit par cette équation que $\frac{a^2}{r^2}$ sera toujours comprise entre 1 et m; ainsi l'apside première $r=a$ sera suivie de l'apside $r=\frac{a}{\sqrt{m}}$, celle-ci de l'apside $r=a$, et ainsi à l'infini.

Soit $\frac{a^2}{r^2}=\cos^2\psi+m\sin^2\psi$, on aura sans ambiguité $d\varphi=d\psi$, et de là $\varphi=\psi$; donc l'équation finie de l'orbite est

$$\frac{a^2}{r^2}=\cos^2\varphi+m\sin^2\varphi.$$

Si l'on fait $r\cos\varphi=x$, $r\sin\varphi=y$, cette équation donnera $y^2=\frac{1}{m}(a^2-x^2)$; ainsi l'orbite est une ellipse qui a pour centre le centre des forces et dont les demi-axes sont a et $\frac{a}{\sqrt{m}}$. Dans cette orbite les apsides seront les extrémités des deux axes.

L'ellipse se changera en cercle si on a $m=1$, ou si la force centrifuge $\frac{V^2}{a}$ est égale à la force centrale Ba.

Exemple III. $R=\frac{A}{r^2}+Br$.

607. Alors on aura $\int Rdr=\frac{A}{a}\left(1-\frac{a}{r}\right)+\frac{1}{2}B(r^2-a^2)$, et l'équation différentielle de l'orbite sera

$$d\varphi=\frac{\pm\frac{aVdr}{r^3}}{\sqrt{\left[\frac{V^2}{r^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{2A}{ar^2}\left(\frac{a}{r}-1\right)-B\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\right]}}.$$

Soit $r=\frac{a}{z}$, $\frac{A}{aV^2}=m$, $\frac{Ba^2}{V^2}=n$, on aura

$$d\varphi=\frac{\pm zdz}{\sqrt{[(1-z)(z^3+(1-2m)z^2-nz-n)]}}.$$

Supposons d'abord que n soit positif, c'est-à-dire que la force Br soit attractive, alors le polynome $z^3+(1-2m)z^2-nz-n$ aura toujours un facteur réel de la forme $z-\alpha$, et on pourra supposer $z^3+(1-2m)z^2-nz-n=(z-\alpha)P$, P étant un polynome de la forme $(z+\beta)(z+\gamma)$, ou de la forme $z^2+2\beta z\cos\lambda+\beta^2$, lequel sera toujours positif.

Dans le passage d'une forme à l'autre on aura $\beta=\gamma$ ou $\lambda=0$; c'est le cas où l'équation $z^3+(1-2m)z^2-nz-n=0$ aurait deux racines égales; alors l'équation de l'orbite serait

$$d\varphi = \frac{\pm s\,ds}{(s+\beta)\sqrt{[(1-s)(s-\alpha)]}},$$

équation qui peut s'intégrer par des arcs de cercle; dans les autres cas l'intégrale dépendra des fonctions elliptiques.

Au reste les caractères distinctifs de ces trois cas sont faciles à assigner par les règles connues; il en résulte que si la quantité $L = m(m+n)^2 - (m^2 - 10m - 2 + 2n)^2$ est négative, le polynome P sera de la forme $(z+\beta)(z+\gamma)$, β et γ étant réels et positifs.

Si cette quantité est nulle, on aura $\beta = \gamma$, et si elle est positive P sera de la forme $z^2 + 2\beta z \cos\lambda + \beta^2$, dont les deux facteurs sont imaginaires.

Premier cas. $P = (z+\beta)(z+\gamma)$.

608. On aura alors

$$d\varphi = \frac{\pm s\,ds}{\sqrt{[(1-s)(s-\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)]}},$$

ce qui fait voir que la valeur de z sera toujours comprise entre 1 et α, c'est-à-dire que les apsides de l'orbite répondront toujours aux rayons vecteurs $r = a$, $r = \frac{a}{\alpha}$. Soit donc $z = \cos^2 p + \alpha \sin^2 p$, on aura sans ambiguité

$$d\varphi = \frac{2dp(\cos^2 p + \alpha \sin^2 p)}{\sqrt{(\beta + \cos^2 p + \alpha \sin^2 p)}.\sqrt{(\gamma + \cos^2 p + \alpha \sin^2 p)}}.$$

Pour faire disparaître l'un de ces deux radicaux, soit $\tang p = k \tang \psi$, k étant une indéterminée, on aura la transformée

$$d\varphi = \frac{2k}{h} \cdot \frac{\cos^2\psi + \alpha k^2 \sin^2\psi}{\cos^2\psi + k^2 \sin^2\psi} \cdot \frac{d\psi}{MN},$$

où l'on a fait pour abréger :

$$h^2 = (1+\beta)(1+\gamma),$$
$$M^2 = \cos^2\psi + \left(\frac{\alpha+\gamma}{1+\gamma}\right) k^2 \sin^2\psi,$$
$$N^2 = \cos^2\psi + \left(\frac{\alpha+\beta}{1+\beta}\right) k^2 \sin^2\psi.$$

Soit $k^2 = \frac{1+\gamma}{\alpha+\gamma}$, on aura $M = 1$ et $N = \sqrt{(1 - c^2 \sin^2\psi)}$, en prenant $c^2 = 1 - \frac{(\alpha+\beta)(1+\gamma)}{(1+\beta)(\alpha+\gamma)} = \frac{(\gamma-\beta)(1-\alpha)}{(1+\beta)(\alpha+\gamma)}$. Cette valeur de c^2 sera positive et plus petite que l'unité, pourvu que $\gamma - \beta$ soit de même signe que $1 - \alpha$, ce qu'on peut toujours supposer, puisque les racines β et γ peuvent être échangées entre elles à volonté.

Cela posé si on fait encore $\nu = k^2 - 1 = \frac{1-\alpha}{\alpha+\gamma}$ et $c^2 = (1+\mathcal{C})(\alpha+\gamma)$, on aura

$$d\varphi = \frac{2}{i} \cdot \left[-\frac{\gamma d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}} + \frac{(1+\gamma)d\psi}{(1+\nu\sin^2\psi).\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}} \right],$$

ce qui donne en intégrant

$$\varphi = \frac{2}{i}[(1+\gamma)\Pi(\nu, c, \psi) - \gamma F(c, \psi)],$$

on aura de plus $z = \frac{\cos^2\psi + \alpha k^2 \sin^2\psi}{\cos^2\psi + k^2\sin^2\psi} = \frac{a}{r}$, ce qui achève de déterminer l'orbite, puisque r et φ s'expriment en fonctions d'une même variable ψ.

609. Appelons φ_1 la valeur de φ qui répond à la seconde apside où l'on a $\psi = \frac{1}{2}\pi$, $z = \alpha$, $r = \frac{a}{\alpha}$, nous aurons

$$\varphi_1 = \frac{2}{i}[(1+\gamma)\Pi'(\nu, c) - \gamma F'c].$$

Le paramètre ν est positif et par conséquent de l'espèce circulaire, lorsque $\alpha < 1$, c'est-à-dire, lorsque la seconde apside est l'apside supérieure. On conçoit que le paramètre devra être également de l'espèce circulaire, quand même on aurait $\alpha > 1$, c'est-à-dire, quand même la seconde apside serait l'apside inférieure; car il importe peu que l'origine du mouvement soit fixée à l'une ou à l'autre de ces apsides. En effet, si on a $\alpha > 1$, le paramètre ν sera négatif, mais comme on aura alors $1 + \nu = k^2 = \frac{1+\gamma}{\alpha+\gamma}$, on pourra faire $1 + \nu = b^2 \sin^2\theta$, et on aura $\sin^2\theta = \frac{1+\nu}{1-c^2} = \frac{1+\mathcal{C}}{\alpha+\mathcal{C}}$, quantité positive et plus petite que l'unité; donc le paramètre ν sera dans ce second cas de la forme $-1 + b^2\sin^2\theta$, et se rapportera encore à l'espèce circulaire.

610. Connaissant le secteur de l'orbite que parcourt le rayon vecteur depuis la première apside $r = a$, jusqu'à la seconde $r = \frac{a}{\alpha}$, on peut imaginer que ce secteur tourne autour du second rayon $\frac{a}{\alpha}$, jusqu'à ce qu'il rentre dans le même plan, on aura ainsi le second secteur décrit depuis la seconde apside $r = \frac{a}{\alpha}$, jusqu'à la troisième apside qui sera de même nom que la première $r = a$, et ainsi à l'infini. Ces propriétés au reste sont communes à toutes les orbites décrites en vertu d'une force centrale R qui n'est fonction que de la distance au centre. Il faut seulement observer que l'angle φ

du secteur dont nous parlons, n'est pas borné à une limite déterminée, mais qu'il peut occuper une ou plusieurs circonférences; on verra même un cas où il devient infini, ce qui veut dire que le corps met un temps infini à parvenir de la première apside à la seconde, ou en d'autres termes, que le mouvement du corps tend de plus en plus à devenir circulaire et uniforme.

Pour avoir l'expression du temps dans notre exemple, il faut reprendre la formule $dt = \frac{r^2 d\varphi}{a\sqrt{V}} = \frac{a}{\sqrt{V}} \cdot \frac{d\varphi}{z^2}$, d'où résulte

$$dt = \frac{2a}{g\sqrt{V}} \cdot \frac{1 + \nu \sin^2\psi}{1 - \gamma\nu \sin^2\psi} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\psi)}}.$$

Soit $\nu' = -\gamma\nu$, on aura en intégrant

$$t = \frac{2a}{g\gamma\sqrt{V}} [(1 + \gamma)\,\Pi(\nu', c, \psi) - F(c, \psi)].$$

Le paramètre ν' est encore de l'espèce circulaire; car si on a $\alpha > 1$, la valeur $\nu' = \frac{\alpha + \gamma}{\gamma(\alpha - 1)}$ sera positive, et si on a $\alpha < 1$, on pourra faire $1 + \nu' = b^2 \sin^2\mu$, ce qui donnera $\sin^2\mu = \frac{\alpha + \alpha\mathcal{C}}{\alpha + \mathcal{C}}$, quantité positive et plus petite que l'unité.

Appelons t_1 le temps employé à parvenir de la première apside à la seconde, on aura, en faisant $\psi = \frac{1}{2}\pi$,

$$t_1 = \frac{2a}{g\gamma\sqrt{V}} [(1 + \gamma)\,\Pi^1(\nu', c) - F^1 c].$$

Au moyen de ces formules il est facile de déterminer la position du corps et le temps du mouvement pour une valeur quelconque de la variable ψ; car en donnant à cette valeur la forme $\psi = n\pi \pm \psi'$, n étant un nombre entier et ψ' un arc $< \frac{1}{2}\pi$, on aura $\varphi = 2n\varphi_1 \pm \varphi'$, et $t = 2nt_1 \pm t'$, φ' et t' étant déterminés par ψ' comme le sont φ et t par ψ; on aura en même temps le rayon vecteur r par la formule $r = \frac{a(\cos^2\psi + k^2 \sin^2\psi)}{\cos^2\psi + \alpha k^2 \sin^2\psi}$.

Ces mêmes formules serviront à résoudre le problème inverse, c'est-à-dire à trouver le lieu du corps au bout d'un temps quelconque $t = 2nt_1 \pm t'$.

Second cas. $P = z^2 + 2\mathcal{C}z \cos\lambda + \mathcal{C}^2$.

611. On aura alors

$$d\varphi = \frac{\pm z dz}{\sqrt{[(1 - z)(z - \alpha)(z^2 + 2\mathcal{C}z \cos\lambda + \mathcal{C}^2)]}}.$$

Soit toujours $z = \cos^2 p + \alpha \sin^2 p$, on aura sans ambiguité

$$d\varphi = \frac{2dp\,(\cos^2 p + \alpha \sin^2 p)}{\sqrt{(\mathrm{L}\cos^4 p + 2\mathrm{M}\cos^2 p \sin^2 p + \mathrm{N}\sin^4 p)}},$$

en faisant pour abréger

$$\mathrm{L} = 1 + 2\beta\cos\lambda + \beta^2,$$
$$\mathrm{M} = \alpha + (1+\alpha)\,\beta\cos\lambda + \beta^2,$$
$$\mathrm{N} = \alpha^2 + 2\alpha\beta\cos\lambda + \beta^2.$$

Soit $\operatorname{tang} p = k \operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi$, ensuite $k^4 = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{N}}$ et $c^2 = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{M}k^2}{2\mathrm{L}}$, on aura la transformée

$$d\varphi = \frac{k}{\sqrt{\mathrm{L}}} \cdot \frac{\cos^2\frac{1}{2}\psi + \alpha k^2 \sin^2\frac{1}{2}\psi}{\cos^2\frac{1}{2}\psi + k^2\sin^2\frac{1}{2}\psi} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}.$$

Soit $\nu = \left(\frac{1-k^2}{2k}\right)^2 = \cot^2\theta$, ou $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta = k$, cette formule se développera ainsi :

$$d\varphi = \frac{1}{2\sqrt{(\mathrm{L}\nu)}}\left[1 - \alpha k^2 + \frac{\alpha - 1}{2} \cdot \frac{1+k^2}{1+\nu\sin^2\psi}\right]\frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}$$
$$+ \frac{(1-\alpha)k}{2\sqrt{\mathrm{L}}} \cdot \frac{d\psi\cos\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}},$$

et son intégrale sera, en faisant $c\sin\psi = \sin \mathrm{Z}$;

$$\varphi = \frac{1-\alpha k^2}{2\sqrt{(\mathrm{L}\nu)}} \cdot \mathrm{F}(c,\psi) + \frac{(\alpha-1)\,(1+k^2)}{4\sqrt{(\mathrm{L}\nu)}}\,\Pi(\nu, c, \psi) + \frac{(1-\alpha)k}{2c\sqrt{\mathrm{L}}} \cdot \mathrm{Z}.$$

Soit φ_1 la valeur de φ qui répond à la seconde apside, il faudra faire $p = \frac{1}{2}\pi$ ou $\psi = \pi$, ce qui donnera $\mathrm{Z} = 0$ et

$$\varphi_1 = \frac{1-\alpha k^2}{\sqrt{(\mathrm{L}\nu)}}\,\mathrm{F}^1 c + \frac{(\alpha-1)\,(1+k^2)}{2\sqrt{(\mathrm{L}\nu)}}\,\Pi^1(\nu; c).$$

612. Pour avoir le temps il faut faire les mêmes substitutions dans la formule $dt = \frac{a}{\mathrm{V}} \cdot \frac{d\varphi}{z^2}$, ce qui donnera

$$dt = \frac{a}{\mathrm{V}} \cdot \frac{k}{\sqrt{\mathrm{L}}} \cdot \frac{\cos^2\frac{1}{2}\psi + k^2\sin^2\frac{1}{2}\psi}{\cos^2\frac{1}{2}\psi + \alpha k^2\sin^2\frac{1}{2}\psi} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}.$$

Développant cette expression et faisant $\nu' = \cot^2\theta'$ et $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta' = k\sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta$, on aura

$$dt = \frac{a}{\mathrm{V}} \cdot \frac{\cot\theta\operatorname{tang}\theta'}{\sqrt{(\mathrm{L}\alpha)}}\left(1 + \frac{1-\alpha}{2\alpha\cos\theta} \cdot \frac{1}{1+\nu'\sin^2\psi} + \frac{1-\alpha}{2\alpha}\cos\psi\right)\frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}},$$

ce qui donne en intégrant

$$t = \frac{a}{V} \cdot \frac{\cot\theta \tang\theta'}{\sqrt{(L\alpha)}} \left[F(c, \psi) + \frac{1-\alpha'}{2\alpha\cos\theta} \Pi(\gamma', c, \psi) + \frac{1-\alpha}{2c\alpha} Z \right].$$

$$t_1 = \frac{a}{V} \cdot \frac{\cot\theta \tang\theta'}{\sqrt{(L\alpha)}} \left[2F^1 c + \frac{1-\alpha}{\alpha\cos\theta} \Pi^1(\gamma', c) \right].$$

Ces formules donneront, comme ci-dessus, les valeurs de φ, r et t qui répondent à une valeur quelconque donnée de ψ, ou réciproquement les valeurs de ψ, φ et r qui répondent à une valeur donnée de t.

Troisième cas. $P = (z + \mathcal{C})^n$.

613. Puisqu'alors le polynome $z^3 + (1-2m)z^2 - nz - n = (z-\alpha)(z+\mathcal{C})^2$, on peut regarder les trois quantités m, n, $\mathcal{C}$, comme étant déterminées par la quatrième α, au moyen des valeurs

$$m = \frac{(1-\alpha)^2}{2(1+\alpha)}, \quad n = \frac{4\alpha^3}{(1+\alpha)^{3/2}}, \quad \mathcal{C} = \frac{2\alpha}{1+\alpha}.$$

Dans ce cas on a directement

$$d\varphi = \frac{\pm z dz}{(z+\mathcal{C}) \sqrt{[(1-z)(z-\alpha)]}},$$

soit $z = \cos^2 p + \alpha \sin^2 p$, on aura d'abord

$$d\varphi = \frac{2dp\,(\cos^2 p + \alpha \sin^2 p)}{\cos^2 p + \alpha \sin^2 p + \mathcal{C}};$$

soit ensuite $\tang\psi = \left(\frac{\alpha + \mathcal{C}}{1 + \mathcal{C}}\right)^{\frac{1}{2}} \tang p$, et $\iota = \sqrt{\left[\left(3 + \frac{1}{\alpha}\right)(3+\alpha)\right]}$, on aura

$$d\varphi = 2dp - \frac{4d\psi}{\iota},$$

donc $\varphi = 2p - \frac{4\psi}{\iota}$.

614. Pour avoir l'expression du temps, on fera les substitutions nécessaires dans la formule $dt = \frac{a}{V} \cdot \frac{d\varphi}{z^2}$, ce qui donnera

$$dt = \frac{a}{V} \cdot \frac{2dp}{(\cos^2 p + \alpha \sin^2 p)(\cos^2 p + \alpha \sin^2 p + \mathcal{C})},$$

soit $\tang q = \sqrt{\alpha} \tang p$, on aura en intégrant

$$t = \frac{2a}{V.\mathcal{C}\sqrt{\alpha}} \left[q - \left(\frac{1+\alpha}{\iota}\right)\psi \right],$$

soit t_1 le temps employé à parvenir de l'apside $r = a$ à l'apside suivante $r = \frac{a}{\alpha}$, on fera $\psi = \frac{1}{2}\pi$, $p = \frac{1}{2}\pi$, $q = \frac{1}{2}\pi$, ce qui donnera

$$t_1 = \frac{a}{V} \cdot \frac{\pi}{\epsilon\sqrt{\alpha}}\left[1 - \left(\frac{1+\alpha}{\epsilon}\right)\right],$$

on aura en même temps

$$\varphi_1 = \pi\left(1 - \frac{2\sqrt{\alpha}}{\epsilon}\right);$$

soit par exemple $\alpha = \frac{1}{3}$, on aura $\beta = \frac{1}{2}$, $\epsilon = 2\sqrt{5}$, $\varphi_1 = \pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $t_1 = \frac{2\pi a}{V}\left(\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

On voit qu'en donnant à l'angle p une valeur aussi grande qu'on voudra, on peut déterminer par les seuls arcs de cercle la valeur de φ et le temps t; or l'angle φ et le rayon vecteur déterminé immédiatement par l'angle p, font connaître la position du corps; réciproquement le temps étant connu, quelque grand qu'il soit, et représenté par $2nt_1 \pm t'$, t' étant $< t_1$, on en déduira la valeur de p et la position du corps.

Exemple IV. $R = \frac{A}{r^2} - Br$.

615. Si l'on fait comme dans l'exemple précédent $r = \frac{a}{z}$, $\frac{A}{aV^2} = m$, $\frac{Ba^2}{V^2} = n$, il n'y aura que le signe de n à changer dans la formule de cet exemple et on aura

$$d\varphi = \frac{\pm z dz}{\sqrt{[(1-z)P]}}, \quad P = z^3 + (1-2m)z^2 + nz + n.$$

Or le polynome P présente différens cas à examiner :

1°. Si m est $< \frac{1}{2}$, les facteurs de P ne pourront être que de l'une des deux formes $(z+\alpha)(z+\beta)(z+\gamma)$ et $(z+\alpha)(z^2 + 2\beta z \cos\lambda + \beta^2)$. Alors la valeur de z, qui est 1 à l'origine du mouvement diminuera de plus en plus sans autre limite que zéro, et le corps s'éloignera à l'infini du centre des forces ; cas dont nous faisons abstraction.

2°. Si m est $> \frac{1}{2}$, le polynome P sera de l'une des formes ..... $(z-\alpha)(z-\beta)(z+\gamma)$, et $(z+\gamma)(z^2 - 2\alpha z \cos\lambda + \alpha^2)$.

Dans le second cas le corps s'éloignerait encore à l'infini du centre des forces, ainsi il ne reste à considérer que le cas où l'on a

$$P = (z-\alpha)(z-\beta)(z+\gamma),$$

α, β, γ étant des nombres réels et positifs.

616. Ce cas se subdivise en trois autres.

1°. Si α et β sont tous deux plus grands que l'unité, la valeur de z dimi-

nuera depuis 1 jusqu'à zéro, et le rayon vecteur r augmentera depuis a qui est sa valeur initiale jusqu'à l'infini; cas dont nous faisons abstraction.

2°. Si on a $\alpha > 1$ et $\beta < 1$, la valeur de z ira en augmentant depuis $z = 1$ jusqu'à $z = \alpha$; c'est-à-dire que le mouvement du corps aura lieu de l'apside supérieure à l'apside inférieure. Soit $z = \cos^2\psi + \alpha \sin^2\psi$, on aura

$$d\varphi = \frac{2d\psi\,(\cos^2\psi + \alpha\sin^2\psi)}{\sqrt{[(1-\beta)\cos^2\psi + (\alpha-\beta)\sin^2\psi]}.\sqrt{[(1+\gamma)\cos^2\psi + (\alpha+\gamma)\sin^2\psi]}},$$

formule qui s'intègre comme dans l'exemple précédent.

3°. Si les nombres α, β, sont tous deux plus petits que l'unité, z ira en diminuant de $z = 1$ à $z = \alpha$, en supposant $\alpha > \beta$; il reviendra ensuite de $z = \alpha$ à $z = 1$, et ainsi alternativement. Soit alors $z = \cos^2\psi + \alpha\sin^2\psi$, et on aura la même formule que dans le cas précédent, avec la seule différence que le mouvement se fera de l'apside inférieure à l'apside supérieure.

617. Enfin il y a un cas très remarquable qui diffère de tous les autres et qui d'ailleurs peut être résolu exactement par les moyens ordinaires; c'est celui où l'on aurait $\alpha = \beta$. On le reconnaît *a priori* par la condition $2n + 2 + 10m - m^2 = (m+4)^{\frac{3}{2}}$. Alors on aura

$$d\varphi = \frac{-zdz}{(z-\alpha)\sqrt{[(1-z)(z+\gamma)]}},$$

et on voit que les valeurs $z = 1$, $z = \alpha$, déterminent les apsides de l'orbite. Soit toujours $z = \cos^2\psi + \alpha\sin^2\psi$, on aura

$$d\varphi = \frac{2}{1-\alpha}\cdot\frac{(\cos^2\psi + \alpha\sin^2\psi)\,d\psi}{\cos\psi\sqrt{\left(\frac{1+\gamma}{1-\alpha} - \sin^2\psi\right)}}.$$

Soit $\sin\psi = \sqrt{\left(\frac{1+\gamma}{1-\alpha}\right)}\sin\omega$, et $k = \sqrt{\left(\frac{\alpha+\gamma}{1-\alpha}\right)}$, on aura en substituant et intégrant,

$$\varphi = -2\omega + \frac{\alpha}{(1-\alpha)k}\log.\left(\frac{1+k\tang\omega}{1-k\tang\omega}\right);$$

c'est ce qu'on aurait obtenu directement en faisant $z = 1 - (1+\gamma)\sin^2\omega$.

Maintenant si l'on fait $\psi = \frac{1}{2}\pi$, on aura $\sin^2\omega = \frac{1-\alpha}{1+\gamma}$, $\tang^2\omega = \frac{1-\alpha}{\alpha+\gamma} = \frac{1}{k^2}$, ou $k\tang\omega = 1$, donc l'angle φ devient infini. Ainsi, rigoureusement parlant, il faudra que le corps fasse une infinité de révolutions autour du centre des forces avant de parvenir de l'apside primitive $r = a$ à l'ap-

side suivante $r=\frac{a}{\alpha}$. Mais dans l'état réel des choses, il n'est pas moins vrai de dire qu'après un assez petit nombre de révolutions, la distance du corps au centre des forces ne différera pas d'une quantité sensible, de la limite $\frac{a}{\alpha}$, et le mouvement du corps deviendra sensiblement uniforme et circulaire.

Exemple V. $R=\frac{A}{r^2}+\frac{C}{r^3}$.

618. Dans ce cas on a $\int R dr = A\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)+\frac{C}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)$, et si on fait $\frac{a}{r}=z$, $\frac{A}{aV^2}=m$, $\frac{C}{a^2V^2}=n$, l'équation différentielle de l'orbite sera :

$$d\varphi=\frac{\pm dz}{\sqrt{[(1-n)(1-z^2)-2m(1-z)]}};$$

pour l'intégrer il faut distinguer trois différens cas, selon qu'on aura $n<1$, $n=1$, ou $n>1$.

Soit 1°. $n<1$, ce qui comprend le cas où n serait négatif, on fera $\frac{m}{1-n}=m'$, et on aura

$$d\varphi\sqrt{(1-n)}=\frac{\pm dz}{\sqrt{[(1-m')^2-(z-m')^2]}}.$$

Soit $z-m'=(1-m')\cos\theta$, on aura $d\varphi\sqrt{(1-n)}=d\theta$, et par conséquent $\varphi\sqrt{(1-n)}=\theta$, parce que θ et φ s'évanouissent tous deux à l'origine du mouvement où $z=1$.

L'équation $z-m'=(1-m')\cos\theta$, ou $\frac{a}{r}-m'=(1-m')\cos\theta$, entre le rayon vecteur r et un angle θ que ce rayon est supposé faire avec le rayon primitif a, appartient à une section conique en général, et à l'ellipse en particulier, si on a $m'>\frac{1}{2}$. Ce cas est le seul que nous considérons.

Au moyen de l'ellipse construite d'après l'angle subsidiaire θ, on pourra construire la vraie trajectoire cherchée, puisque r étant le même de part et d'autre, il suffira de prendre l'anomalie $\varphi=\frac{\theta}{\sqrt{(1-n)}}$.

On peut aussi déterminer directement l'orbite par l'équation $\frac{a}{r}-m'=(1-m')\cos[\varphi\sqrt{(1-n)}]$; et on voit que depuis l'apside primitive $r=a$, jusqu'à l'apside suivante $r=\frac{a}{2m'-1}$, l'angle φ parcouru par le rayon vecteur sera $\frac{\pi}{\sqrt{(1-n)}}$; tandis que dans l'orbite simplement elliptique cet angle $=\pi$.

619. Soit 2°. $n = 1$, on aura $d\varphi = (2m)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(z-1)}}$; et en intégrant $\varphi = \frac{2}{\sqrt{(2m)}} \cdot \sqrt{(z-1)}$, ou $z = 1 + \frac{1}{2} m\varphi^2 = \frac{a}{r}$. De là il suit que r va toujours en diminuant et devient nul lorsque $\varphi = \infty$, c'est-à-dire que le corps décrit une spirale autour du centre des forces, et finit par tomber au centre même après une infinité de révolutions. Mais il est aisé de voir qu'à cause de l'accélération du mouvement, le temps de la chute doit être une quantité finie.

En effet l'équation $dt = \frac{r^2 d\varphi}{a\mathrm{V}}$ donne

$$dt = \frac{a}{\mathrm{V}} \cdot \frac{d\varphi}{(1 + \frac{1}{2} m\varphi^2)^2},$$

d'où résulte l'expression du temps

$$t = \frac{a}{\mathrm{V}} \left(\frac{\frac{1}{2}\varphi}{1 + \frac{1}{2} m\varphi^2} + \frac{1}{\sqrt{(2m)}} \text{ arc tang} (\varphi \sqrt{\tfrac{1}{2} m}) \right),$$

et lorsque $\varphi = \infty$ on a $t = \frac{a}{\mathrm{V}} \cdot \frac{\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{(2m)}}$.

620. Soit 3°. $n > 1$ et $\frac{m}{n-1} = m'$, on aura l'équation

$$d\varphi \sqrt{(n-1)} = \frac{dz}{\sqrt{[(z-1)(z+1+2m')]}}$$

et son intégrale, en faisant $z = 1 + x^2$, sera

$$\tfrac{1}{2}\varphi \sqrt{(n-1)} = \log \left(\frac{x + \sqrt{(2 + 2m' + x^2)}}{\sqrt{(2 + 2m')}} \right).$$

Dans ce cas le corps décrit encore une spirale autour du centre des forces, et il y parvient, après une infinité de révolutions, dans un temps fini qu'il est facile de déterminer par l'intégrale

$$\frac{2a}{\mathrm{V}} \int \frac{dx}{(1 + x^2)^2 \sqrt{(2 + 2m' + x^2)}},$$

prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$.

Remarque générale.

621. Connaissant l'orbite décrite en vertu de la force centrale R et de la vitesse initiale V dirigée perpendiculairement au rayon vecteur a, on peut déterminer généralement l'orbite décrite en vertu de la force centrale $\mathrm{R}' = \mathrm{R} + \frac{\mathrm{C}}{r^3}$, et d'une vitesse initiale quelconque V', pourvu que la quan-

tité $a^2V'^2 - C$ soit positive, ou que la force centrifuge initiale $\frac{V'^2}{a}$, soit plus grande que la force centrale $\frac{C}{a^3}$.

En effet si on fait $V^2 = V'^2 - \frac{C}{a^3}$, la première orbite sera déterminée par l'équation

$$d\varphi = \frac{\pm \frac{a\,dr}{r^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{r^2} - \frac{2}{V^2}\int R\,dr\right)}},$$

et la seconde par l'équation

$$\frac{V}{V'}\,d\varphi' = \frac{\pm \frac{a\,dr}{r^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{r^2} - \frac{2}{V^2}\int R\,dr\right)}}.$$

Ainsi pour une même valeur de r on aura $\frac{V}{V'}\,d\varphi' = d\varphi$, ou en intégrant $\varphi' = \frac{V'}{V}\varphi$, c'est-à-dire que les amplitudes φ' et φ seront entre elles dans le même rapport que les vitesses initiales V' et V.

622. Il ne faudrait pas conclure de là que la seconde orbite n'est autre chose que la première à laquelle on donnerait un mouvement de rotation uniforme autour du centre des forces, pendant que le corps s'y meut; car, quoique ce mouvement pourrait être supposé tel que les deux corps coïncidassent dans les apsides de leurs orbites, ils ne coïncideraient pas dans les points intermédiaires, parce que l'angle φ ne croît pas en général proportionnellement au temps.

On ne doit donc considérer le résultat que nous venons d'obtenir, que comme une propriété géométrique qui permet de construire l'une des deux orbites par le moyen de l'autre, en observant que les amplitudes φ' et φ qui répondent à un même rayon sont comme les vitesses initiales V' et V. D'ailleurs l'égalité des rapports $\frac{d\varphi}{V}$, $\frac{d\varphi'}{V'}$, prouve que les temps t et t' sont égaux, c'est-à-dire que les deux corps employeront des temps égaux pour parvenir à des distances égales du centre des forces.

623. Dans l'exemple IV nous avons résolu généralement le problème pour la force $R = \frac{A}{r^3} + Br$; au moyen de la remarque précédente la solution peut être étendue au cas où l'on a $R = \frac{A}{r^3} + Br + \frac{C}{r^3}$. C'est la forme la plus

générale qui permette de résoudre la question par les fonctions elliptiques, tant qu'on admet le terme Br dans l'expression de cette force; mais en n'admettant pas ce terme, on peut parvenir à des solutions encore plus générales, ainsi qu'on va le voir dans l'exemple suivant.

Exemple VI. $R = \frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^3} + \frac{C}{r^4} + \frac{D}{r^5}$.

624. Alors on a $\int R dr = A\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) + \frac{B}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{C}{3}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{r^3}\right) + \frac{D}{4}\left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{r^4}\right)$. Soit $r = \frac{a}{z}$, $\frac{B}{a^2V^2} = h$, $\frac{A}{aV^2(1-h)} = m$, $\frac{2C}{3a^3V^2(1-h)} = n$, $\frac{D}{2a^4V^2(1-h)} = p$, on aura, en supposant $1-h$ positif, l'équation

$$(1-h)^{\frac{1}{2}} d\varphi = \frac{\pm dz}{\sqrt{[1 - z^2 - 2m(1-z) - n(1-z^3) - p(1-z^4)]}}.$$

La quantité sous le radical étant représentée par $(1-z)P$, nous supposerons le polynome du troisième degré $P = (z-\alpha)P'$, P' étant un polynome du second degré qui ne doit pas changer de signe depuis $z = 1$ jusqu'à $z = \alpha$. En effet, si une pareille décomposition du polynome P n'avait pas lieu, l'orbite du corps devrait ou s'étendre à l'infini, ou passer par le centre; deux cas dont nous faisons ordinairement abstraction.

La quantité sous le radical étant donc de la forme $(1-z)(z-\alpha)P'$, nous ferons $z = \cos^2\psi + \alpha\sin^2\psi$, et nous aurons

$$(1-h)^{\frac{1}{2}} d\varphi = \frac{2d\psi}{\sqrt{P'}}.$$

Maintenant la quantité P', qui est un polynome du second degré en z, ne devant pas se réduire à zéro dans tout l'intervalle de $z = 1$ à $z = \alpha$, cette quantité aura ses deux facteurs imaginaires, ou bien elle aura deux facteurs réels de la forme $L(\cos^2\psi + \beta^2\sin^2\psi)$; car elle n'en peut pas avoir de la forme $L(\cos^2\psi - \beta^2\sin^2\psi)$, puisqu'elle s'évanouirait en faisant $\tang\psi = \frac{1}{\beta}$, et qu'ainsi on aurait pour $\cos^2\psi + \alpha\sin^2\psi$ une valeur comprise entre 1 et α.

Il n'y a donc que deux cas à examiner selon qu'on a

$$P' = L(\cos^4\psi + 2\beta\cos\lambda\cos^2\psi\sin^2\psi + \beta^2\sin^4\psi), \text{ ou}$$
$$P' = L(\cos^2\psi + \beta^2\sin^2\psi)(\cos^2\psi + \gamma^2\sin^2\psi).$$

Premier cas. $P' = L(\cos^4\psi + 2\mathcal{C}\cos\lambda\cos^2\psi\sin^2\psi + \mathcal{C}^2\sin^4\psi)$.

625. On aura alors à intégrer l'équation

$$L^{\frac{1}{2}}(1-h)^{\frac{1}{2}}d\varphi = \frac{2d\psi}{\sqrt{(\cos^4\psi + 2\mathcal{C}\cos\lambda\cos^2\psi\sin^2\psi + \mathcal{C}^2\sin^4\psi)}}.$$

Pour cela soit $\tang\psi = k\tang\frac{\omega}{2}$, ensuite $k^2 = \frac{1}{\mathcal{C}}$, et $c = \sin\frac{1}{2}\lambda$, on aura

$$(1-h)^{\frac{1}{2}}d\varphi = \frac{1}{\sqrt{(\mathcal{C}L)}}\cdot\frac{d\omega}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}},$$

et en intégrant

$$(1-h)^{\frac{1}{2}}\varphi = \frac{1}{\sqrt{(\mathcal{C}L)}}F(c, \omega).$$

Cette équation jointe à la valeur de z exprimée en ω, savoir :

$$z = \frac{\cos^2\frac{1}{2}\omega + \alpha k^2\sin^2\frac{1}{2}\omega}{\cos^2\frac{1}{2}\omega + k^2\sin^2\frac{1}{2}\omega} = \frac{a}{r},$$

détermine entièrement l'orbite.

Si on appelle φ_1 l'angle que le rayon vecteur doit parcourir pour passer de l'apside $r = a$ à l'apside $r = \frac{a}{\alpha}$, on fera $\omega = \pi$, ce qui donnera

$$\varphi_1 = \frac{2F'c}{\sqrt{[\mathcal{C}L(1-h)]}}.$$

Au moyen de cette valeur, on peut prolonger l'orbite indéfiniment, car le rayon vecteur r qui répond à l'amplitude $\varphi < \varphi_1$, répondra successivement aux amplitudes $2\varphi_1 - \varphi$, $2\varphi_1 + \varphi$, $4\varphi_1 - \varphi$, $4\varphi_1 + \varphi$, etc., et en général à l'amplitude $2n\varphi_1 \pm \varphi$, n étant un entier quelconque.

Pour trouver l'expression du temps, on aura la formule à intégrer $\frac{Vdt}{a} = \frac{d\varphi}{z^2}$, ou

$$\frac{Vdt}{a} = \frac{(1-h)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(\mathcal{C}L)}}\cdot\left(\frac{\cos^2\frac{1}{2}\omega + k^2\sin^2\frac{1}{2}\omega}{\cos^2\frac{1}{2}\omega + \alpha k^2\sin^2\frac{1}{2}\omega}\right)^2\frac{d\omega}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}}.$$

Mais comme les calculs nécessaires pour cette intégration ont été développés dans d'autres occasions, nous ne croyons pas devoir nous y arrêter.

Second cas. $P' = L(\cos^2\psi + \mathcal{C}^2\sin^2\psi)(\cos^2\psi + \gamma^2\sin^2\psi)$.

626. Alors on aura à intégrer l'équation

$$L^{\frac{1}{2}}(1-h)^{\frac{1}{2}}d\varphi = \frac{2d\psi}{\sqrt{(\cos^2\psi + \mathcal{C}^2\sin^2\psi)}.\sqrt{(\cos^2\psi + \gamma^2\sin^2\psi)}},$$

soit $\mathcal{C}$ la plus petite des deux quantités $\mathcal{C}$, γ, et soit $\tang \psi = \frac{1}{\gamma} \tang \omega$, $c^2 = 1 - \frac{\mathcal{C}^2}{\gamma^2}$, on aura

$$(1-h)^{\frac{1}{2}} d\varphi = \frac{2}{\gamma\sqrt{L}} \cdot \frac{d\omega}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}},$$

et par conséquent

$$(1-h)^{\frac{1}{2}} \varphi = \frac{2}{\gamma\sqrt{L}} F(c, \omega).$$

Ainsi l'angle φ se détermine encore très simplement par la fonction de première espèce $F(c, \omega)$, et le rayon vecteur correspondant r par l'équation $\frac{a}{r} = \cos^2\psi + \alpha \sin^2\psi = \frac{\gamma^2\cos^2\omega + \alpha\sin^2\omega}{\gamma^2\cos^2\omega + \sin^2\omega}$; l'orbite est donc entièrement connue et déterminée, puisque le secteur compris d'une apside à la suivante, se répète à l'infini dans des positions alternatives.

627. Pour avoir l'expression du temps, il faudra intégrer la formule

$$dt\sqrt{(1-h)} = \frac{2a}{\sqrt{\gamma}\sqrt{L}} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \frac{d\omega}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}}.$$

Soit $Z = \int \frac{1}{z^2} \cdot \frac{d\omega}{\Delta}$, si l'on fait $\nu = \frac{\alpha}{\gamma^2} - 1$, $\frac{\alpha - 1}{1-\gamma^2} = \delta$, et $1 + \nu \sin^2\varphi = D$, on aura $\frac{1}{z} = \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2\nu}\left(1 + \frac{\delta}{D}\right)$, et par conséquent

$$Z = \left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma^2\nu}\right)^2 \int \left(1 + \frac{2\delta}{D} + \frac{\delta^2}{D^2}\right) \frac{d\omega}{\Delta}.$$

Mais par une réduction connue on a

$$\int \frac{d\omega}{D^2\Delta} = \frac{\frac{1}{2}\nu}{(1+\nu)\left(1+\frac{c^2}{\nu}\right)} \left\{ \left[\frac{\Delta \sin\omega\cos\omega}{D} - \left(1 + \frac{c^2}{\nu}\right) F(c,\omega) + E(c,\omega) \right. \right.$$
$$\left. \left. + \left(1 + \frac{2+2c^2}{\nu} + \frac{3c^2}{\nu^2}\right) \Pi(\nu, c, \omega) \right] \right\}$$

et $\int \frac{d\omega}{D\Delta} = \Pi(\nu, c, \omega)$. Donc la valeur de Z s'exprimera par les fonctions $F(c, \omega)$, $E(c, \omega)$, $\Pi(\nu, c, \omega)$, et alors on aura

$$t\sqrt{(1-h)} = \frac{2a}{\sqrt{\gamma}\sqrt{L}} \cdot Z.$$

628. Le cas le plus simple est celui où l'on aurait $\alpha = \gamma^2$, ce qui donne $\nu = 0$, et $\frac{1}{z} = 1 + \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right)\sin^2\omega$; alors l'intégrale $Z = \int \frac{1}{z^2} \cdot \frac{d\omega}{\Delta}$ se développe ainsi

$$(\gamma^2 - \mathcal{C}^2)^2 Z = (1-\mathcal{C}^2)^2 F(c,\omega) - 2(1-\mathcal{C}^2)(1-\gamma^2) E(c,\omega) + (1-\gamma^2)^2 \int \Delta^3 d\omega.$$

D'ailleurs on a

$$\int \Delta^3 d\omega = \tfrac{1}{3} c^2 \Delta \sin\omega \cos\omega + \tfrac{2}{3}(2 - c^2) \mathrm{E}(c, \omega) - \tfrac{1}{3} b^2 \mathrm{F}(c, \omega);$$

ainsi dans ce cas l'intégrale Z et par conséquent l'expression du temps ne dépend que des fonctions de première et de seconde espèce.

629. Appliquons les nombres aux résultats généraux du second cas. Soit $m = \frac{1}{3}$, $n = \frac{2}{4}$, $p = \frac{1}{8}$, la quantité sous le radical étant représentée par $(1 - z)\mathrm{P}$, ou aura $\mathrm{P} = \frac{1}{8}(-\frac{1}{3} + 5z - 3z^2 - z^3)$, et en décomposant ce polynome en ses facteurs, on trouve

$$\mathrm{P} = \tfrac{1}{8}(z - 0.069644)(1.137608 - z)(4.207252 + z).$$

On devra donc faire $\alpha = 0.069644$, et le rayon vecteur dont la valeur à l'origine du mouvement est $r = a$, croîtra jusqu'à la valeur $r = \frac{a}{\alpha} = a(14.35873)$, laquelle aura lieu dans l'apside supérieure.

La substitution $z = \cos^2\psi + \alpha \sin^2\psi$ étant faite dans les deux autres facteurs de P, la quantité désignée par $\mathrm{P}' = \mathrm{L}(\cos^2\psi + \beta^2 \sin^2\psi)(\cos^2\psi + \gamma^2 \sin^2\psi)$, sera déterminée par les valeurs logarithmiques de ses coefficiens, comme il suit:

$$\mathrm{L} = (8.9522623), \quad \beta^2 = (9.9144211), \quad \gamma^2 = (0.8899130).$$

De là résulte $b^2 = \frac{\beta^2}{\gamma^2} = (9.0245081)$, $b = (9.5122540) = \cos(71^\circ\, 1'\, 19''74)$, $c = \sin(71^\circ\, 1'\, 19''\, 74) = (9.9757278)$. Cela posé l'angle φ_1 parcouru depuis l'apside inférieure, jusqu'à l'apside supérieure, se détermine, en supposant $h = 0$ ou $\mathrm{B} = 0$, par l'équation $\varphi_1 = \frac{2}{\gamma\sqrt{\mathrm{L}}} \mathrm{F}'c$, d'où l'on tire $\varphi_1 = 350^\circ.67864$. Ainsi le rayon vecteur fera plus de 350°, c'est-à-dire, presque une révolution entière, pour parvenir de l'apside inférieure $r = a$, à l'apside supérieure $r = a(14.35873)$.

Les deux cas généraux que nous venons de développer supposent la quantité $1 - h$ positive; si elle était nulle ou négative la solution dépendrait toujours des mêmes méthodes, et il est inutile de s'y arrêter.

Exemple III. Des orbites très peu différentes du cercle.

630. Il convient d'examiner particulièrement le cas où la vitesse initiale est telle que pour une force donnée R, fonction de la distance r, l'orbite décrite est très peu différente du cercle.

Soit $r = a(1 + x)$, x étant une quantité que nous regarderons comme

très petite, on aura $R = A + A'ax + A''.\frac{a^2x^2}{2} +$ etc., A, A', A'' étant ce que deviennent R, $\frac{dR}{dr}$, $\frac{ddR}{dr^2}$, etc., lorsqu'on fait $r = a$. Cette valeur de R donne $\int Rdr = \int Radx = Aax + A'.\frac{a^2x^2}{2} + A''.\frac{a^3x^3}{2.3} +$ etc.; substituant cette valeur dans l'équation de l'orbite et faisant pour abréger $\frac{Aa}{V^2} = m$, $\frac{A'a^2}{V^2} = n$, $\frac{A''a^3}{V^2} = p$, on aura

$$d\varphi = \frac{\pm dx(1+x)^{-2}}{\sqrt{[(2-2m)x-(3+n)x^2+(4-\frac{1}{3}p)x^3-\text{etc.}]}}.$$

La quantité sous le radical devant être positive, on voit que x, dont la valeur primitive est nulle et qui doit toujours rester très petite, sera de même signe que $1-m$; d'ailleurs $1-m$ lui-même doit être une quantité très petite du même ordre que le *maximum* de x; en effet, pour que l'orbite décrite soit très peu différente du cercle, il faut que la force centrale A diffère très peu de la force centrifuge $\frac{V^2}{a}$, et qu'ainsi le rapport de ces deux forces exprimé par m soit très peu différent de l'unité.

631. Soit donc $1-m = \omega$, ω étant une quantité très petite, positive ou négative, et soit $x = \omega y$, on aura sans ambiguité, y étant toujours positive :

$$d\varphi = \frac{dy\,(1+\omega y)^{-2}}{\sqrt{[2y-(3+n)y^2+(4-\frac{1}{3}p)\omega y^3-\text{etc.}]}}.$$

Supposons que la série sous le radical ait pour facteur $k-y$, k étant déterminé par l'équation

$$2 = (3+n)k - (4-\tfrac{1}{3}p)\,\omega k^2 + \text{etc.}$$

Cette série deviendra $(ky-y^2)(3+n-(4-\frac{1}{3}p)\omega(k+y)+\text{etc.})$, donc

$$d\varphi = \frac{dy}{\sqrt{(ky-y^2)}} \cdot \frac{(1+\omega y)^{-2}}{\sqrt{[3+n-(4-\frac{1}{3}p)\,\omega(k+y)+\text{etc.}]}}.$$

Si on développe cette quantité en rejettant les termes de l'ordre ω^2, et qu'on fasse pour abréger $f = \frac{2-\frac{1}{6}p}{3+n}$, on aura

$$d\varphi = \frac{dy}{\sqrt{(ky-y^2)}}\left(\frac{1-2\omega y+f\omega(k+y)}{\sqrt{(3+n)}}\right).$$

Soit $y = k\sin^2\frac{1}{2}\psi = \frac{1}{2}k(1-\cos\psi)$, on aura

$$d\varphi = \frac{d\psi}{\sqrt{(3+n)}}\left[1+(\tfrac{3}{2}f-1)k\omega+(1-\tfrac{1}{2}f)k\omega\cos\psi\right],$$

et en intégrant

$$\varphi = \frac{\psi}{\sqrt{(3+n)}}\left(1+\left(\tfrac{3}{2}f-1\right)k\omega\right)+\frac{\left(1-\frac{1}{2}f\right)k\omega}{\sqrt{(3+n)}}\sin\psi.$$

Lorsque le corps est parvenu à sa seconde apside, on a $y = k$, $x = \omega k$, $\psi = \pi$; et par conséquent

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{\sqrt{(3+n)}}\left[1+\left(\tfrac{3}{2}f-1\right)k\omega\right] = \frac{\pi}{\sqrt{\left[3+n+k\omega\left(2n+\frac{1}{2}p\right)\right]}};$$

résultat où il faut substituer la valeur de k qui se déduit de l'équation $2 = (3+n)k-\left(4-\frac{1}{3}p\right)\omega k^2$, savoir $k = \frac{2}{3+n-4f\omega}$, ou simplement $k = \frac{2}{3+n}$, puisqu'on rejette dans la formule les termes de l'ordre ω^2.

Il serait facile au reste de déduire de la même analyse la valeur de φ_1 en poussant l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre ω^2 ou d'un ordre plus élevé.

632. Si on veut avoir l'expression du temps, il faudra intégrer la formule $dt = \frac{a}{V}\,d\varphi\,(1+x)^2$, ou en prenant pour unité le temps que le corps employerait à parcourir le rayon a avec la vitesse initiale V,

$$dt = d\varphi\,(1+\omega y)^2 = \frac{dy}{\sqrt{(ky-y^2)}}\left(\frac{1+f\omega(k+y)}{\sqrt{(3+n)}}\right).$$

Soit toujours $y = k\sin^2\frac{1}{2}\psi$, on aura

$$dt = \frac{d\psi}{\sqrt{(3+n)}}\left[1+fk\omega\left(\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}\cos\psi\right)\right],$$

et par conséquent

$$t = \frac{\psi\left(1+\frac{3}{2}fk\omega\right)}{\sqrt{(3+n)}}-\frac{\frac{1}{2}fk\omega}{\sqrt{(3+n)}}\sin\psi.$$

Soit t_1 le temps employé à parvenir de l'apside $r = a$ à l'apside suivante $r = a(1+k\omega)$, on aura

$$t_1 = \frac{\pi\left(1+\frac{3}{2}fk\omega\right)}{\sqrt{(3+n)}} = \frac{\pi}{\sqrt{\left[3+n-k\omega\left(6-\frac{1}{2}p\right)\right]}}.$$

633. Soit par exemple $R = \frac{M}{r^2}\left(1+\frac{\epsilon r^{\nu+2}}{a^{\nu+2}}\right)$, ϵ étant une quantité très petite de l'ordre ω; on aura

$$m = \frac{M}{aV^2}(1+\epsilon),$$

$$n = \frac{M}{aV^2}(-2+\nu\epsilon),$$

$$p = \frac{M}{aV^2}\left[6+\nu(\nu-1)\epsilon\right];$$

et parce que $m = 1 - \omega$, on tire de ces valeurs, en omettant les termes du second ordre,

$$\frac{M}{aV^2} = 1 - \omega - \beta,$$
$$n = -2 + 2\omega + 2\beta + \nu\beta,$$
$$p = 6 - 6\omega - 6\beta + \nu(\nu - 1)\beta.$$

Substituant les valeurs de n et p dans la formule qui donne φ_1, on devra faire en même temps $k = \frac{2}{3+n} = 2$, et on aura

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{\sqrt{[1 + (\nu + 2)\beta]}}.$$

Le cas de $\beta = 0$ qui est celui de $R = \frac{M}{r^2}$, donne $\varphi_1 = \pi$, ce qui a lieu en effet dans le mouvement elliptique où les deux apsides consécutives sont diamétralement opposées.

Soit $\nu = 1$, et $\beta = -\frac{1}{357.45}$, on aura $\varphi_1 = \frac{\pi}{\sqrt{(1+3\beta)}} = 180° \, 45' \, 36''$, ce qui est conforme à l'exemple donné par Newton, *Princ. Math. Lib. I. Prop. XLV.*

Exemple VIII. $R = \frac{M}{r}$.

634. Alors on a $\int R dr = M \log. \frac{r}{a}$, et en faisant $\frac{M}{V^2} = m$, $\frac{a}{r} = z$, l'équation différentielle de l'orbite sera

$$d\varphi = \frac{\pm dz}{\sqrt{(1 - z^2 + 2m \log z)}}.$$

La quantité sous le radical s'évanouit lorsque $z = 1$; supposons qu'elle s'évanouisse encore lorsque $z = \alpha$, α étant une racine de l'équation

$$0 = 1 - \alpha^2 + 2m \log \alpha;$$

on trouvera que cette racine est toujours réelle, et que $1 - \alpha$ est de même signe que $1 - m$.

En effet soit $m < 1$, si on fait $\alpha = 1 - \omega$, ω étant une quantité positive infiniment petite, le second membre de l'équation précédente sera égal à $2\omega(1 - m)$, quantité positive. Si on fait ensuite $\alpha = \omega$, le second membre deviendra $-2m \log \frac{1}{\omega}$, quantité négative infinie. Donc il y a une valeur réelle de α comprise entre 1 et zéro.

On démontrera semblablement que si on a $m > 1$, il y aura une valeur réelle de α comprise entre 1 et $\frac{1}{6}$.

Si on a $m = 1$, il faudra qu'on ait aussi $z = 1$, car en faisant $z = 1 \pm \omega$, ω étant infiniment petit, la quantité sous le radical se réduit à $-2\omega^2$. On a donc $\omega = 0$, ou $z = 1$, de sorte que l'orbite sera un cercle comme l'indique d'ailleurs l'égalité qui a lieu entre la force centrifuge initiale $\frac{V^2}{a}$ et la force centrale $\frac{M}{a}$.

635. Puisque z a pour limites $z = 1$, $z = \alpha$, soit $z = \cos^2\psi + \alpha \sin^2\psi$, on aura d'abord, en supposant $m < 1$, et par conséquent $\alpha < 1$,

$$d\varphi = \frac{2(1-\alpha)\,d\psi \sin\psi \cos\psi}{\sqrt{(1 - z^2 + 2m \log z)}}.$$

Soit $1 - \alpha = \mathcal{C}$, et $\mathcal{C} \sin^2\psi = p$, on aura $z = 1 - p$, et la quantité sous le radical étant développée en série deviendra

$$p\left(2 - 2m - (1+m)p - \frac{2m}{3}p^2 - \frac{2m}{4}p^3 - \text{etc.}\right).$$

On aura donc par une première réduction :

$$d\varphi = \frac{2\sqrt{\mathcal{C}}.d\psi \cos\psi}{\sqrt{\left(2 - 2m - (1+m)\mathcal{C}\sin^2\psi - \frac{2m}{3}\mathcal{C}^2\sin^4\psi - \frac{2m}{4}\mathcal{C}^3\sin^6\psi - \text{etc.}\right)}}.$$

La série sous le radical est déjà convergente puisqu'on a $\mathcal{C} < 1$, mais on peut lui donner une forme plus simple en observant qu'elle doit s'évanouir lorsque $\sin\psi = 1$, et qu'ainsi elle doit être divisible par $1 - \sin^2\psi$. Supposons que le quotient est $A + A'\sin^2\psi + A''\sin^4\psi + \text{etc.}$, on aura

$$A = 2 - 2m = (1+m)\mathcal{C} + \frac{2m}{3}\mathcal{C}^2 + \frac{2m}{4}\mathcal{C}^3 + \text{etc.},$$

$$A' = A - (1+m)\mathcal{C} = \frac{2m}{3}\mathcal{C}^2 + \frac{2m}{4}\mathcal{C}^3 + \text{etc.},$$

$$A'' = A' - \frac{2m}{3}\mathcal{C}^2 = \frac{2m}{4}\mathcal{C}^3 + \frac{2m}{5}\mathcal{C}^4 + \text{etc.},$$

$$A''' = A'' - \frac{2m}{4}\mathcal{C}^3 = \frac{2m}{5}\mathcal{C}^4 + \text{etc.},$$

etc.

Ces coefficiens forment, comme on voit, une série de quantités positives, qui décroissent dans une raison dont la limite est $\mathcal{C}$. Il en résulte une expression simplifiée de $d\varphi$, savoir,

$$d\varphi = \frac{2\sqrt{\mathcal{C}}.d\psi}{\sqrt{(A + A'\sin^2\psi + A''\sin^4\psi + A'''\sin^6\psi + \text{etc.})}}.$$

636. La meilleure manière d'intégrer cette formule serait de développer la quantité $(A + A' \sin^2 \psi + A'' \sin^4 \psi + \text{etc.})^{-\frac{1}{2}}$ en une série de la forme $C + 2C' \cos 2\psi + 2C'' \cos 4\psi + \text{etc.}$, d'où l'on déduirait

$$\varphi = 2\sqrt{\epsilon}\,(C\psi + C' \sin 2\psi + \tfrac{1}{2} C'' \sin 4\psi + \tfrac{1}{3} C''' \sin 6\psi + \text{etc.}).$$

Mais la difficulté est de trouver avec une exactitude suffisante la valeur des coefficiens C, C′, C″, etc.

Appelons P la quantité $A + A' \sin^2 \psi + A'' \sin^4 \psi + \text{etc.}$, qui est la valeur développée de $\frac{1 - z^2 + 2m \log z}{\epsilon \sin^2 \psi \cos^2 \psi}$, en y faisant $z = 1 - \epsilon \sin^2 \psi$; on aura en général

$$\tfrac{1}{2}\pi C = \int P^{\frac{1}{2}} d\psi,\ \tfrac{1}{2}\pi C' = \int P^{\frac{1}{2}} d\psi \cos 2\psi,\ \tfrac{1}{2}\pi C'' = \int P^{\frac{1}{2}} d\psi \cos 4\psi,\ \text{etc.},$$

ces intégrales étant prises depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = \frac{1}{2}\pi$.

On peut donc trouver par les quadratures les valeurs des coefficiens C, C′, C″, etc.; mais le calcul de ces coefficiens deviendrait extrêmement pénible, si on voulait prolonger la suite assez loin pour qu'elle pût donner la valeur de φ exacte jusqu'à dix décimales. Nous donnerons bientôt un moyen plus facile de parvenir à ce degré d'approximation. Examinons auparavant quelques cas susceptibles d'une solution assez simple.

637. Supposons l'angle ψ assez petit pour qu'on puisse négliger le troisième terme et les suivans dans la suite $2 - 2m - (1 + m)\,\epsilon \sin^2 \psi - \frac{2m}{3}\epsilon^2 \sin^4 \psi - \text{etc.}$; si on fait $\epsilon^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1+m}{2-2m}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \psi = \sin \theta$, on aura alors $d\varphi = \frac{d\theta\sqrt{2}}{\sqrt{(1-m^2)}}$, ce qui donne $\varphi = \frac{\theta\sqrt{2}}{\sqrt{(1-m^2)}}$.

Cette valeur très simple sera en même temps très approchée, si le troisième terme de la série précédente est négligeable. On pourra aussi tenir compte de ce terme et ne négliger par conséquent que les termes de l'ordre $\sin^6 \psi$, en faisant $d\varphi = \frac{d\theta\sqrt{2}}{\sqrt{(1-m^2)}}\left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{m(1-m)}{(1+m)^2}\theta^4\right)$, ce qui donne en intégrant $\varphi = \frac{\theta\sqrt{2}}{\sqrt{(1-m^2)}}\left(1 + \frac{2}{15} \cdot \frac{m(1-m)}{(1+m)^2}\theta^4\right)$.

Soit, par exemple, $m = \frac{1}{2}$ et $\theta = 5°$, on trouvera $\alpha = 0.45076\ 3652017$, $\theta = 4°.53730\ 449165$. Réduisant cette valeur en parties du rayon, on aura le premier terme...

$$\theta\sqrt{\left(\frac{2}{1-m^2}\right)} = \theta\sqrt{\tfrac{4}{3}} = 0.12931\ 82023\ 37$$

Correction due au second terme ..... $+ 753\ 45$

Valeur corrigée $\varphi = 0.12931\ 82776\ 82.$

Cette même valeur tirée d'une table que nous donnerons ci-après, est $\varphi = 0.12931\ 82780$; la différence n'est donc que d'environ trois unités décimales du 10ème ordre.

638. La formule précédente ne peut s'appliquer qu'à des valeurs assez petites de l'auxiliaire ψ; mais on peut toujours trouver deux limites entre lesquelles sera comprise la valeur de φ, quel que soit l'angle ψ.

En effet si dans la série $A + A' \sin^2\psi + A'' \sin^4\psi +$ etc., on néglige tous les termes qui suivent le troisième, il est évident que comme ces termes sont toujours positifs, on aura

$$\varphi < 2\sqrt{6}\int\frac{d\psi}{\sqrt{(A + A'\sin^2\psi + A''\sin^4\psi)}}.$$

Si au contraire on met le seul terme $N \sin^4\psi$ au lieu de la suite ..... $\sin^4\psi\,(A'' + A'''\sin^2\psi + A^{\text{iv}}\sin^4\psi +$ etc.), en prenant $N = A'' + A''' + A^{\text{iv}} +$ etc., il est visible qu'on aura toujours

$$\varphi > 2\sqrt{6}\int\frac{d\psi}{\sqrt{(A + A'\sin^2\psi + N\sin^4\psi)}}.$$

Reste donc à trouver l'expression de ces deux intégrales.

Pour cet effet soit $\tang\psi = k \tang \frac{1}{2}\omega$, ensuite $k^4 = \frac{A}{A + A' + A''}$, $c = \sin\theta$, $\cos 2\theta = k^2\left(\frac{2A + A'}{2A}\right)$, on aura $\frac{d\psi}{\sqrt{(A + A'\sin^2\psi + A''\sin^4\psi)}} = \frac{k}{2\sqrt{A}} \cdot \frac{d\omega}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\omega)}}$. Donc $\varphi < \frac{k\sqrt{6}}{\sqrt{A}}\,F(c, \omega)$.

Soit pareillement $\tang\psi = k' \tang \frac{1}{2}\omega'$, ensuite $k'^4 = \frac{A}{A + A' + N}$, $c' = \sin\theta'$, $\cos 2\theta' = k'^2\left(\frac{2A + A'}{2A}\right)$, on aura $\varphi > \frac{k'\sqrt{6}}{\sqrt{A}}\,F(c', \omega')$. Telles sont donc les deux limites entre lesquelles se trouvera toujours la valeur de φ : ces deux limites seront fort rapprochées lorsque ψ sera très petit, mais elles s'éloigneront l'une de l'autre d'autant plus que ψ s'approchera plus de $\frac{1}{2}\pi$.

Si l'on fait $\psi = \frac{1}{2}\pi$, ce qui donne $\omega = \omega' = \pi$, on aura les limites de φ_1, savoir,

$$\varphi_1 < \frac{2k\sqrt{6}}{\sqrt{A}}\,F^1c, \quad \varphi_1 > \frac{2k'\sqrt{6}}{\sqrt{A}}\,F^1c'.$$

639. Soit comme ci-dessus $m = \frac{1}{2}$, la résolution de l'équation $0 = 1 - \alpha^2 + \log\alpha$, donnera

$$\alpha = 0.45076\ 36520\ 17 = [9.65394\ 88888\ 18],$$
$$\mathfrak{C} = 0.54923\ 63479\ 83 = [9.73975\ 92707\ 46],$$
$$A = 1,$$
$$A' = 0.17614\ 54780\ 25,$$
$$A'' = 0.07559\ 19560\ 43,$$
$$A + A' + A'' = 1.25173\ 74340\ 68.$$

On a d'ailleurs $A + A' + N =$ (ce que devient la quantité..... $\frac{\mathfrak{C}}{1-z} \cdot \frac{1 - z^2 + 2m \log z}{z - \alpha}$, lorsque $z = \alpha$) $= \frac{2m}{\alpha} - 2\alpha = 1.31693\ 01858$.
De là résultent les valeurs suivantes :

$$k = [9.97562\ 16899], \qquad k' = [9.97010\ 93119],$$
$$\cos 2\theta = [9.98790\ 13093], \qquad \cos 2\theta' = [9.97687\ 65532],$$
$$2\theta = 13^\circ\ 27'\ 41''\ 74, \qquad 2\theta' = 18^\circ\ 31'\ 53\ 50,$$
$$\theta = 6^\circ.7308, \qquad \theta' = 9^\circ.265764,$$
$$F'c = [0.1976204], \qquad F'c' = [0.1989671 6],$$
$$\varphi_1 < 2.2087763, \qquad \varphi_1 > 2.1876917.$$

La vraie valeur qu'on trouvera ci-après est $\varphi_1 = 2.1931557$; ainsi la seconde limite est environ trois fois plus près que la première de la valeur exacte.

Construction d'une table des intégrales φ et t, selon la méthode des ordonnées moyennes.

640. On a vu qu'en faisant $p = \mathfrak{C} \sin^2 \psi$, $z = 1 - p$, les intégrales φ et t sont exprimées par les formules :

$$\varphi = \int u d\psi, \quad t = \int \frac{u d\psi}{(1-p)^2},$$

où l'on a $u = \dfrac{2\sqrt{\mathfrak{C}} \cdot \cos\psi}{\sqrt{\left[2 - p + \frac{2m}{p} \log(1-p)\right]}}$, et où il faut observer que le facteur $\frac{a}{V}$ a été omis dans la valeur de t, ce qui suppose qu'on prend pour unité le temps que le corps mettrait à parcourir la distance a avec la vitesse initiale V.

Nous nous proposons maintenant de construire une table de ces deux intégrales, suivant la méthode des ordonnées moyennes, pour le cas de $m = \frac{1}{8}$ qui a déjà fourni quelques applications. Cette table devra donner

les intégrales φ et t, calculées à dix décimales, pour toutes les valeurs de la variable ψ, de degré en degré, depuis $\psi = 0^\circ$ jusqu'à $\psi = 90^\circ$.

641. Pour cela il faudra calculer jusqu'à onze décimales, les auxiliaires P et Q par les formules

$$P = \frac{k \cos \psi}{\sqrt{\left[2 - p + \frac{1}{p} \log (1 - p)\right]}}, \quad Q = \frac{P}{(1-p)^2},$$

où $k = 2\sqrt{6} \cdot \frac{\pi}{180} = [8.41278\ 6998628]$, en donnant à ψ les valeurs successives qui conviennent aux ordonnées moyennes, savoir, $0^\circ \frac{1}{2}$, $1^\circ \frac{1}{2}$, $2^\circ \frac{1}{2}$, ... $89^\circ \frac{1}{2}$.

Chaque valeur de P qui répond à $\psi = n^\circ \frac{1}{2}$ devra être inscrite sur la ligne de $\psi = n^\circ$; ainsi la colonne des ψ depuis $\psi = 0^\circ$ jusqu'à $\psi = 89^\circ$, sera accompagnée de la colonne des P, et par celle-ci on formera les colonnes des différences premières, secondes, troisièmes et quatrièmes de P; ensuite pour avoir chaque différence $\delta\varphi$ correspondante à une valeur donnée de ψ, on appliquera la formule démontrée dans le tom. II,

$$\delta\varphi = P + \frac{1}{24}\left(\delta^2 P^0 - \frac{17}{240}\delta^4 P^{00}\right),$$

laquelle comprend les trois premiers termes d'une suite dont on pourra toujours négliger les termes ultérieurs.

On calculera de même la différence δt au moyen de l'auxiliaire Q et de ses différences successives.

On obtient $\delta^2 P^0$ qui appartient à la ligne de $\psi = -1^\circ$, en répétant sur cette ligne la valeur de P qui répond à $\psi = 0$, car la valeur de P est la même pour $\psi = -0^\circ \frac{1}{2}$ que pour $\psi = +0^\circ \frac{1}{2}$. On obtiendrait de même $\delta^2 P^{00}$, si cela était nécessaire, en inscrivant sur la ligne de $\psi = -2^\circ$, la même valeur de P qui est placée sur la ligne de $\psi = 1^\circ$.

On observera d'ailleurs les préceptes que nous avons donnés dans l'exposition de la méthode, pour déduire des formules les résultats les plus exacts qu'elles comportent, c'est-à-dire, pour avoir dans notre exemple les valeurs de φ et de t exactes, autant qu'il est possible, jusque dans la dixième décimale.

642. Nous joignons ici, pour servir d'exemple dans des calculs analogues, les valeurs des auxiliaires P et Q, en omettant les colonnes des différences qui sont faciles à suppléer. Ces auxiliaires ont été calculées en général par les formules que nous avons rapportées. Mais on a simplifié le calcul de P

pour les petites valeurs de ψ, en mettant dans son dénominateur la valeur développée de $\log(1-p)$.

D'après ces auxiliaires et leurs différences, on a construit la table des valeurs de φ et t, qui sert à résoudre le problème proposé dans le cas de $m=\frac{1}{2}$. Elle donne pour $\psi=\frac{1}{2}\pi$ les fonctions complètes

$$\varphi_1 = 2.19315\ 56879 = 125^\circ.65856\ 47317, \quad t_1 = 5.11846\ 14195;$$

cette dernière valeur suppose, comme nous l'avons dit, $\frac{a}{V}$ pour l'unité du temps. Voici maintenant deux exemples qui feront connaître l'usage de cette table.

Soit 1°. $\psi = 100$ circ. $+ 215^\circ = 36215^\circ$; il faudra donner à ψ la forme $\psi = n.180^\circ \pm \psi$, n étant un nombre entier et ψ' un reste $< \frac{1}{2}\pi$: on aura ainsi $n = 201$, et $\pm\psi' = 35^\circ$. Au moyen de la valeur $\psi' = 35^\circ$, on trouve immédiatement dans la table $\varphi' = 0.89562\ 47687$ et $t' = 1.03083\ 73479$; donc l'anomalie $\varphi = 2n\varphi_1 + \varphi' = 882.54421\ 13045$, et le temps $t = 2nt_1 + t' = 2058.65232\ 79869$. La valeur de φ réduite en degrés comprend 140 circonférences plus un reste de $166^\circ.05854\ 14472$; c'est ce dernier angle qui donne la direction du rayon vecteur dont la valeur se tire de l'équation $\frac{a}{r} = 1 - \epsilon \sin^2 35^\circ$. On a donc le lieu du corps et le temps du mouvement qui répondent à la valeur donnée de ψ.

Soit 2°. $t = 1000 = 2nt_1 \pm t'$, on aura $2n = 196$, $\pm t' = -3.21843\ 82220$. La valeur de ψ qui répond à cette valeur de t', se trouve par l'interpolation $\psi' = 71^\circ\ 63555\ 64816$. De là $\varphi' = 1.77617\ 87109$, et $\varphi = 196\varphi_1 - \varphi' = 428.08233\ 61175 = 68$ circ. $+ 47^\circ\ 31114\ 36228$. Le reste $47^\circ\ 31$ etc. fait connaître la direction du rayon vecteur, et la valeur de ce rayon se déduira de l'équation $\frac{a}{r} = 1 - \epsilon \sin^2 \psi'$, ce qui achève de déterminer le lieu du corps pour l'instant donné.

FIN DES APPLICATIONS.

↓	P.	Q.	↓	P.	Q.
0° 1/8	0.02586 926477	0.02587 142890	45° 1/8	0.02449 809628	0.04717 989681
1 1/8	0.02586 787673	0.02588 735872	46 1/8	0.02444 184699	0.04834 853401
2 1/8	0.02586 510084	0.02591 924400	47 1/8	0.02438 494222	0.04956 004203
3 1/8	0.02586 093747	0.02596 713616	48 1/8	0.02432 743867	0.05081 498327
4 1/8	0.02585 538718	0.02603 111227	49 1/8	0.02426 939628	0.05211 381107
5 1/8	0.02584 845074	0.02611 127539	50 1/8	0.02421 087820	0.05345 685165
6 1/8	0.02584 012913	0.02620 775453	51 1/8	0.02415 195109	0.05484 428484
7 1/8	0.02583 042354	0.02632 070494	52 1/8	0.02409 268467	0.05627 612309
8 1/8	0.02581 933540	0.02645 030824	53 1/8	0.02403 315258	0.05775 218922
9 1/8	0.02580 686640	0.02659 677271	54 1/8	0.02397 343167	0.05927 209288
10 1/8	0.02579 301851	0.02676 033353	55 1/8	0.02391 360236	0.06083 520577
11 1/8	0.02577 779398	0.02694 125306	56 1/8	0.02385 374857	0.06244 063572
12 1/8	0.02576 119534	0.02713 982110	57 1/8	0.02379 396770	0.06408 720016
13 1/8	0.02574 322578	0.02735 635562	58 1/8	0.02373 432059	0.06577 839892
14 1/8	0.02572 388834	0.02759 120218	59 1/8	0.02367 493144	0.06749 738704
15 1/8	0.02570 318687	0.02784 473527	60 1/8	0.02361 588775	0.06925 694765
16 1/8	0.02568 112557	0.02811 735811	61 1/8	0.02355 729012	0.07104 946687
17 1/8	0.02565 770913	0.02840 950316	62 1/8	0.02349 924217	0.07287 190382
18 1/8	0.02563 294276	0.02872 163233	63 1/8	0.02344 185043	0.07472 077797
19 1/8	0.02560 683230	0.02905 423747	64 1/8	0.02338 522360	0.07659 213897
20 1/8	0.02557 938418	0.02940 784042	65 1/8	0.02332 947331	0.07848 155528
21 1/8	0.02555 060556	0.02978 299344	66 1/8	0.02327 471284	0.08038 410126
22 1/8	0.02552 050430	0.03018 027924	67 1/8	0.02322 105725	0.08229 435038
23 1/8	0.02548 908910	0.03060 031108	68 1/8	0.02316 862295	0.08420 637506
24 1/8	0.02545 636948	0.03104 373287	69 1/8	0.02311 752730	0.08611 375351
25 1/8	0.02542 235591	0.03151 121896	70 1/8	0.02306 788807	0.08800 958443
26 1/8	0.02538 705988	0.03200 347394	71 1/8	0.02301 982312	0.08988 651159
27 1/8	0.02535 049390	0.03252 123222	72 1/8	0.02297 344974	0.09173 675647
28 1/8	0.02531 267169	0.03306 525750	73 1/8	0.02292 888426	0.09355 216269
29 1/8	0.02527 360815	0.03363 634192	74 1/8	0.02288 624124	0.09532 424922
30 1/8	0.02523 331951	0.03423 530505	75 1/8	0.02284 563303	0.09704 427505
31 1/8	0.02519 182339	0.03486 299258	76 1/8	0.02280 716926	0.09870 331526
32 1/8	0.02514 913888	0.03552 027467	77 1/8	0.02277 095599	0.10029 234430
33 1/8	0.02510 528668	0.03620 804392	78 1/8	0.02273 709508	0.10180 232099
34 1/8	0.02506 028907	0.03692 721304	79 1/8	0.02270 568378	0.10322 433542
35 1/8	0.02501 417036	0.03767 871184	80 1/8	0.02267 681382	0.10454 962558
36 1/8	0.02496 695637	0.03846 348396	81 1/8	0.02265 057088	0.10576 977918
37 1/8	0.02491 867512	0.03928 248280	82 1/8	0.02262 703432	0.10687 680226
38 1/8	0.02486 935668	0.04013 666692	83 1/8	0.02260 627583	0.10786 324088
39 1/8	0.02481 903326	0.04102 699474	84 1/8	0.02258 835969	0.10872 229090
40 1/8	0.02476 773940	0.04195 441836	85 1/8	0.02257 334189	0.10944 790184
41 1/8	0.02471 551204	0.04291 987664	86 1/8	0.02256 126981	0.11003 487192
42 1/8	0.02466 239059	0.04392 428723	87 1/8	0.02255 218178	0.11047 893199
43 1/8	0.02460 841717	0.04496 853768	88 1/8	0.02254 610684	0.11077 681579
44 1/8	0.02455 363653	0.04605 347554	89 1/8	0.02254 306448	0.11092 631462

↓	t.	Diff. I.	II.	III.	↓	t.	Diff. I.	II.	III.
0°	0.00000 00000	2587 20926	1 59308	1 59567	45°	1.44726 19060	4718 16560	116 86646	4 28669
1	0.02587 20926	2588 80234	3 18875	1 60079	46	1.49444 35620	4835 03206	121 15315	4 34286
2	0.05176 01160	2591 99109	4 78954	1 60849	47	1.54279 38826	4956 18521	125 49601	4 38814
3	0.07768 00269	2596 78063	6 39803	1 61883	48	1.59235 57347	5081 68122	129 88415	4 42067
4	0.10364 78332	2603 17866	8 01686	1 63169	49	1.64317 25469	5211 56537	134 30482	4 43855
5	0.12967 96198	2611 19552	9 64855	1 64725	50	1.69528 82006	5345 87019	138 74337	4 43972
6	0.15579 15750	2620 84407	11 29580	1 66541	51	1.74874 69025	5484 61356	143 18309	4 42191
7	0.18200 00157	2632 13987	12 96121	1 68620	52	1.80359 30381	5627 79665	147 60500	4 38275
8	0.20832 14144	2645 10108	14 64741	1 70978	53	1.85987 10046	5775 40165	151 98775	4 31894
9	0.23477 24252	2659 74849	16 35719	1 73594	54	1.91762 50211	5927 38940	156 30759	4 23048
10	0.26136 99101	2676 10568	18 09313	1 76502	55	1.97689 89151	6083 69699	160 53807	4 11213
11	0.28813 09669	2694 19881	19 85815	1 79675	56	2.03773 58850	6244 23506	164 65020	3 96200
12	0.31507 29550	2714 05696	21 65490	1 83131	57	2.10017 82356	6408 88526	168 61220	3 77738
13	0.34221 35246	2735 71186	23 48621	1 86878	58	2.16426 70882	6577 49746	172 38958	3 55559
14	0.36957 06432	2759 19807	25 35499	1 90908	59	2.23004 20628	6749 88704	175 94517	3 29401
15	0.39716 26239	2784 53306	27 26407	1 95237	60	2.29754 09332	6925 83221	179 23918	2 99010
16	0.42500 81545	2811 81713	29 21644	1 99853	61	2.36679 92553	7105 07139	182 22928	2 64168
17	0.45312 63258	2841 03357	31 21497	2 04772	62	2.43784 99692	7287 30067	184 87096	2 24668
18	0.48153 66615	2872 24854	33 26269	2 09990	63	2.51072 29759	7472 17163	187 11794	1 80348
19	0.51025 91469	2905 51123	35 36259	2 15515	64	2.58544 46922	7659 28927	188 92112	1 31086
20	0.53931 42592	2940 87382	37 51774	2 21339	65	2.66203 75849	7848 21039	190 23198	76823
21	0.56872 29974	2978 39156	39 73113	2 27474	66	2.74051 96888	8038 44237	191 00021	+ 17550
22	0.59850 69130	3018 12269	42 00587	2 33911	67	2.82090 41125	8229 44258	191 17571	— 46663
23	0.62868 81399	3060 12856	44 34498	2 40657	68	2.90319 85383	8420 61829	190 70908	1 15665
24	0.65928 94255	3104 47354	46 75155	2 47701	69	2.98740 47212	8611 32737	189 55243	1 80214
25	0.69033 41609	3151 22509	49 22856	2 55045	70	3.07351 79949	8800 87980	187 66029	2 60979
26	0.72184 64118	3200 45365	51 77901	2 62682	71	3.16152 67929	8988 54009	184 99550	3 48525
27	0.75385 09483	3252 23266	54 40583	2 70603	72	3.25141 21938	9173 53059	181 50525	4 33303
28	0.78637 32749	3306 63849	57 11186	2 78797	73	3.34314 74997	9355 03584	177 17222	5 20685
29	0.81943 96598	3363 75035	59 89983	2 87255	74	3.43669 78581	9532 20806	171 96537	6 09809
30	0.85307 71633	3423 65018	62 77238	2 95955	75	3.53201 99387	9704 17343	165 86638	7 00114
31	0.88731 36651	3486 42256	65 73193	3 04880	76	3.62906 16730	9870 03981	158 86524	7 90393
32	0.92217 78907	3552 15449	68 78073	3 14006	77	3.72776 20711	10028 90505	150 96131	8 79720
33	0.95769 94356	3620 93522	71 92079	3 23302	78	3.82805 11216	10179 86636	142 16411	9 67022
34	0.99390 87878	3692 85601	75 15381	3 32738	79	3.92984 97852	10322 03047	132 49389	10 51887
35	1.03083 73479	3768 00982	78 48119	3 42268	80	4.03307 00899	10454 52436	121 98292	11 31080
36	1.06851 74461	3846 49101	81 90387	3 51854	81	4.13761 53335	10576 50638	110 67122	12 05574
37	1.10698 23562	3928 39488	85 42241	3 61435	82	4.24338 03973	10687 17760	98 61548	12 73572
38	1.14626 63050	4013 81729	89 03676	3 70951	83	4.35025 21733	10785 79308	85 87976	13 34036
39	1.18640 44779	4102 85405	92 74627	3 80338	84	4.45811 01041	10871 67284	72 53940	13 86020
40	1.22743 30184	4195 60032	96 54965	3 89512	85	4.56682 68325	10944 21224	58 67920	14 28682
41	1.26938 90216	4292 14997	100 44477	3 98381	86	4.67626 89549	11002 89144	44 39238	14 61321
42	1.31231 05213	4392 59474	104 42858	4 06851	87	4.78629 78693	11047 28382	29 77916	14 83392
43	1.35623 64687	4497 02332	108 49709	4 14810	88	4.89676 07075	11077 06298	14 84524	14 94524
44	1.40120 67019	4605 52041	112 64519	4 22127	89	5.00754 13373	11092 00822	0 00000	14 94524
45	1.44726 19060	4718 16560	116 86646	4 28669	90	5.11846 14195	11092 00822		

ψ	φ	Diff. I.	II.	III.	IV.	ψ	φ	Diff. I.	II.	III.	IV.
0°	0.00000 00000	2586 92069	13880	13878	2	45°	1.14352 02636	2449 80667	5 62470	6555	570
1	0.02586 92069	2586 78189	27758	13876	7	46	1.16801 83303	2444 18197	5 69025	5985	598
2	0.05173 70258	2586 50431	41634	13869	8	47	1.19246 01500	2438 49172	5 75010	5387	631
3	0.07760 20689	2586 08797	55503	13861	10	48	1.21684 50672	2432 74162	5 80397	4756	666
4	0.10346 29486	2585 53294	69364	13851	10	49	1.24117 24834	2426 93765	5 85153	4090	700
5	0.12931 82780	2584 83930	83215	13841	16	50	1.26544 18599	2421 08612	5 89243	3390	734
6	0.15516 66710	2584 00715	97056	13825	17	51	1.28965 27211	2415 19369	5 92633	2656	769
7	0.18100 67425	2583 03659	1 10881	13808	20	52	1.31380 46580	2409 26736	5 95289	1887	806
8	0.20683 71084	2581 92778	1 24689	13788	20	53	1.33789 73316	2403 31447	5 97176	1081	836
9	0.23265 63862	2580 68089	1 38477	13768	28	54	1.36193 04763	2397 34271	5 98257	+ 245	876
10	0.25846 31951	2579 29612	1 52245	13740	31	55	1.38590 39034	2391 36014	5 98502	− 631	908
11	0.28425 61563	2577 77367	1 65985	13709	30	56	1.40981 75048	2385 37512	5 97871	1539	942
12	0.31003 38930	2576 11382	1 79694	13679	39	57	1.43367 12560	2379 39641	5 96332	2481	975
13	0.33579 50312	2574 31688	1 93373	13640	42	58	1.45746 52201	2373 43309	5 93851	3456	1007
14	0.36153 82000	2572 38315	2 07013	13598	47	59	1.48119 95510	2367 49458	5 90395	4463	1034
15	0.38726 20315	2570 31302	2 20611	13551	51	60	1.50487 44968	2361 59063	5 85932	5497	1064
16	0.41296 51617	2568 10691	2 34162	13500	60	61	1.52849 04031	2355 73131	5 80435	6561	1092
17	0.43864 62308	2565 76529	2 47662	13440	65	62	1.55204 77162	2349 92696	5 73874	7653	1112
18	0.46430 38837	2563 28867	2 61102	13375	69	63	1.57554 69858	2344 18822	5 66221	8765	1135
19	0.48993 67704	2560 67765	2 74477	13306	80	64	1.59898 88680	2338 52601	5 57456	9900	1149
20	0.51554 35469	2557 93288	2 87783	13226	86	65	1.62237 41281	2332 95145	5 47556	11049	1163
21	0.54112 28757	2555 05505	3 01009	13140	97	66	1.64570 36426	2327 47589	5 36507	12212	1176
22	0.56667 34262	2552 04496	3 14149	13043	105	67	1.66897 84015	2322 11082	5 24295	13388	1175
23	0.59219 38758	2548 90347	3 27192	12938	113	68	1.69219 95097	2316 86787	5 10907	14563	1181
24	0.61768 29105	2545 63155	3 40130	12825	125	69	1.71536 81884	2311 75880	4 96344	15744	1171
25	0.64313 92260	2542 23025	3 52955	12700	140	70	1.73848 57764	2306 79536	4 80600	16915	1163
26	0.66856 15285	2538 70070	3 65655	12560	146	71	1.76155 37300	2301 98936	4 63685	18078	1145
27	0.69394 85355	2535 04415	3 78215	12414	164	72	1.78457 36236	2297 35251	4 45607	19223	1125
28	0.71929 89770	2531 26200	3 90629	12250	176	73	1.80754 71487	2292 89644	4 26384	20348	1094
29	0.74461 15970	2527 35571	4 02879	12074	190	74	1.83047 61131	2288 63260	4 06036	21442	1062
30	0.76988 51541	2523 32692	4 14953	11884	208	75	1.85336 24391	2284 57224	3 84594	22504	1018
31	0.79511 84233	2519 17739	4 26837	11676	224	76	1.87620 81615	2280 72630	3 62090	23522	971
32	0.82031 01972	2514 90902	4 38513	11452	240	77	1.89901 54245	2277 10540	3 38568	24493	918
33	0.84545 92874	2510 52389	4 49965	11212	261	78	1.92178 64785	2273 71972	3 14075	25411	857
34	0.87056 45263	2506 02424	4 61177	10951	279	79	1.94452 36757	2270 57897	2 88664	26268	792
35	0.89562 47687	2501 41247	4 72128	10672	301	80	1.96722 94654	2267 69233	2 62396	27060	717
36	0.92063 88934	2496 69119	4 82800	10371	322	81	1.98990 63887	2265 06837	2 35336	27777	645
37	0.94560 58053	2491 86319	4 93171	10049	346	82	2.01255 70724	2262 71501	2 07559	28422	557
38	0.97052 44372	2486 93148	5 03220	9703	369	83	2.03518 42225	2260 63942	1 79137	28979	474
39	0.99539 37520	2481 89928	5 12923	9334	394	84	2.05779 06167	2258 84805	1 50158	29453	383
40	1.02021 27448	2476 77005	5 22257	8940	421	85	2.08037 90972	2257 34647	1 20705	29836	292
41	1.04498 04453	2471 54748	5 31197	8519	449	86	2.10295 25619	2256 13942	90869	30128	194
42	1.06969 59201	2466 23551	5 39716	8070	474	87	2.12551 39561	2255 23073	60741	30322	97
43	1.09435 82752	2460 83835	5 47786	7596	508	88	2.14806 62634	2254 62332	30419	30419	± 0
44	1.11896 66587	2455 36049	5 55382	7088	533	89	2.17061 24966	2254 31913	± 0	30419	97
45	1.14352 02636	2449 80667	5 62470	6555	570	90	2.19315 56879				

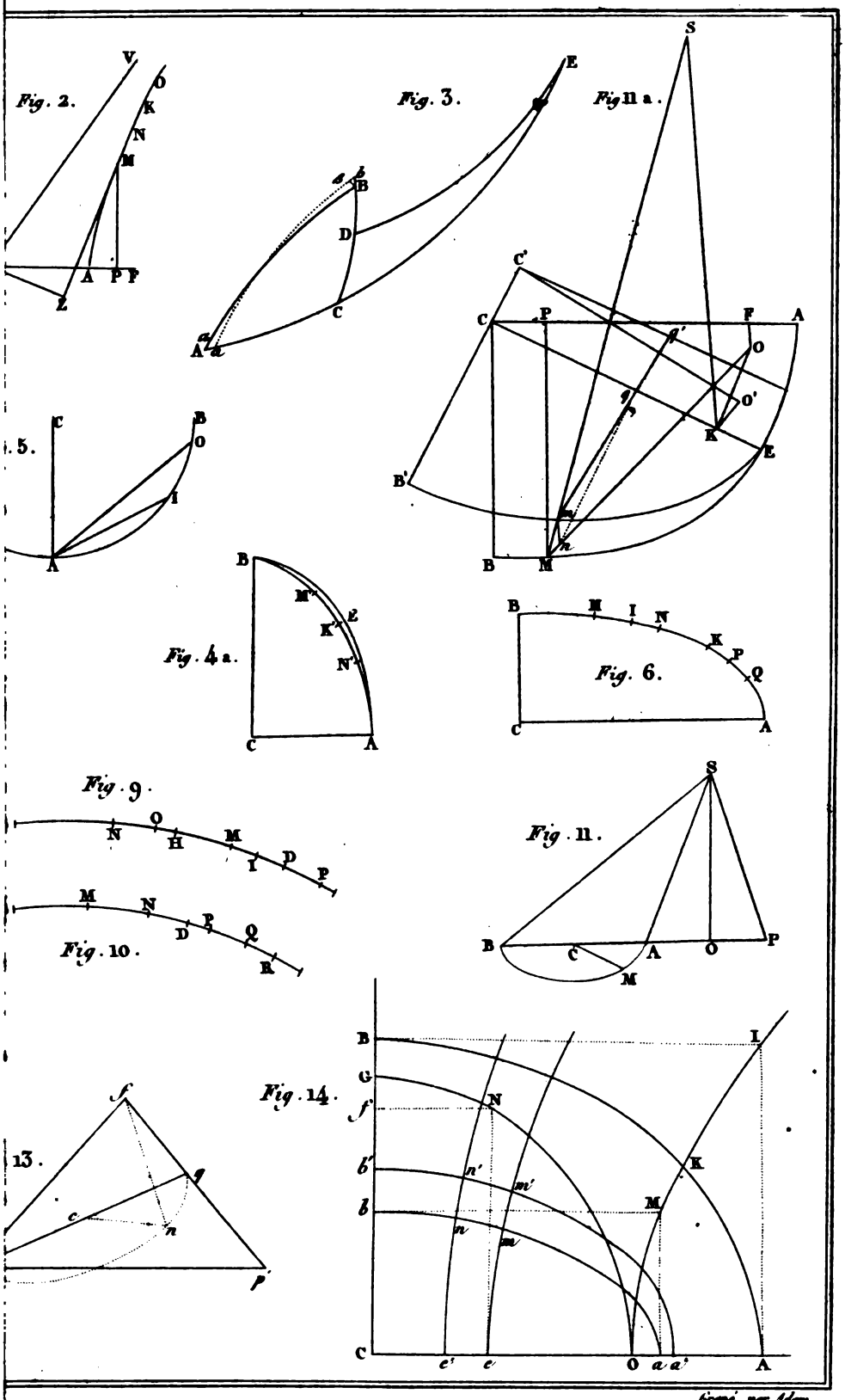
ERRATA du Tome I.

Pag.	Lig.	Corrections et additions.
5	25	Γ^2, Γ^3, etc.
11	22	$\int \frac{Q d\varphi}{\Delta}$
13	2	$B + Cx^2$
Ib.	15	$\int (A + B \sin^2\varphi) \frac{d\varphi}{\Delta}$
25	2	$\sin \varphi_3 = \frac{p^2 - q^2}{q^2 - rp^2} \sin \varphi$
Ib.	18	$\text{Tang}\, \frac{1}{2}\varphi n + 1 + \frac{1}{2}\varphi n - 1$
39	20	$(2 + 2c^2 - 3c^2 \sin^2\varphi) q$
Ib.	22	$\frac{1}{\sqrt{(1 + b^2 \tang^2\varphi)}}$
40	3	la fonction complète $F'c$
41	19	la fonction $cF(c, \varphi)$
51	13	$L \sin \varphi = 9,7517253$
54	5	$G(\varphi) = E(\varphi) - b^2 F(\varphi)$
56	6	la transformée
89	11	$\sin(2\varphi - \varphi^0)$
91	24	$c^{000} = \tang^2 3^0 2' 34'',69$
95	6	$\sqrt{\frac{c'}{c}}$
100		*mettez* $F'c$ *au lieu de* $F'c$
105	24	$F'b' = \frac{1}{2} F'b^0$, $F'b'' = \frac{1}{4} F'b^{00}$, etc.
107	15	$F'b = \sqrt{2} F'c$
108	22	c^0, c^{00}, c^{000}, etc.
110	20, 21	$\frac{1}{2} B'' \sin \varphi' \ldots \frac{1}{2} B''' \sin \varphi''$
134	2	$F(c, \varphi) = E(c, \varphi) = \varphi$
135	16	$\Pi'(n, c)$
137	27	$\Pi(c) = \frac{1}{2} F + \frac{\frac{1}{2}}{1 + c}$ arc tang.
138	22	$\Pi'(n, c) - F'c$
141	22	$\Pi'(n) = F' +$
147	8	$(1 + 2\zeta'') c^2 m'$
151	21	$\left(\frac{f\zeta}{a} - g\right)$
158	20	$\frac{1 + \nu \pm \sigma}{2 \sin \frac{1}{2}\theta}$

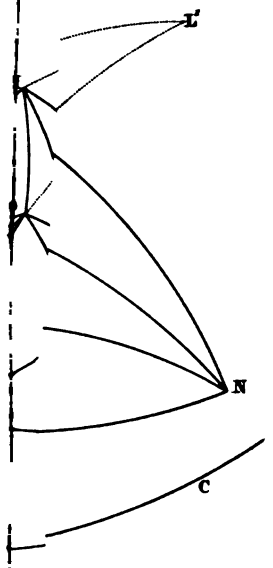
Pag.	Lig.	Corrections et additions.
158	29	$-\frac{2(c^2 + \nu)}{1 + \nu + \sigma}$
183	5	$b^{2n} \int \frac{d\phi}{\Delta^{2n+1}}$
184	dern.	$(1 + k)(bF'c + cF'b)$
205	17	$\frac{m\sqrt{3}}{3 - m}$
Ib.	23	$\sqrt[3]{2}$
209	5	$\sqrt[3]{(1 + z^6)} = u$
212	17	$n = -\frac{\sqrt[4]{3}}{(m+1)^2}$
215	11	$U = \sqrt[4]{3}[E(b, \psi) - \text{etc.}]$
216	11	$-\frac{\sqrt[4]{27}}{2} \Delta(c, \varphi) \tang \frac{1}{2}\varphi$
237	dern.	$\tang \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_0)$
249	25	module c
275	4	$+ 4A2 \cos 4\varphi -$ etc.
295	21	$\int \frac{d\varphi}{\Delta}$
311	dern.	$\frac{\sin \mathcal{C}}{\cos \alpha \cos^2 \mathcal{C}} E'c$
316	8	$\sqrt{(\sin^2 \omega - \sin^2 \alpha)}$
321	16	$MN \cos^{2n-1} \omega$
327	15	déduit de c^0
354	20	$\sin^2 \psi + \frac{B^2 a^2}{A^2 b^2} \cos^2 \psi$
355	dern.	$a^2 \sin^2 \mu$
358	6	$a^2 = c^2 + b^2$. Alors on a $8S = 2\pi\left(\frac{b^4 + c^4}{a^2}\right) + 2\pi b^2 E'\left(\frac{b^2 - c^2}{a^2}\right)$
359	4	$\frac{\delta\epsilon}{2}(1 - y^2) \int \frac{y^2 dy}{R}$
Ib.	9	$\sqrt{(1 - \delta)} . \sqrt{(1 - \epsilon)}$
369	1	$r \cos PN = v$
370	12	de ces formules
379	5	$DBM^3 = \mu$
Ib.	11	du méridien lui-même

Pag.	Lig.	Corrections et additions.	Pag.	Lig.	Corrections et additions.
383	20	$\frac{A+C}{A-B}$	477	5	selon que e
408	29	$y=\frac{C-B}{C+A}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon$	480	25	$=\frac{AB}{(A+B)^2}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{2}c)^3-1}$
423	14	art. 372.	513	17	$e^0=\varkappa^0=\sqrt{\frac{1}{2}}$
431	11	$\frac{m+q^2}{1+q^2}$	515	12	$\left(1-\frac{u}{n'}\right)\frac{e}{2}$
436	14	$C''=kF(c,\varepsilon)$	520	7	$+Bad\omega\sin\omega$
444	11	$\frac{1}{2}aV^2(1-m^0)-$	521	1	$-\frac{H^2}{2a}\left(\frac{1-p^2}{2p}\right)^2$
463	4	$2LF'\varkappa+F(\varkappa,\zeta')$	524	21	$H'(m+m')$
469	dern.	$\frac{1+c^{00}}{2}$	525	7	Fig. 30 et 20
			Ib.	10	TVYX
471	5	art. 449	526	9	$(u+\mu)(u+\mu')$
475	12	$kF'c$	546	21	par R' et $-R''$

Page 40, ligne 4, *ajoutez :* Cette expression peut être représentée, si l'on veut, par un seul arc de la courbe compté, à partir soit du point M, soit du point N, en tournant constamment dans le sens MN. En effet, soit M, M′, M″...M^k, la série des points M de la courbe situés à l'intervalle d'une demi-circonférence, ceux de rang pair se confondant avec le point M, et ceux de rang impair avec son opposé M′. Soit de même N, N′, N″...N^k, la série des points N situés à un pareil intervalle. L'arc $2ks'+s^0$ sera compris depuis le point M jusqu'au point N^k, et l'arc $2ks'-s^0$ sera compris depuis le point N jusqu'au point M^k : ainsi un seul arc représentera dans tous les cas la fonction $F(c,\varphi)$.



Gravé par Adam.



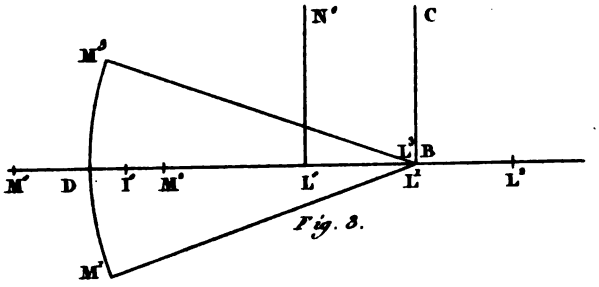


Fig. 3.

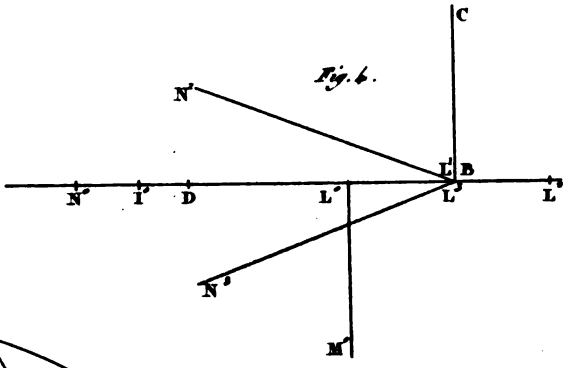


Fig. 6.

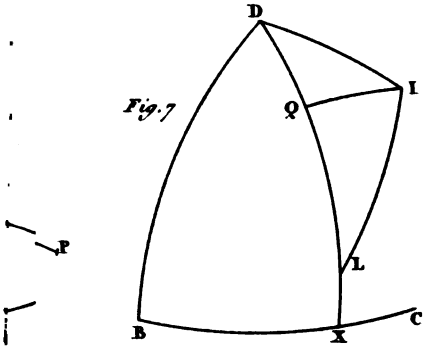


Fig. 7

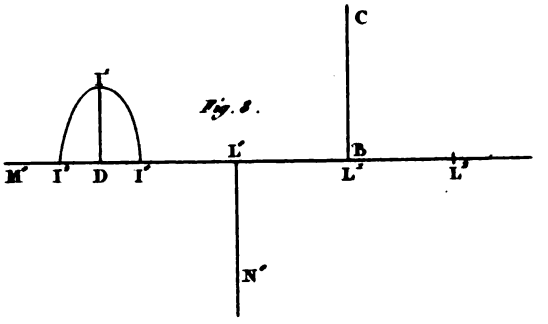
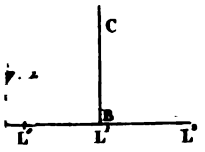


Fig. 8.



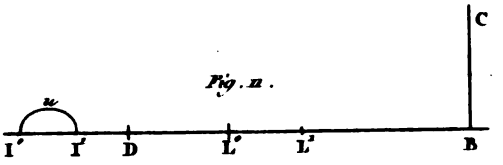


Fig. 11.

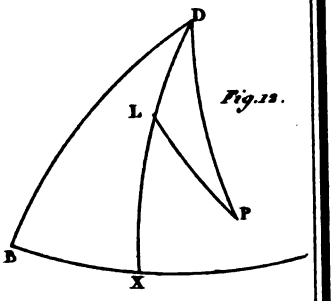


Fig. 12.

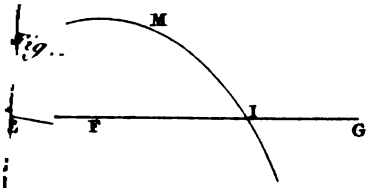


Fig.

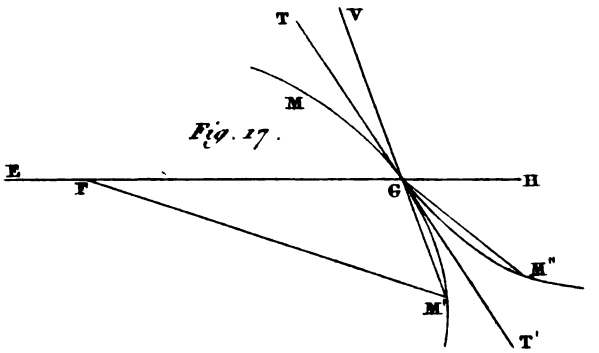


Fig. 17.

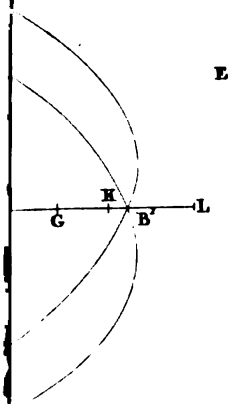


Fig. 22.

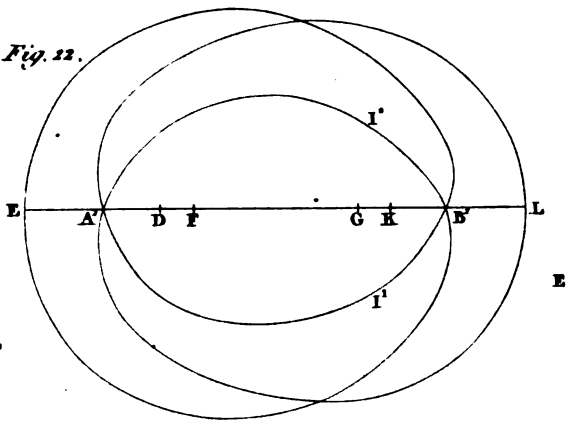


Fig 24

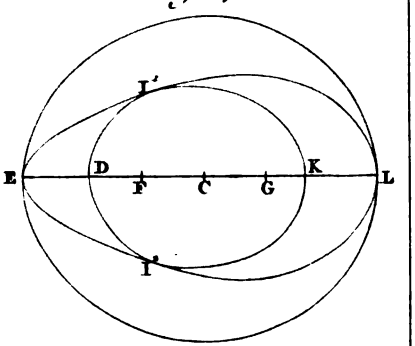
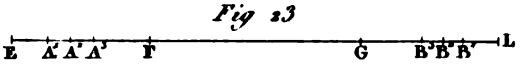
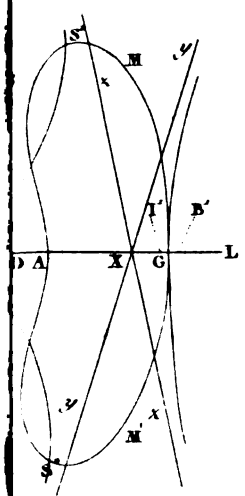


Fig 23





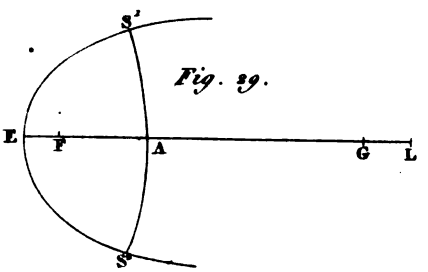


Fig. 29.

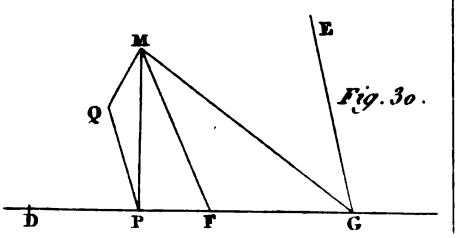


Fig. 30.

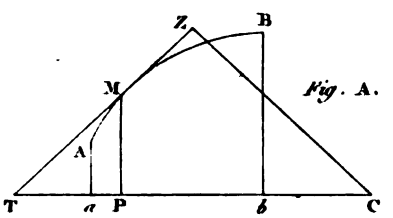


Fig. A.

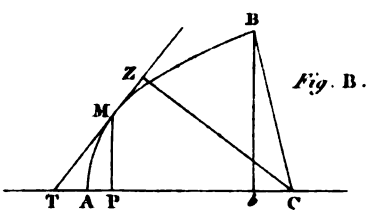


Fig. B.

3 2044 017 943 283

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

CANCELLED
CANCELLED
WIDENER
JUL 1 1983
777449
WIDENER
BOOK DUE
FEB 1 - 1988
FEB 9 1988
2425259
CANCELLED
FEB 1 - 1988
3 209159
JAN '72
APR 3 1975 ILL
CANCELLED